

VISIT...

LANZAROTE
Caliente.COM

Теория автоматического управления и регулирования

Издание второе, переработанное
и дополненное

*Допущено Министерством
высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов вузов,
обучающихся по специальностям:
«Автоматика и телемеханика»,
«Электронные вычислительные машины»,
«Информационно-измерительная техника».*

ББК 32.965я75
3-17

УДК 62—52(075.8)

Рецензенты:

чл.-кор. АН СССР И. М. Макаров (Московский институт радиотехники, электроники и автоматики), д-р техн. наук, проф. А. В. Нешутиль (Московский институт тонкой химической технологии)

Редакция литературы по информатике и автоматике
Зав. редакцией Г. Ф. Трофимчук

Зайцев Г. Ф.

3-17 Теория автоматического управления и регулирования.— 2-е изд., перераб. и доп.— К.: Выща шк. Головное изд-во, 1989.— 431 с.
ISBN 5-11-000225-8.

Приведены общие сведения и определения теории автоматического управления и регулирования. Описаны принципы управления, динамические характеристики звеньев и систем автоматического управления (САУ).

Рассмотрены вопросы теорий инвариантности и ее применения при построении САУ высокой точности с принципом комбинированного управления.

Во второе издание включены главы по цифровым, оптимальным и адаптивным системам автоматического управления. Большое внимание уделено решению основной проблемы теории управления — повышению динамической точности и быстродействия автоматических систем.

Для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям: «Автоматика и телемеханика», «Вычислительная техника», «Информационно-измерительная техника».

3 1502000000—74
М 211(04)—88 КУ—№1—614—1988

ББК 32.965я75

ISBN 5-11-000225-8

© Издательское объединение
«Выща школа», 1975

© Издательское объединение
«Выща школа», 1988,
с изменениями

Теоретической основой автоматических систем является теория автоматического управления и регулирования, изучающая принципы построения, методы анализа и синтеза наиболее широкого класса автоматических систем: систем автоматического управления и регулирования.

Основоположником теории автоматического управления и регулирования, зародившейся около 100 лет назад, является профессор Петербургского технологического института Иван Алексеевич Вышнеградский (1831—1895). Его фундаментальная работа «О регуляторах прямого действия» (1876 г.) оказала огромное влияние на все дальнейшее развитие теории регулирования. Он впервые показал, что процессы в регуляторе и объекте регулирования неразрывно связаны между собой и поэтому их исследовать необходимо совместно. В теории автоматического управления существенную роль играет устойчивость. Основателем строгой теории устойчивости является великий русский математик профессор Харьковского университета академик Александр Михайлович Ляпунов (1857—1918).

Особенно интенсивно теория автоматического управления начала развиваться с конца тридцатых годов XX ст., когда были разработаны частотные методы анализа устойчивости линейных систем, поставлена проблема качества управления и заложены основы ряда эффективных методов исследования нелинейных систем. К настоящему времени в теории автоматического управления достигнуты большие успехи. Существенное развитие получила теория линейных систем. В частности, разработаны методы оценки качества переходных процессов, динамической точности линейных систем, находящихся под действием случайных возмущающих воздействий, заданных статистически. Развита теория исследования нелинейных систем. За последние годы советскими учеными получены основные результаты в теории инвариантности; сформулирован критерий реализуемости условий инвариантности, получены результаты по инвариантности нелинейных систем, систем с переменными и распределенными параметрами, систем с переменной структурой, а также по полиинвариантности; достигнуты определенные успехи в теории многосвязных систем (систем со многими регулируемыми величинами), предложен ряд методов, позволяющих использовать связи между отдельными подсистемами для повышения качества систем в целом.

Наряду с классическими системами начинают применяться специальные системы автоматического управления: оптимальные системы,

адаптивные системы, обеспечивающие стабилизацию динамических свойств автоматических систем и их показателей качества при изменении параметров объектов и характеристик входных воздействий; системы автоматической оптимизации (экстремальные системы), осуществляющие автоматический поиск и поддержание экстремального значения критерия качества; импульсные и цифровые автоматические системы, обеспечивающие преобразование сигналов в соответствии со сложными алгоритмами управления и, благодаря этому, позволяющие достигать высоких точностей процессов управления. Созданы теории чувствительности и распознавания образов, разработан универсальный метод исследования САУ — метод пространства состояний.

Методы исследования, разработанные в теории автоматического управления, являются довольно общими, область применения их выходит за рамки практического приложения дисциплины. Принципы управления (регулирования), на основе которых строятся технические системы, имеют универсальный характер. Аналогичные принципы, например принцип обратной связи, заложены в регуляционные системы живых организмов, системы управления производством, обществом и т. д. Поэтому изучение теории автоматического управления и регулирования в настоящее время становится необходимым не только для специалистов в области автоматики, но и для широкого круга специалистов других направлений.

Второе издание существенно переработано и дополнено новыми главами, в которых рассматриваются цифровые, оптимальные и адаптивные автоматические системы, включены научные результаты, полученные автором в области коррекции систем автоматического управления, теории инвариантности и ее применения для построения высококачественных комбинированных систем, теории импульсных, оптимальных по быстродействию систем автоматического управления и др.

При изложении материала предполагалось, что студенты ознакомлены с определенными разделами высшей математики, теоретических основ электротехники, вычислительной техники, а также с элементами автоматики из курсов электрических машин, электронных устройств.

Основные понятия и определения.

Принципы управления

1.1. Определение системы автоматического управления (САУ)

Состояние любого технического устройства характеризуется одной или несколькими физическими величинами. Например, состояние генератора характеризуется величиной напряжения и значением частоты этого напряжения, двигателя — угловой частотой вращения его вала, закалочной печи — температурой, антенны радиолокационной станции — угловым положением, ракеты — координатами траектории полета.

Впредь технические устройства будем называть объектами, а физические величины, характеризующие их состояние, — выходными величинами объектов. На практике выходные величины объектов должны удовлетворять определенным требованиям. Совокупность предписаний, определяющих характер изменения выходных величин объектов, называется *алгоритмом функционирования*. К наиболее часто встречающимся на практике алгоритмам функционирования относятся следующие:

поддержание постоянства выходной величины $\beta(t)$, равной заданному (требуемому) значению $\beta_{\text{тр}}(t)$;

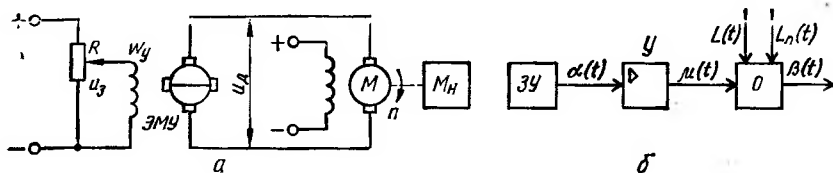
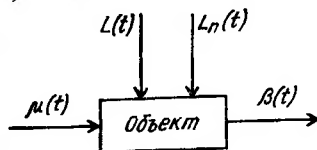
изменение выходной величины по заданному закону (программе);

изменение выходной величины по заранее неизвестному закону.

Например, обычно необходимо, чтобы напряжение генератора, частота этого напряжения, частота вращения ротора двигателя поддерживались постоянными, равными требуемым значениям. Траектория полета ракеты должна изменяться по определенной, заранее разработанной программе. Антенна радиолокационной станции должна изменять угловое положение таким образом, чтобы ось равносигнальной зоны была направлена на цель, координаты которой изменяются произвольно. Таким образом, выходную величину объекта $\beta(t)$ необходимо поддерживать равной требуемому значению $\beta_{\text{тр}}(t)$, т. е. $\beta(t) = \beta_{\text{тр}}(t)$, которое является постоянной величиной или же изменяется по некоторому, в общем случае неизвестному закону.

Для того чтобы выходная величина $\beta(t)$ объекта (рис. 1.1) приняла требуемое значение, на его вход подается входное воздействие $\mu(t)$. На рис. 1.2, а представлена принципиальная схема системы электропривода, состоящего из электромашинного усилителя мощности (ЭМУ) и электродвигателя постоянного тока М. В этой системе электродвигатель является объектом, а частота вращения n его ротора — выходной величиной. Чтобы ротор электродвигателя вращался с требуемой частотой $n_{\text{тр}}$, необходимо на его вход (якорную обмотку) подавать опреде-

Рис. 1.1, Схема объекта и воздействий.

Рис. 1.2. Схемы системы электропривода, состоящей из электромашинного усилителя мощности ЭМУ и электродвигателя M :

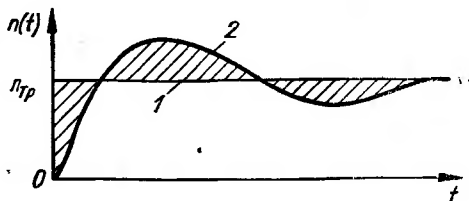
a — принципиальная; *б* — функциональная.

ленное напряжение u_d . Это напряжение снимается с выхода ЭМУ. В свою очередь, на обмотку управления W_y ЭМУ подается напряжение u_z с движка потенциометра R . При перемещении этого движка изменяется ток в обмотке W_y ЭМУ и напряжение u_d , т. е. изменяется входное воздействие объекта. Последнее вызывает изменение выходной величины объекта — частоты вращения ротора. Для задания требуемой частоты вращения ротора двигателя движок потенциометра R устанавливается в соответствующее положение. Поэтому потенциометр R называют *задающим устройством*.

В дальнейшем, наряду с принципиальными, мы будем сталкиваться с функциональными схемами систем. Функциональная схема представляет собой схему соединения элементов, различаемых по их функциональному назначению. Функциональная схема электропривода ЭМУ — электродвигатель изображена на рис. 1.2, б, где ЗУ — задающее устройство; У — усилитель; О — объект. Задающее устройство вырабатывает задающее воздействие $\alpha(t)$ (в системе рис. 1.2, а — напряжение u_z), которое с помощью усилителя усиливается и подается на вход объекта с тем, чтобы выходная величина объекта $\beta(t)$ приняла требуемое значение $\beta_{тр}(t)$. Однако на практике выходная величина объекта $\beta(t)$ по ряду причин отклоняется от требуемого значения. Одной из этих причин является *влияние различного рода внешних возмущающих воздействий* на объект (на рис. 1.1 и 1.2, б показано одно внешнее возмущающее воздействие $L(t)$). Например, отклонение частоты вращения электродвигателя (рис. 1.2, а) от требуемого значения может быть вызвано таким внешним возмущающим воздействием, как изменение момента нагрузки M_n на его валу.

Другой причиной является *влияние изменения параметров объекта* или других элементов системы, т. е. влияние параметрических возмущающих воздействий $L_n(t)$ (рис. 1.1 и 1.2, б). Такими параметрическими возмущающими воздействиями электропривода (рис. 1.2, а) могут быть изменения коэффициентов усиления двигателя, ЭМУ и других параметров элементов системы. Впредь внешние и параметрические

Рис. 1.3. Переходный процесс в системе электропривода рис. 1.2, а при скачкообразном изменении задающего напряжения u_a .



возмущающие воздействия будем называть просто возмущающими воздействиями.

Третья причина, вызывающая отклонение $\beta(t)$ от $\beta_{тр}(t)$, обусловлена изменением требуемого значения управляемой величины (изменением требуемой температуры закалочной печи, произвольным изменением угловых координат цели). Если требуемое значение выходной величины изменяется, то для соответствующего изменения действительного значения выходной величины необходимо изменять воздействие на входе объекта. При изменении же воздействия на входе объекта, обладающего инерционностью, возникает переходный процесс, в течение которого выходная величина не будет соответствовать требуемому значению. Например, если требуется изменить частоту n электродвигателя M (рис. 1.2, а) скачком от 0 до $n_{тр}$ (кривая 1, рис. 1.3) и в связи с этим быстро переместить движок потенциометра R , то в двигателе (точнее во всей системе) возникнет переходный процесс. Частота вращения электродвигателя при этом изменяется по кривой, определяемой динамическими характеристиками двигателя и ЭМУ (например, по кривой 2). Эта кривая отличается от требуемого графика (скачка) изменения скорости. Изменение отклонения $\Delta n(t) = n_{тр} - n(t)$ в течение переходного процесса на рис. 1.3 соответствует заштрихованной области.

Отклонение выходной величины от требуемого значения может возникать не только в переходном, но и в установившемся динамическом режиме, когда требуемое значение изменяется, например, с постоянной скоростью или постоянным ускорением.

Отклонение $\beta(t)$ от $\beta_{тр}(t)$ под влиянием перечисленных причин может достигать недопустимо больших значений, при которых нарушается обеспечиваемый объектом технический процесс. Поэтому возникает задача уменьшения отклонений выходных величин объектов от требуемых значений. Эта задача является основной задачей управления (регулирования).

Наметим пути решения задачи управления. Как отмечалось, на выходную величину $\beta(t)$ объекта (рис. 1.1), с одной стороны, влияет возмущающее воздействие $L(t)$, приложенное к определенной точке объекта, вызывая нежелательное изменение $\beta(t)$ — ее отклонение $\theta_L(t)$ от требуемого значения. Канал, через который возмущающее воздействие $L(t)$ влияет на выходную величину $\beta(t)$ объекта, называют каналом возмущения $KВ$ объекта (рис. 1.4, а). С другой стороны, на $\beta(t)$ можно влиять подачей соответствующего воздействия $\mu(t)$ на вход объекта, добиваясь уменьшения или устранения отклонения $\beta(t)$ от требуемого значения. Канал влияния входного воздействия

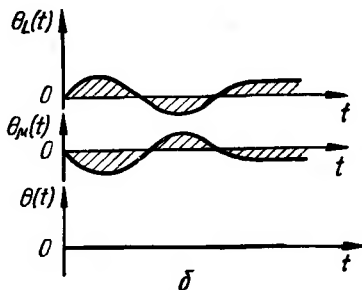
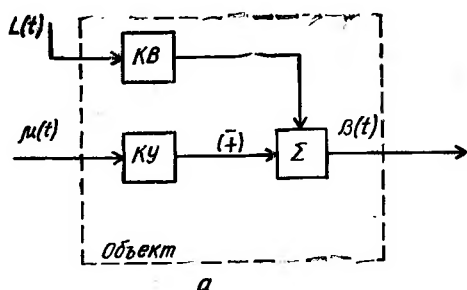


Рис. 1.4. Схема объекта (а) и реакции его каналов возмущения $KВ$ и управления $KУ$ при полной компенсации возмущающего воздействия $L(t)$ (б).

на выходную величину объекта будем называть *каналом управления* $KУ$ объекта. Выходные величины каналов складываются (вычитаются) с помощью сумматора Σ .

При увеличении момента нагрузки M_n двигателя M (рис. 1.2, а), приложенного к его валу, появляется отклонение — уменьшение частоты вращения якоря от требуемого значения. Для устранения этого отклонения нужно соответствующим образом увеличить подводимое к его якорной обмотке напряжение u_d (изменить воздействие на входе объекта). Пусть отклонение $\theta_L(t)$ величины $\beta(t)$ от $\beta_{тр}(t)$, вызванное возмущающим воздействием $L(t)$ (рис. 1.4, а), изменится, например, в соответствии с кривой $\theta_L(t)$ (рис. 1.4, б). Для компенсации $\theta_L(t)$ надо подобрать такой закон изменения воздействия $\mu(t)$ на входе объекта (рис. 1.4, а), при котором кривая вызванного им отклонения $\theta_\mu(t)$ выходной величины $\beta(t)$ от требуемого значения $\beta_{тр}(t)$ (рис. 1.4, б) будет совпадать с кривой отклонения $\theta_L(t)$, но иметь противоположный знак. В этом случае отклонения будут взаимно компенсироваться, результирующее отклонение $\theta(t) = \theta_L(t) - \theta_\mu(t) = 0$ и выходная величина тогда не будет зависеть от возмущающего воздействия $L(t)$. Естественно, воздействие $\mu(t)$ на входе объекта при этом должно соответствующим образом зависеть от возмущающего воздействия, а также статических и динамических характеристик объекта (его каналов возмущения и управления).

Отклонение, возникающее в связи с изменением требуемого значения выходной величины, также может быть уменьшено или устранено подачей на вход объекта воздействия, являющегося определенной функцией от требуемого значения и характеристик объекта.

Таким образом, задача устранения или уменьшения отклонения выходной величины объекта от требуемого значения (задача управления) сводится к нахождению необходимой зависимости воздействия на входе объекта от возмущающих воздействий, изменения требуемого значения выходной величины и характеристик объекта и реализации этой зависимости. Воздействие на входе объекта, полученное в результате преобразования факторов, вызывающих отклонение $\beta(t)$ от $\beta_{тр}(t)$, или самого отклонения и обеспечивающее уменьшение этого отклонения (и тем самым приближающее функционирование объекта в соответствие с алгоритмом функционирования), называется *управля-*

ющим воздействием. Выходная величина объекта называется *управляемой величиной*, а объект — *управляемым объектом*. Математическое выражение зависимости управляющего воздействия от возмущающих воздействий, изменения требуемого значения управляемой величины, отклонения управляемой величины, и характеристик объекта называется *алгоритмом управления* (регулирования).

После приведенных сведений сформулируем определение управления: *под управлением понимается осуществление воздействий, получаемых в результате обработки имеющейся информации и направленных на уменьшение отклонения функционирования управляемого объекта от заданного алгоритмом функционирования*. Очевидно, что необходимость в управляющем воздействии возникает в тех случаях, когда процесс в объекте отклоняется от предписаний, заданных алгоритмом функционирования.

Управляющее воздействие может вырабатываться с помощью человека или автоматическим управляющим устройством. Например, в системе (см. рис. 1.2) автоматическое управляющее устройство отсутствует. В ней не вырабатывается управляющее воздействие: входное воздействие объекта не изменяется в соответствии с изменением возмущающих воздействий (например, с изменением нагрузки) и отклонение выходной величины объекта (частоты вращения двигателя) от требуемого значения не уменьшается. В этой системе управляющее воздействие может вырабатываться человеком. Сравнивая действительное и требуемое значения управляемой величины, человек может выявлять отклонение между ними и в соответствии с величиной и знаком этого отклонения перемещать движок потенциометра R .

Если управляющее воздействие вырабатывается с участием человека, то такое управление называется *полуавтоматическим*. Автоматическим называется управление, осуществляемое без непосредственного участия человека, когда управляющее воздействие вырабатывается автоматическим управляющим устройством. *Автоматическим управляющим устройством* (АУУ) называется устройство, которое вырабатывает управляющее воздействие в соответствии с заданным в нем алгоритмом управления и оказывает воздействие на управляемый объект.

Система, состоящая из управляемого объекта и автоматического управляющего устройства, взаимодействующих между собой в соответствии с алгоритмом управления, называется автоматической системой (системой автоматического управления, или системой автоматического регулирования). Предметом изучения теории автоматического управления являются системы автоматического управления и полуавтоматические (эргатические) системы управления, т. е. системы, содержащие человека-оператора.

1.2. Основные принципы управления

В зависимости от способов формирования управляющего воздействия различают следующие принципы управления: по возмущению; по отклонению управляемой величины от требуемого значения; принцип комбинированного управления.

Принцип управления по возмущению (разомкнутые САУ)

Для уменьшения или устранения отклонения управляемой величины от требуемого значения, вызываемого влиянием того или иного фактора, необходимо, чтобы управляющее воздействие было определенной функцией этого фактора и характеристик объекта.

Если под фактором, вызывающим отклонение управляемой величины от требуемого значения, понимается какое-либо возмущающее воздействие, то ему соответствует *принцип управления по возмущению*, если же этим фактором является изменение требуемого значения управляемой величины, то *принцип управления по задающему воздействию*. При управлении по возмущению ставится задача компенсации влияния возмущающего воздействия на управляемую величину, а при управлении по задающему воздействию задача состоит в достижении наиболее точного воспроизведения управляемой величиной этого задающего воздействия или его функции.

Принцип управления по возмущению. Функциональная схема системы автоматического управления с принципом управления по возмущению (принцип Понселе — Чиколева) изображена на рис. 1.5. Возмущающее воздействие $L(t)$ через канал возмущения $KВ$ управляемого объекта $УО$ влияет на управляемую величину $\beta(t)$, вызывая ее отклонение $\theta_L(t)$ от требуемого значения.

Принцип управления по возмущению состоит в том, что для уменьшения или устранения отклонения $\theta_L(t)$ управляемой величины от требуемого значения, вызываемого возмущающим воздействием $L(t)$, измеряется это воздействие и в результате его преобразования вырабатывается управляющее воздействие $\mu(t)$, которое, будучи приложено ко входу объекта $УО$, вызывает компенсирующее отклонение $\theta_\mu(t)$ управляемой величины противоположного знака по сравнению с отклонением $\theta_L(t)$. Для полной компенсации влияния возмущающего воздействия отклонение $\theta_\mu(t)$ в каждый момент времени должно быть равно по значению и противоположно по знаку отклонению $\theta_L(t)$, вызываемому возмущающим воздействием $L(t)$ (рис. 1.4, б).

Измерение возмущающего воздействия $L(t)$ осуществляется с помощью измерительного элемента $ИЭ$ (рис. 1.5), а его преобразование — с помощью преобразователя $П$. Измерительный элемент и преобразователь образуют связь по возмущению.

Выходное воздействие связи по возмущению (компенсирующее воздействие) в сумматоре ΣI складывается с задающим воздействием $\alpha(t)$, определяющим требуемое значение управляемой величины. Задающее воздействие вырабатывается в задающем устройстве $ЗУ$. Суммарное воздействие $\Sigma(t)$ с помощью усилителя — преобразователя $УП$ усиливается по мощности до величины, необходимой для получения требуемого режима работы объекта. В общем случае наряду с усилением $\Sigma(t)$ производится дополнительное его преобразование. Сформированное таким образом управляющее воздействие $\mu(t)$ с выхода $УП$ поступает на вход объекта и через его канал управления $KУ$ компенсирует влияние возмущающего воздействия, вызывая противоположную реакцию объекта по сравнению с реакцией, вызываемой возмущающим воздействием через канал возмущения объекта.

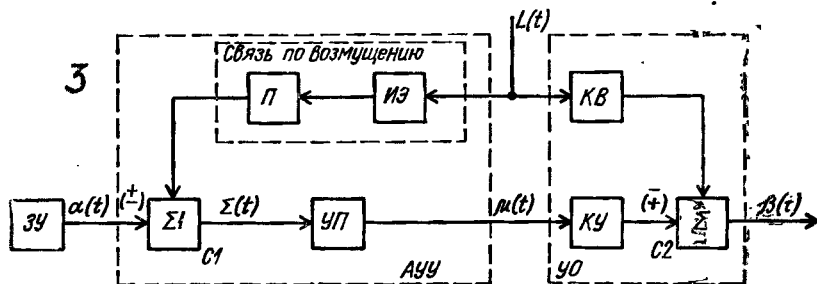


Рис. 1.5. Функциональная схема САУ с принципом управления по возмущению.

Некоторые системы включают в явном виде исполнительные элементы и управляющие органы. В рассматриваемой функциональной схеме эти элементы не выделены и входят в усилитель-преобразователь.

Связь по возмущению и усилитель-преобразователь образуют *автоматическое управляющее устройство (АУУ)* (регулятор). АУУ, измеряя и преобразуя возмущающее воздействие $L(t)$ в соответствии с заложенным алгоритмом управления «вырабатывает» управляющее воздействие $\mu(t)$. Для САУ с принципом управления по возмущению алгоритм управления имеет общий вид $\mu(t) = f[L(t)]$, т. е. *управляющее воздействие является функцией возмущающего воздействия*.

На рис. 1.5 показано, что в САУ с принципом управления по возмущению имеются два канала влияния возмущающего воздействия $L(t)$ на управляемую величину $\beta(t)$: канал возмущения KB объекта, являющийся естественным каналом влияния возмущающего воздействия, и канал, образованный связью по возмущению, усилителем-преобразователем и каналом управления $KУ$ объекта — искусственно созданный *компенсационный канал*. Таким образом, САУ с принципом управления по возмущению являются *двухканальными системами* и в них для компенсации влияния возмущающего воздействия через один (естественный) канал используется влияние того же самого возмущающего воздействия через второй, искусственно созданный компенсационный канал.

Примеры систем с принципом управления по возмущению и их анализ в статическом режиме. Примером САУ с принципом управления по возмущению может служить система управления частотой вращения электродвигателя постоянного тока (рис. 1.6, а). В этой системе электродвигатель M является управляемым объектом, а частота вращения n его ротора — управляемой величиной. Требуемую частоту вращения электродвигателя задают с помощью потенциометра R — задающего устройства. Напряжение u_3 , снимаемое с движка этого потенциометра, является задающим воздействием системы.

В отличие от обычной системы электропривода постоянного тока (рис. 1.2, а) здесь введена связь по основному возмущающему воздействию — нагрузке двигателя. Эта связь реализована с помощью моментной муфты $ММ$ и обмотки управления W_{y2} ЭМУ. Моментная муфта выполняет функцию измерительного элемента возмущающего воздействия — выходное напряжение u_n муфты пропорционально моменту нагрузки M_n , т. е. $u_n = I_0 M_n$. Обмотка управления W_{y2} ЭМУ является простейшим преобразователем: ампервитки, создаваемые этой обмоткой, пропорциональны

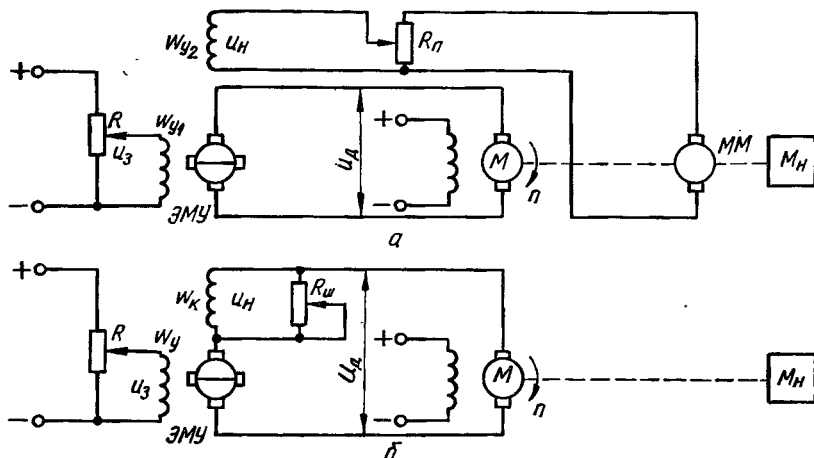


Рис. 1.6. Принципиальные схемы системы автоматического управления частотой электродвигателя с принципом управления по возмущению:

а — связь по возмущению (нагрузке) реализована моментной муфтой *ММ* и обмоткой управления W_{y2} ЭМУ; *б* — связь по нагрузке реализована компенсационной обмоткой W_k ЭМУ.

подводимому напряжению u_n . Ампервитки связи по возмущению складываются в ЭМУ с ампервитками, создаваемыми обмоткой управления W_{y1} ЭМУ, к которой подводится задающее напряжение u_3 . Таким образом, ЭМУ выполняет функции сумматора и усилителя (см. функциональную схему системы, рис. 1.5).

Момент нагрузки M_H влияет на частоту вращения двигателя n через два канала: через вал двигателя (канал возмущения) и через моментную муфту, ЭМУ, якорную обмотку двигателя (компенсационный канал) (рис. 1.6).

Увеличение M_H через канал возмущения обычно вызывает уменьшение n . В системе же со связью по возмущению при увеличении M_H увеличивается также и напряжение u_n моментной муфты, приложенное к обмотке управления W_{y2} ЭМУ. Возрастают ампервитки обмотки W_{y2} , результирующие ампервитки управления ЭМУ, увеличивается напряжение u_d на входе двигателя, а следовательно, и момент вращения $M_{вр}$ двигателя. Благодаря этому двигателем преодолевается возросший момент нагрузки M_H при прежней частоте вращения его ротора. Таким образом, в результате противоположного влияния изменения M_H на n через канал возмущения и компенсационный канал в рассматриваемой системе может быть достигнута независимость n от M_H .

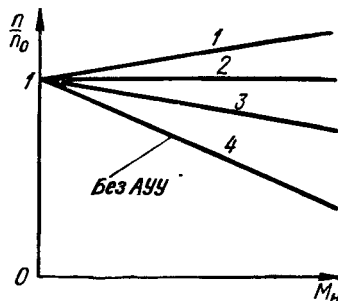
В системе без связи по возмущению (см. рис. 1.2, *а*) напряжение u_d на входе двигателя определяется лишь задающим напряжением u_3 , снимаемым с потенциометра R . При увеличении M_H оно остается постоянным (а не возрастает, как в системе со связью по возмущению рис. 1.6, *а*), поэтому частота вращения двигателя в этой системе с увеличением M_H уменьшается.

В тех случаях, когда не представляется возможности применить моментную муфту, измеряют не M_H , а ток i_a якоря двигателя, который приблизительно пропорционален моменту нагрузки M_H . Связь по возмущению — нагрузке в этом случае реализуется с помощью компенсационной обмотки W_k ЭМУ, включенной последовательно в цепь якоря двигателя M (рис. 1.6, *б*). Напряженное, выделяющееся на обмотке W_k в установившемся режиме: $u_n = I_a M_H$. При увеличении M_H ток якоря двигателя увеличивается, возрастают ампервитки компенсационной обмотки W_k ЭМУ, увеличивая общие ампервитки управления и повышая напряжение u_d на выходе ЭМУ. Это вызывает повышение момента вращения двигателя, компенсируя возросший момент нагрузки M_H и обеспечивая независимость частоты вращения двигателя от M_H .

Чтобы убедиться в возможности полной компенсации влияния M_H на n в установленном режиме в системах рис. 1.6, найдем аналитическую зависимость $n = f(M_H)$ этих систем.

Рис. 1.7. Статические характеристики системы с принципом управления по возмущению (рис. 1.6) при различной степени компенсации возмущения (нагрузки):

1 — $\gamma < 0$; 2 — $\gamma = 0$; 3 — $0 < \gamma < k_3$; 4 — $\gamma = k_3$ (без АУУ).



Запишем уравнения элементов систем в установившемся режиме: суммирующего устройства на входе ЭМУ $u_{\Sigma} = u_3 + u_n = u_3 + l_0 M_H$;

ЭМУ $u_d = k_1 u_{\Sigma}$;

двигателя $n = k_2 u_d - k_3 M_H$,

где k_1 — коэффициент усиления ЭМУ; k_2 и k_3 — коэффициенты усиления двигателя по отношению к управляющему и возмущающему воздействиям соответственно. Считаем, что напряжение u_n компенсационной обмотки W_k (рис. 1.6, б) приведено к обмотке управления и коэффициент приведения вошел в коэффициент l_0 . Исключая из этих уравнений промежуточные переменные u_d и u_{Σ} , получаем выражение для статической характеристики систем

$$n = n_0 - \gamma M_H, \quad (1.1)$$

где $n_0 = k_1 k_2 u_3$ — частота вращения двигателя в режиме холостого хода; $\gamma = k_3 - k_1 k_2 l_0$ — коэффициент усиления системы по отношению к возмущающему воздействию.

Из формулы (1.1) видно, что если $\gamma \neq 0$, то частота вращения двигателя изменяется с изменением M_H . Отклонение частоты Δn_B от требуемого значения при данном M_H пропорционально γ , т. е.

$$\Delta n_B = \gamma M_H = (k_3 - k_1 k_2 l_0) M_H. \quad (1.2)$$

Очевидно, что с уменьшением γ уменьшается влияние M_H на n . В системе без связи по нагрузке (без АУУ) $l_0 = 0$ и коэффициент γ принимает максимальное значение ($\gamma = k_3$), поэтому наблюдается наибольшее влияние M_H на n . Примерный вид статической характеристики $n = f(M_H)$ систем для этого случая изображен кривой 4 на рис. 1.7. Вводя связь по нагрузке и изменяя коэффициент l_0 этой связи (например, за счет перемещения движков потенциометров R_{II} и R_{III} на рис. 1.6, а, б соответственно), можно изменять γ , а следовательно, и наклон статической характеристики систем. В частности, можно добиться, чтобы $\gamma = 0$, когда влияние нагрузки в статическом режиме полностью компенсируется и частота вращения двигателя не зависит от M_H (отклонение частоты от требуемого значения равно нулю). Значение l_0 , соответствующее этому случаю, находится из условия компенсации $\gamma = k_3 - k_1 k_2 l_0 = 0$:

$$l_0 = k_3 / k_1 k_2. \quad (1.3)$$

Статическая характеристика системы при $\gamma = 0$ представляет собой прямую, параллельную оси абсцисс (прямая 2, рис. 1.7).

В системе с принципом управления по возмущению можно добиться не только полной компенсации, но и перекомпенсации влияния возмущающего воздействия, т. е. получения отрицательных отклонений. Действительно, увеличивая напряжение, снимаемое с потенциометра R_{II} (рис. 1.6, а) и увеличивая сопротивление R_{III} , шунтирующее обмотку W_k , можно получить $l_0 > k_3 / k_1 k_2$, когда $\gamma < 0$. Статическая характеристика при этом будет иметь уже не отрицательный, а положительный наклон (кривая 1, рис. 1.7): с увеличением M_H частота вращения двигателя n возрастает.

В рассматриваемых системах алгоритм управления имеет вид:

$$u_d = k_1 u_3 + k_1 l_0 M_H, \quad (1.4)$$

т. е. управляющее воздействие u_d является простейшей функцией возмущающего воздействия M_H и характеристик управляемого объекта и усилителя.

Характеристика, достоинства и недостатки САУ с принципом управления по возмущению. В системах с принципом управления по возмущению для формирования управляющего воздействия использу-

ется непосредственная информация о возмущающем воздействии (т. е. информация о причине, вызывающей отклонение). Поэтому в этих системах возможна полная компенсация влияния возмущающего воздействия на управляемую величину, т. е. возможно достижение инвариантности (независимости) управляемой величины относительно данного возмущающего воздействия.

Рассмотренным способом можно компенсировать влияние каждого из возмущающих воздействий в отдельности. Однако на практике обычно не удается компенсировать влияние всех возмущающих воздействий, так как значительная часть воздействий не поддается измерению и при компенсации всех возмущающих воздействий получается сложная система. На практике компенсируются лишь основные возмущающие воздействия, наиболее резко влияющие на управляемую величину. В системах управления, задача которых состоит в поддержании постоянства управляемой величины (т. е. в системах стабилизации), основным возмущающим воздействием обычно является изменение нагрузки (в рассмотренных выше системах — изменение момента нагрузки M_n).

Система с принципом управления по возмущению является *разомкнутой САУ*. В ней процесс управления не зависит от результатов (управляемая величина не измеряется и не производится никаких действий, если она не соответствует требуемому значению) и наблюдается только прямое воздействие.

Из приведенной характеристики САУ с принципом управления по возмущению видно, что они обладают следующими *достоинствами*:

- 1) позволяют полностью компенсировать возмущающие воздействия, т. е. в этих системах возможно достижение инвариантности управляемой величины относительно возмущающих воздействий;
- 2) в них, как в разомкнутых системах, не возникает проблемы устойчивости.

САУ с принципом управления по возмущению присущи следующие *недостатки*:

- 1) они устраняют влияние лишь основных возмущающих воздействий, по которым созданы компенсационные каналы; появляется отклонение управляемой величины от требуемого значения с изменением второстепенных возмущающих воздействий, по которым нет компенсационных каналов;

- 2) в этих системах, как в разомкнутых, появляются отклонения управляемой величины с изменением характеристик объекта и элементов системы (см., например, выражение (1.3): при изменении k_1 , k_2 или k_3 , $\gamma \neq 0$ и поэтому $\Delta l \neq 0$);

- 3) применение принципа управления по возмущению ограничено объектами, характеристики которых известны (можно определить).

Принцип управления по задающему воздействию применяется в тех случаях, когда изменяется требуемое значение управляемой величины и основным фактором, вызывающим значительное отклонение управляемой величины от требуемого значения, является изменение задающего воздействия на входе инерционного объекта (исходной системы).

Функциональная схема САУ с принципом управления по задающему воздействию изображена на рис. 1.8. Задающее устройство ЗУ вырабатывает задающее воздействие $\alpha(t)$, в соответствии с которым должна изменяться управляемая величина $\beta(t)$ (в частном случае управляемая величина должна воспроизводить задающее воздействие). Принцип управления по задающему воздействию состоит в том, что для устранения или уменьшения отклонения управляемой величины от требуемого значения, появляющегося в связи с инерционностью объекта (исходной системы) при изменении задающего воздействия, автоматическое управляющее устройство (АУУ) формирует управляющее воздействие $\mu(t)$ из этого задающего воздействия с учетом статических и динамических характеристик объекта (системы). Под влиянием последнего управляемая величина $\beta(t)$ стремится изменяться в соответствии с изменением требуемого значения (задающего воздействия). Формирование управляющего воздействия в АУУ выполняется в соответствии с заложенным алгоритмом управления, имеющим общий вид $\mu(t) = f[\alpha(t)]$, т. е. управляющее воздействие является функцией задающего воздействия.



Рис. 1.8. Функциональная схема САУ с принципом управления по задающему воздействию.

Например, чтобы уменьшить время переходного процесса, возникающего в инерционном объекте при изменении задающего воздействия, необходимо уменьшить влияние инерционности объекта. Этого можно добиться соответствующим функциональным преобразованием задающего воздействия — введением производной от этого воздействия.

САУ с принципом управления по задающему воздействию являются разомкнутыми системами. Преимущества и недостатки, свойственные САУ с принципом управления по возмущению, как разомкнутым системам, относятся и к САУ с принципом управления по задающему воздействию.

Принцип управления по отклонению (замкнутые САУ)

Функциональная схема системы с принципом управления по отклонению управляемой величины от требуемого значения (принципом Ползунова — Уатта) изображена на рис. 1.9. Требуемое значение управляемой величины системы $\beta_{\text{тр}}(t)$ определяется задающим воздействием $\alpha(t)$, поступающим от ЗУ. В частном случае $\alpha(t) = \beta_{\text{тр}}(t)$. Отклонение управляемой величины $\beta(t)$ от требуемого значения может быть вызвано как влиянием различного рода возмущающих воздействий (на рис. 1.9 показано одно воздействие $L(t)$), так и изменением задающего воздействия $\alpha(t)$. Чтобы уменьшить или устранить это отклонение, нужно выработать соответствующее управляющее воздействие $\mu(t)$ и подать его на вход управляемого объекта УО. Управляющее воздействие при использовании принципа управления по отклонению вырабатывается в результате преобразования отклонения $\theta(t)$ управляемой величины от требуемого значения.

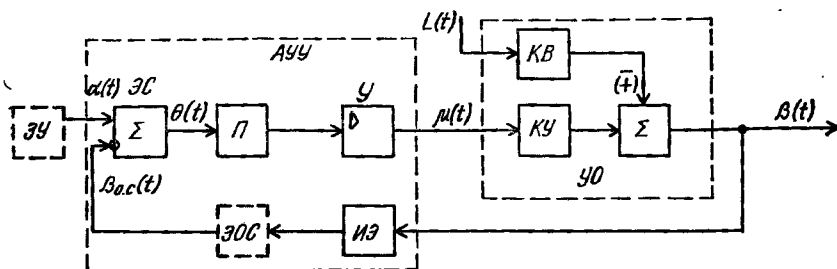


Рис. 1.9. Функциональная схема САУ с принципом управления по отклонению.

Принцип управления по отклонению состоит в том, что измеряется управляемая величина, сравнивается с требуемым значением (заданием воздействием) и выявляющееся при этом отклонение преобразуется в управляющее воздействие; последнее, влияя на объект, стремится уменьшить или устранить это отклонение.

В состав системы (рис. 1.9) входят следующие элементы:

1. Измерительный элемент ИЭ, который подключается к выходу УО и измеряет управляемую величину $\beta(t)$. Измеренное значение этой величины $\beta_{о.с}(t)$ подается на элемент сравнения.

2. Элемент сравнения ЭС, который сравнивает измеренное значение управляемой величины $\beta_{о.с}(t)$ с задающим воздействием (заданием воздействием) и определяет отклонение (сигнал рассогласования) между ними: $\theta_k(t) = \alpha(t) - \beta_{о.с}(t)$. Инвертирующий вход элемента сравнения означает, что сигнал $\beta_{о.с}(t)$ вычитается.

3. Преобразователь П, в котором при соответствующем преобразовании отклонения, учитывающем характеристики объекта и элементов системы, формируется управляющее воздействие. В простейшем случае управляющее воздействие может быть величиной, пропорциональной отклонению. В общем случае алгоритм управления является более сложной функцией, предусматривающей введение в управляющее воздействие как производных, так и интегралов от отклонения. Преобразователь выполняется в виде различного рода корректирующих устройств. В зависимости от степени сложности необходимого преобразования сигнала рассогласования корректирующее устройство может быть либо простейшей электрической цепью, либо сравнительно сложным электронным вычислительным устройством.

4. Усилитель У, обеспечивающий усиление выходной величины преобразователя до значения, достаточного для поддержания требуемого режима работы объекта.

5. Управляемый объект УО, в котором происходит процесс, подлежащий управлению.

Измерительный элемент, элемент сравнения, преобразователь и усилитель образуют автоматическое управляющее устройство. Как следует из изложенного, АУУ, измеряя отклонение $\theta(t)$ и соответствующим образом преобразуя его, вырабатывает управляющее воздействие $\mu(t)$. Последнее, будучи приложено к управляемому объекту, изменя-

ет управляемую величину таким образом, что отклонение $\theta(t)$ уменьшается.

Алгоритм управления САУ имеет вид $\mu(t) = f[\theta(t)]$, т. е. управляющее воздействие является функцией отклонения $\theta(t)$ управляемой величины.

Измерительный элемент, который измеряет управляемую величину на выходе объекта и подает ее на элемент сравнения (вход системы), образует *главную обратную связь системы*. Иногда в цепь главной обратной связи наряду с ИЭ включаются и другие элементы (элементы обратной связи ЭОС), осуществляющие усиление или необходимое преобразование управляемой величины. Сигнал, поступающий с выхода главной обратной связи на вход (элемент сравнения) системы, называется *сигналом главной обратной связи*, а разность между задающим воздействием и сигналом главной обратной связи называется *сигналом ошибки*. Поскольку основной особенностью систем с принципом управления по отклонению является наличие обратной связи, этот принцип называют также принципом обратной связи. Поскольку в САУ с принципом управления по отклонению управляемая величина через главную обратную связь поступает на элемент сравнения (на вход системы), то САУ с принципом управления по отклонению является *замкнутой системой*, процесс управления в которой зависит от его результатов.

Первыми промышленными САУ с принципом управления по отклонению были автоматический регулятор уровня воды в котле паровой машины, изобретенный И. И. Ползуновым (1765 г.), и центробежный регулятор частоты вращения вала паровой машины Уатта (1784 г.).

Пример системы с принципом управления по отклонению и ее анализ в статическом режиме. Примером САУ с принципом управления по отклонению является система управления частотой вращения ротора электродвигателя (рис. 1.10, а). В этой системе управляемым объектом является электродвигатель M , а управляемой величиной — частота вращения n его ротора. Частота вращения ротора измеряется с помощью тахогенератора BR , напряжение $u_{o.c}$ которого пропорционально n . Значение $u_{o.c}$ через обратную связь подается на ЭС, где сравнивается с задающим воздействием — напряжением u_z , снимаемым с потенциометра R (задающего устройства). Разность напряжений $\Delta u = u_z - u_{o.c}$ подается на вход усилителя (обмотку управления W_y ЭМУ), усиливается и подается на электродвигатель M . Под влиянием входного напряжения u_d (управляющего воздействия) частота вращения электродвигателя изменяется так, что ее отклонение от требуемого значения, вызванное тем или иным возмущающим воздействием (например, изменением момента нагрузки M_H), умень-

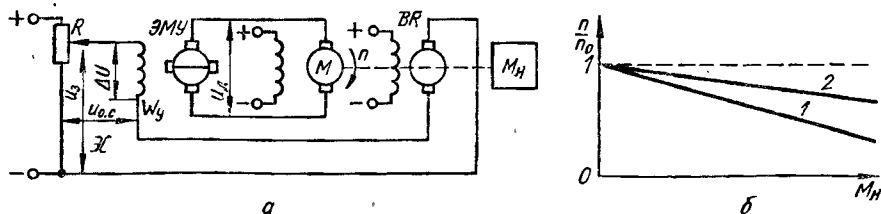


Рис. 1.10. Принципиальная схема (а) и статические характеристики (б) системы автоматического управления частотой вращения электродвигателя с принципом управления по отклонению.

пается. Требуемое значение частоты вращения ротора электродвигателя задают подбором соответствующего напряжения u_3 , снимаемого с потенциометра R .

Рассмотрим, как система уменьшает отклонение частоты вращения ротора электродвигателя при изменении момента его нагрузки. Пусть увеличился M_H . Вследствие этого уменьшится частота вращения ротора электродвигателя. Вместе с этим уменьшится и напряжение $u_{o.c.}$ тахогенератора BR , что приведет к увеличению разности напряжений Δu . В результате увеличится напряжение u_d на входе электродвигателя, а следовательно, и его частота вращения, которая стремится к прежнему значению. Аналогично можно показать, как данная система стабилизирует скорость вращения электродвигателя при уменьшении M_H .

Чтобы убедиться в стабилизирующих свойствах системы, определим аналитическую зависимость $n = f(M_H)$ в установившемся режиме. Для этого запишем уравнения элементов системы в этом режиме:

$$\text{элемента сравнения } \Delta u = u_3 - u_{o.c.};$$

$$\text{электромашинного усилителя } u_d = k_1 \Delta u;$$

$$\text{электродвигателя } n = k_2 u_d - k_3 M_H; \quad (1.5)$$

$$\text{тахогенератора } u_{o.c.} = k_4 n,$$

где k_1, k_2, k_3, k_4 — коэффициенты усиления элементов. Исключая промежуточные переменные Δu и u_d , находим выражение для статической характеристики системы

$$n = n_0 - \gamma M_H, \quad (1.6)$$

где

$$n_0 = \frac{k_1 k_2}{1 + k_p} u_3; \quad \gamma = \frac{k_3}{1 + k_p};$$

$k_p = k_1 k_2 k_3$ — коэффициент усиления системы в разомкнутом состоянии.

Из формулы (1.6) видно, что поскольку $\gamma \neq 0$, то частота вращения электродвигателя n изменяется с изменением момента нагрузки M_H . Отклонение частоты вращения $\Delta n_0 = \gamma M_H = k_3 M_H / (1 + k_p)$. Возникает вопрос, какую же роль играет АУУ, если n изменяется с изменением M_H как без АУУ, так и при включении последнего. Сравнивая выражения для статических характеристик САУ (1.6) и одного электродвигателя (1.5), видим, что при включении АУУ уменьшается влияние M_H на n (уменьшается отклонение) в $k_3/\gamma = 1 + k_p$ раз. При этом, как видно из рис. 1.10, б, где изображены статические характеристики двигателя без АУУ (кривая 1) и с АУУ (кривая 2), уменьшается наклон статической характеристики. Она приближается к горизонтальной, т. е. становится более «жесткой».

В рассматриваемом примере управляющее воздействие $u_d = k_1 \Delta u$, т. е. оно пропорционально отклонению управляемой величины от требуемого значения. При таком алгоритме управления, как показал анализ, отклонение Δn в установившемся статическом режиме при включении АУУ только уменьшается. Для полного устранения отклонения в установившемся режиме и его уменьшения в переходном режиме управляющее воздействие должно быть более сложной функцией отклонения, зависящей не только от его значения и знака, но и от его интегралов и производных.

Характеристика, достоинства и недостатки САУ с принципом управления по отклонению. В САУ с принципом управления по отклонению управляющее воздействие получается в результате преобразования отклонения, которое может быть вызвано различными факторами. Поэтому в этих системах уменьшается отклонение независимо от того, какими из факторов оно вызвано. Напомним, что в САУ с принципом управления по возмущению уменьшаются или устраняются отклонения, вызываемые только теми факторами, по которым имеются компенсационные связи.

Поскольку в системах с принципом управления по отклонению уменьшаются отклонения, возникающие и при изменении параметров элементов системы, то замкнутые системы будут менее чувствительны

к изменениям параметров ее элементов по сравнению с разомкнутыми системами, где отклонения, вызываемые изменением параметров их элементов, не компенсируются.

В системах с принципом управления по отклонению управляющее воздействие получается в результате преобразования сигнала отклонения, а не самого фактора, вызвавшего отклонение, например, возмущающего воздействия (т. е. в результате преобразования следствия, а не самой причины), поэтому оно не может оказать на объект обратное влияние без запаздывания по сравнению с возмущающим воздействием. Следовательно, принцип управления по отклонению не дает возможности полного устранения отклонения, т. е. достижения абсолютной инвариантности. Этот вывод не относится к системам с принципом управления по отклонению, в которых осуществляется косвенное измерение возмущающего (задающего) воздействия с помощью дифференциальных «вилки» [18, 22] или введены специальные связи:

Системы с принципом управления по отклонению обладают следующими достоинствами:

1) уменьшают отклонение управляемой величины от требуемого значения независимо от того, какими факторами (внешними возмущающими воздействиями, изменением параметров элементов системы, изменением задающего воздействия) оно вызвано;

2) менее чувствительны к изменениям параметров элементов системы, по сравнению с разомкнутыми системами.

Системам с принципом управления по отклонению присущи следующие недостатки:

1) в простых одноконтурных системах с принципом управления по отклонению нельзя достичь абсолютной инвариантности;

2) в системах с принципом управления по отклонению, как в замкнутых системах, возникает проблема устойчивости.

Благодаря существенным преимуществам системы с принципом управления по отклонению нашли широкое распространение в технике. Основное внимание в данной книге будет уделено исследованию этих систем.

Принцип комбинированного управления.

Пример комбинированной системы и ее анализ в статическом режиме

В технике широко применяют САУ с принципом комбинированного управления, сочетающим принципы управления по отклонению и по возмущению — комбинированные системы. В комбинированных системах принцип управления по отклонению реализуется с помощью главной обратной связи, а принцип управления по возмущению — с помощью компенсационных связей. Если наиболее существенная ошибка вызывается возмущающим воздействием $L_1(t)$, то вводится связь по этому возмущению СВ (рис. 1.11, а), если же такая ошибка получается из-за изменения задающего воздействия $\alpha(t)$, то связь по задающему воздействию СЗВ (рис. 1.11, б). В первом случае алгоритм управления имеет вид $\mu(t) = f[\theta(t), L(t)]$, т. е. управляющее

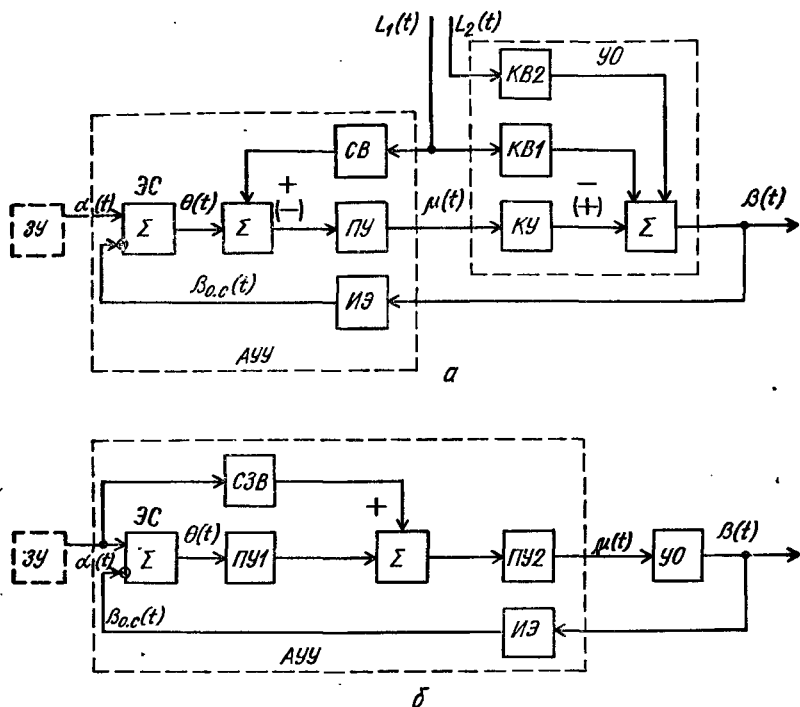


Рис. 1.11. Функциональные схемы комбинированных САУ со связью по возмущению $L(t)$ (а) и со связью по задающему воздействию $\alpha(t)$ (б).

воздействие является функцией отклонения и возмущающего воздействия. Во втором случае $\mu(t) = f[\theta(t), \alpha(t)]$, т. е. управляющее воздействие получается в результате преобразования отклонения и задающего воздействия. В общем случае в системе возможны компенсационные связи как по возмущающему, так и по задающему воздействиям, когда для формирования управляющего воздействия используется отклонение, возмущающее и задающее воздействия: $\mu(t) = f[\theta(t), L(t), \alpha(t)]$.

В комбинированных системах компенсационная связь по основному возмущению (задающему воздействию) устраняет составляющую ошибки, вызываемую этим возмущением (изменением задающего воздействия), а в результате действия обратной связи уменьшаются ошибки, вызываемые второстепенными возмущающими воздействиями, по которым нет компенсационных связей. Если с помощью компенсационных связей не полностью устраняются ошибки, вызываемые основными возмущающими (задающими) воздействиями, то остаточные ошибки также уменьшаются с помощью обратной связи.

Основы теории и методы построения комбинированных систем автоматического управления разработаны советскими учеными В. С. Кулебакиным, А. Г. Ивахненко, Б. Н. Петровым, А. И. Кухтенко, Г. М. Улановым и др.

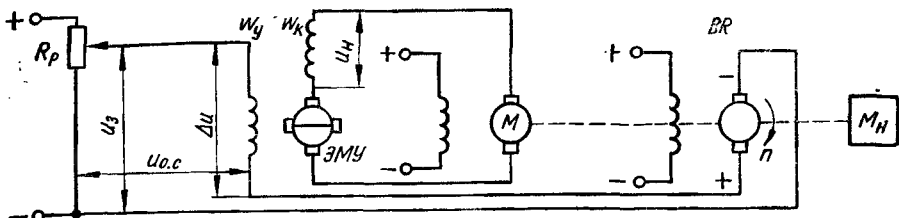


Рис. 1.12. Упрощенная принципиальная схема системы автоматического управления частотой вращения электродвигателя с принципом комбинированного управления.

Примером комбинированной системы является система автоматического управления частотой вращения электродвигателя (рис. 1.12). В этой системе компенсационная связь по основному возмущающему воздействию (моменту нагрузки M_H) осуществляется компенсационной обмоткой W_k ЭМУ, а обратная связь — с помощью тахогенератора BR .

Найдем зависимость $n = f(M_H)$ в установившемся режиме, для чего запишем уравнения элементов системы: компенсационной связи (напряжение, выделяющееся на компенсационной обмотке W_k ЭМУ) $u_n = l_0 M_H$;

элемента сравнения ЭС $\Delta u = u_3 - u_{o.c}$;

схемы суммирования ЭМУ $u_\Sigma = \Delta u + l_0 M_H$;

ЭМУ $u_d = k_1 u_\Sigma$;

электродвигателя $n = k_2 u_d - k_3 M_H$;

тахогенератора $u_{o.c} = k_4 n$.

Исключая из этих уравнений промежуточные переменные u_Σ и u_d , получаем искомую зависимость

$$n = n_0 - \gamma M_H, \quad (1.7)$$

где

$$n_0 = \frac{k_1 k_2}{1 + k_p} u_3; \quad \gamma = \frac{k_3 - k_1 k_2 l_0}{1 + k_p}; \quad (1.8)$$

$k_p = k_1 k_2 k_4$ — коэффициент усиления замкнутой части системы в разомкнутом состоянии.

Отклонение управляемой величины от требуемого значения составит:

$$\Delta n_K = \gamma M_H = \frac{k_3 - k_1 k_2 l_0}{1 + k_p} M_H. \quad (1.9)$$

Из формулы (1.8) следует, что изменяя l_0 , можно изменять γ и соответственно наклон статической характеристики системы, или отклонение Δn_K . При соответствующем выборе коэффициента компенсационной связи l_0 значение коэффициента γ может быть уменьшено до нуля. При этом полностью компенсируется влияние M_H на n в установившемся режиме. Значение l_0 для этого случая находится из условия компенсации M_H в установившемся режиме:

$$\gamma = k_3 - k_1 k_2 l_0 = 0, \quad (1.10)$$

$$l_0 = k_3 / k_1 k_2. \quad (1.11)$$

Статическая характеристика системы при $\gamma = 0$ представляет собой прямую, параллельную оси абсцисс. Как и в системах с принципом управления по возмущению, в комбинированных системах имеется возможность перекомпенсации возмущающего воздействия. В рассматриваемой системе перекомпенсация влияния нагрузки возможна, если $l_0 > k_3 / k_1 k_2$.

При изменении параметров системы (k_1, k_2, k_3, l_0) или неточном их определении условие компенсации (1.10) нарушается и связь по возмущению не будет уже пол-

ностью устраняя ошибку в установившемся режиме, вызываемую этим возмущением. Однако в отличие от системы с принципом управления по возмущению (рис. 1.6, б), в которой недокомпенсированная часть ошибки $\Delta n_B = (k_3 - k_1 k_2 l_0) M_H$ (см. формулу (1.2)) не уменьшается, в комбинированной системе эта остаточная ошибка в соответствии с выражением (1.9) уменьшается еще в $(1 + k_p)$ раз благодаря действию обратной связи:

$$\Delta n_K = (k_3 - k_1 k_2 l_0) M_H / (1 + k_p) = \Delta n_B / (1 + k_p).$$

Отклонения, вызываемые возмущающими воздействиями (изменением задающего воздействия), по которым нет компенсационных связей, в комбинированной системе также будут уменьшаться в $(1 + k_p)$ раз за счет замкнутой ее части. В этом можно убедиться, если, например, в выражении (1.9) для отклонения, вызываемого нагрузкой, принять $l_0 = 0$, что означает отсутствие компенсационной связи по этому возмущающему воздействию.

В рассматриваемом примере напряжение на входе двигателя $u_d = k_1 \Delta u + k_1 l_0 M_H$, т. е. управляющее воздействие, является суммой величин, пропорциональных отклонению и возмущающему воздействию. При таком алгоритме управления, как убедились, может полностью устраняться ошибка, вызываемая основным возмущающим воздействием, и уменьшаются в $(1 + k_p)$ раз ошибки, вызываемые второстепенными возмущающими воздействиями только в установившемся режиме при $M_H = \text{const}$. Чтобы получить более высокую точность системы и при изменяющемся M_H , управляющее воздействие должно быть более сложной функцией возмущающего воздействия и ошибки, учитывающей динамические характеристики элементов системы.

Характеристика САУ с принципом комбинированного управления. Для формирования управляющего воздействия в комбинированных системах используется как непосредственная информация об основных возмущающих воздействиях (изменении задающего воздействия), так и отклонение управляемой величины от требуемого значения, вызываемое всеми возмущающими воздействиями (изменением задающего воздействия). Благодаря этому:

1) в комбинированных системах с помощью компенсационных связей возможно достижение полной компенсации ошибок, вызываемых основными возмущающими и задающим воздействиями (возможно достижение инвариантности);

2) наряду с возможностью полной компенсации ошибок, вызываемых основными воздействиями, в комбинированных системах с помощью обратной связи уменьшаются ошибки, вызываемые второстепенными возмущающими воздействиями, по которым нет компенсационных связей, а также недокомпенсированные ошибки от основных воздействий;

3) при нарушении условий компенсации возмущающего воздействия возникающая ошибка уменьшается замкнутой системой (см. формулу (1.9)), т. е. комбинированные системы менее чувствительны к изменениям параметров разомкнутых каналов, чем разомкнутые САУ;

4) благодаря наличию разомкнутых компенсационных каналов в комбинированных системах не так остро стоит проблема устойчивости, как в замкнутых САУ.

Таким образом, комбинированные САУ являются наиболее совершенными системами, обладающими высокой точностью управления.

На рассмотренных принципах строятся не только технические системы автоматического управления, но также и системы управления

в обществе и регуляционные системы в живых организмах. Поэтому методы исследования технических систем автоматического управления в определенной мере могут быть использованы для исследования систем управления в обществе и живой природе.

1.3. Классификация систем автоматического управления. Примеры

Системы автоматического управления целесообразно классифицировать исходя из наиболее общих признаков и их свойств. Такая классификация облегчает изучение и исследование САУ.

Классификация САУ по алгоритмам функционирования

Каждая автоматическая система характеризуется алгоритмом функционирования — совокупностью предписаний, определяющих характер изменения управляемой величины в зависимости от воздействия. По алгоритмам функционирования САУ делятся на стабилизирующие, программные, следящие и преобразующие системы.

Стабилизирующие автоматические системы. Алгоритм функционирования системы: *поддержание с необходимой точностью постоянства (стабилизация) одной или нескольких управляемых величин при произвольно меняющихся возмущающих воздействиях.* Задающее воздействие системы — постоянная величина, т. е. $\alpha(t) = \text{const}$.

Примерами стабилизирующих систем с принципом управления по возмущению и отклонению, а также с принципом комбинированного управления являются рассмотренные ранее стабилизирующие системы скорости вращения электродвигателя (см. рисунки 1.6, 1.10 и 1.12). Нагрузка управляемого объекта (момент нагрузки на валу электродвигателя, нагрузка генератора) в стабилизирующих системах обычно является основным возмущающим воздействием, наиболее резко влияющим на управляемую величину.

Примером стабилизирующей системы может также служить *система частотной автоподстройки (ЧАП)* (рис. 1.13, а), используемая для стабилизации промежуточной частоты в радиоприемных устройствах при произвольном изменении частоты $\omega_c(t)$ принимаемого сигнала. При поступлении на смеситель *СМ* напряжения сигнала с частотой $\omega_c(t)$ и напряжения управляемого генератора *УГ* с частотой $\omega_r(t)$ на его выходе возникает напряжение промежуточной частоты $\omega_{\text{пр}}(t) = \omega_c(t) - \omega_r(t)$. Это напряжение усиливается усилителем промежуточной частоты *УПЧ* и поступает на последующие элементы приемного устройства, а через обратную связь — на частотный дискриминатор *ЧД*. Последний настроен на номинальное значение промежуточной частоты $\omega_{\text{пр}_0}$, соответствующее частоте настройки контуров *УПЧ* приемника. Частота настройки *ЧД* $\omega_{\text{пр}_0} = \text{const}$ в рассматриваемой системе является задающим воздействием. *ЧД* преобразует отклонение промежуточной частоты от заданного значения $\Delta\omega(t) = \omega_{\text{пр}_0} - \omega_{\text{пр}}(t)$ в напряжение $u_{\text{чд}}$ в соответствии со своей статической характеристикой (рис. 1.13, б). На схеме *ЧД* представлен в виде последовательного соединения элемента сравнения *ЭС*, выполняющего функцию вычитания $\Delta\omega(t) = \omega_{\text{пр}_0} - \omega_{\text{пр}}(t)$, и преобразователя *ЧД* отклонения $\Delta\omega(t)$ промежуточной частоты от заданного значения в напряжение $u_{\text{чд}}$. С помощью первоначальной настройки управляемого генератора *УГ* (например, подачей напряжения установки $u_{\text{уст}}$) устанавливают частоту напряжения на его выходе, равную ω_{r_0} , при напряжении на управляющем элементе *УГ* $u_y = 0$. Значение ω_{r_0} выбирают из условия $\omega_{\text{пр}_0} = \omega_{c_0} - \omega_{r_0}$, где ω_{c_0} — средняя частота диапазона изменения частоты $\omega_c(t)$

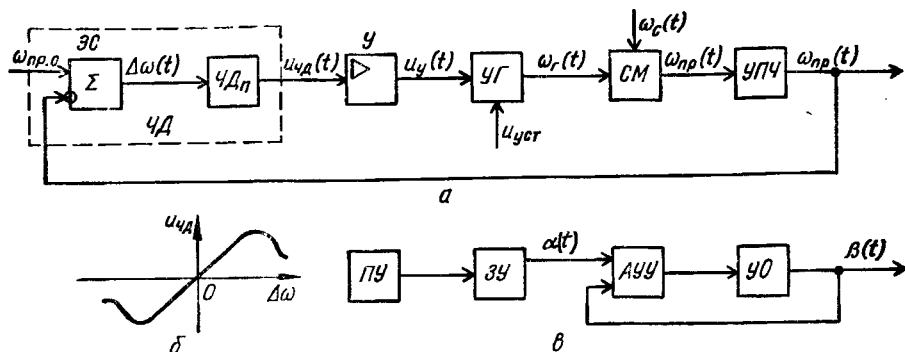


Рис. 1.13. Функциональные схемы:

а — системы частотной автоподстройки; *б* — статическая характеристика частотного дискриминатора; *в* — программной системы.

сигнала. В этом случае, если $\omega_c(t) = \omega_{c0}$, то $\omega_{пр} = \omega_{c0} - \omega_{r0} = \omega_{пр0}$, т. е. промежуточная частота точно равна частоте настройки ЧД и поэтому на выходе ЭС $\Delta\omega(t) = 0$, $u_{чд} = 0$. Система находится в состоянии равновесия. При отклонении $\omega_c(t)$ от ω_{c0} на $\Delta\omega_c(t)$ [$\omega_c(t) = \omega_{c0} + \Delta\omega_c(t)$] произойдет изменение промежуточной частоты на $\Delta\omega_c(t)$: $\omega_{пр}(t) = \omega_{c0} + \Delta\omega_c(t) - \omega_{r0} = \omega_{пр0} + \Delta\omega_c(t)$. На выходе ЭС возникает отклонение (ошибка) $\Delta\omega(t) = \omega_{пр0} - \omega_{пр}(t) = -\Delta\omega_c(t)$, которое преобразуется в напряжение $u_{чд}$, усиливается усилителем У, и в виде управляющего напряжения u_y поступает на управляющий элемент УГ. Под влиянием u_y частота $\omega_r(t)$ напряжения генератора изменяется таким образом, что $\Delta\omega(t)$ уменьшается. Возмущающим воздействием в данной системе является изменение частоты $\omega_c(t)$ сигнала, а управляемой величиной — значение промежуточной частоты.

Программные автоматические системы. Алгоритм функционирования системы: *изменение управляемой величины с необходимой точностью в соответствии с заранее составленной программой*. Задающее воздействие системы $\alpha(t) = F_n(t)$, где $F_n(t)$ — программа, заранее известная функция времени.

Программную систему можно рассматривать как стабилизирующую систему, в которой задача стабилизации усложняется задачей изменения управляемой величины по заданной программе. Изменение управляемой величины по программе достигается добавлением к стабилизирующей системе некоторого элемента — программного устройства ПУ (рис. 1.13, б), изменяющего задающее воздействие $\alpha(t)$ во времени по определенному закону. Для задания программы могут служить профилированные кулачки, электрические функциональные потенциометры, перфокарты, перфоленты и т. д. Примерами программных систем являются системы управления металлургическими, химическими и другими процессами, системы программного управления станками, системы программного управления выводом спутников Земли на расчетные орбиты, системы управления полетом самолета-снаряда, ракеты по заданному курсу и т. п.

Следящие автоматические системы. Алгоритм функционирования системы: *изменение управляемой величины с необходимой точностью в соответствии с заранее неизвестной функцией времени, определяемой*

задающим воздействием: $\alpha(t) = F(t)$, где $F(t)$ — заранее неизвестная функция времени. Таким образом, следящая система, как и программная система, *воспроизводит задающее воздействие*. Однако это воздействие в следящей системе изменяется не по заранее заданной программе, а произвольно. Например, антенна радиолокатора поворачивается, следуя за самолетом, траектория движения которого заранее неизвестна, т. е. «следит» за ним. Отсюда происходит и название следящей системы.

Задающие воздействия и управляемые величины следящих систем могут иметь разнообразный характер по своей физической природе. Причем управляемая величина по своей физической природе может отличаться от задающего воздействия. Например, задающим воздействием может быть изменяющееся напряжение, а управляемой величиной — напряжение, угловое или линейное перемещение, частота вращения, частота напряжения и т. д. В системе автоматического сопровождения цели по дальности радиолокационной станции задающим воздействием является дальность до цели, а выходной управляемой величиной — напряжение, значение которого пропорционально дальности.

Широко распространены *следящие системы пространственного слежения*, т. е. системы, воспроизводящие задающее воздействие в виде механического перемещения. К ним относятся синхронно следящие системы (синхронно следящие приводы, силовые следящие приводы), которые обеспечивают синхронное и синфазное вращение механически не связанных между собой валов..

В качестве примеров следящих систем рассмотрим синхронно следящую систему и систему фазовой автоподстройки частоты.

Синхронно следящая система (рис. 1.14, а). В состав системы входят сельсины *BC* и *BE*, работающие в трансформаторном режиме, фазовый дискриминатор *ФД*, электромашинный усилитель мощности *ЭМУ*, исполнительный двигатель *М*, редуктор *Ред* и рабочий механизм *РМ*, вал которого *ПВ* должен следить за поворотом ведущего вала *ВВ*.

Сельсины в трансформаторном режиме выполняют функцию элемента сравнения. Ротор сельсин-датчика *BC* механически связан с ведущим валом *ВВ*, а ротор сельсин-приемника *BE* — с приемным (ведомым) валом *ПВ* (с осью рабочего механизма, например, с осью кабины радиолокационной станции). Благодаря этому на сельсины как на элемент сравнения поступают задающее воздействие (угол α поворота ведущего вала) и управляемая величина (угол β поворота приемного вала). Сельсины выявляют угол рассогласования θ между ведущим и приемными валами и преобразуют его в напряжение несущей частоты $u_{\text{сн}}$, величина сгибающей которой при малых углах рассогласования пропорциональна углу рассогласования, а фаза несущей частоты определяется знаком этого угла. Если угол рассогласования θ относительно согласованного положения является положительным, то напряжение несущей частоты $u_{\text{сн}}$ совпадает по фазе с напряжением питания $u_{\text{пит}}$. При отрицательном угле рассогласования напряжение несущей частоты находится в противофазе с напряжением питания (рис. 1.14, б).

Будем считать, что положительное значение сгибающей модулированного напряжения несущей частоты соответствует случаю, когда напряжение несущей частоты совпадает по фазе с напряжением питания, а отрицательное значение сгибающей — случаю, когда напряжение несущей частоты находится в противофазе с напряжением питания. Тогда можно утверждать, что сигнал рассогласования следящей системы на выходе сельсин-приемника выражен огибающей модулированного по амплитуде напряжения несущей частоты (рис. 1.14, б).

Напряжение сигнала рассогласования в следящей системе усиливается. В данной системе для этого применен электромашинный усилитель мощности ЭМУ, т. е. усилитель с входом на постоянном токе. Поскольку на вход ЭМУ необходимо подавать сигнал постоянного тока, то модулированное по амплитуде напряжение несущей частоты с выхода ВЕ нужно предварительно демодулировать, т. е. получить реверсивную огибающую без заполнения несущей частотой. Для этой цели служит фазовый дискриминатор ФД. Фазовый дискриминатор в соответствии со своей статической характеристикой (рис. 1.14, в) преобразует модулированное по амплитуде напряжение несущей частоты в напряжение постоянного тока $u_{\text{фд}}$, величина которого пропорциональна огибающей входного напряжения, а полярность определяется фазой напряжения несущей частоты (рис. 1.14, б). Фазовый дискриминатор выполнен на транзисторах VT1 и VT2. Опорное напряжение подается в фазе на коллекторы, а напряжение $u_{\text{сп}}$ в противофазе между базой и эмиттером. Диод VD1 служит для исключения прямых неуправляемых токов коллектора — к коллекторам транзисторов прикладываются только отрицательные полупериоды опорного напряжения, в течение которых коллекторный ток i_k зависит от тока сигнала в цепи эмиттер — база, т. е. ток i_k управляем. Коллекторные токи транзисторов протекают через плечи I и II обмотки управления W_y ЭМУ в противоположных направлениях.

С выхода ЭМУ напряжение подается на исполнительный двигатель постоянного тока, который через редуктор Р связан с приемным валом ПВ и осью сельсин-приемника ВЕ. На приемном валу находится собственно управляемый объект — рабочий механизм РМ (например, антенна РЛС, кабина РЛС, шпиндель токарного станка). В следящей системе управляемым объектом является исполнительный двигатель М. Собственно управляемый объект является нагрузкой для исполнительного двигателя.

Рассмотрим работу следящей системы. При идентичном положении ведущего и приемного валов угол рассогласования между ними равен нулю. Роторы сельсинов ВС и ВЕ находятся во взаимно перпендикулярном, т. е. в согласованном положении. Выходное напряжение ВЕ равно нулю. Средние значения коллекторных токов транзисторов VT1 и VT2 равны между собой. Поскольку эти токи протекают через плечи I и II обмотки управления ЭМУ в противоположных направлениях, то результирующий магнитный поток обмотки управления равен нулю. Равно нулю и выходное напряжение ЭМУ. Двигатель и вся система находятся в состоянии покоя.

Допустим, что ведущий вал повернулся на некоторый угол. В результате этого появился угол рассогласования $\theta(t) = \alpha(t) - \beta(t)$, где $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ — углы поворота ведущего и приемного валов. В однофазной обмотке ВЕ возникло напряжение сигнала ошибки переменного тока $u_{\text{сп}}(t)$ (рис. 1.14, б). Поскольку напряжение $u_{\text{сп}}(t)$ поступает между базой и эмиттером транзисторов VT1 и VT2 в противофазе, то при угле рассогласования данного знака коллекторный ток транзистора, у которого напряжения коллектор — эмиттер и база — эмиттер в фазе, возрастает, а коллекторный ток другого транзистора, у которого эти напряжения находятся в противофазе, уменьшается. Равенство магнитных потоков, создаваемых в плечах I и II обмотки управления, нарушается, возникает результирующий магнитный поток управления, а следовательно, и напряжение на выходе ЭМУ. Направление результирующего магнитного потока и полярность напряжения ЭМУ зависят от фазы несущей частоты напряжения сигнала ошибки на входе ФД, т. е., в конечном счете, от знака угла рассогласования. Выходное напряжение ЭМУ является управляющим воздействием. При его поступлении на двигатель последний приводится во вращение и через редуктор поворачивает приемный вал и ротор ВЕ в сторону уменьшения угла рассогласования до тех пор, пока этот угол не станет равным нулю.

В рассматриваемой следящей системе использован принцип управления по отклонению: управляемая величина β через обратную связь (редуктор) подается на элемент сравнения (сельсин), где сравнивается с задающим воздействием α , в результате чего выявляется отклонение θ между величинами α и β . Последнее используется для управления работой системы. Основным фактором, вызывающим значительное отклонение управляемой величины от задающего воздействия, в следящей системе является изменение задающего воздействия.

В статическом режиме, когда задающее воздействие не изменяется ($\alpha(t) = \text{const}$), следящая система поддерживает постоянство управляемой величины, следовательно, сначала решается задача стабилизации, а затем путем присоединения устройства

для изменения задающего воздействия система может быть превращена в программную, или следящую, систему.

Система фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ) изменяет частоту $\omega_r(t)$ и напряжения $u_r(t)$ управляемого генератора УГ в соответствии с изменением частоты $\omega_c(t)$ входного сигнала $u_c(t)$ (рис. 1.14, а). В отличие от системы ЧАП (рис. 1.13, а) в системе ФАПЧ для управления частотой и фазой напряжения на выходе УГ используется не разность частот, а разность фаз напряжений $u_c(t)$ и $u_r(t)$ на входе и выходе системы. Задающим воздействием системы является фаза $\alpha(t)$ входного напряжения $u_c(t)$, а управляемой величиной — фаза $\beta(t)$ выходного напряжения системы (управляемого генератора) $u_r(t)$. Напряжения $u_c(t)$ и $u_r(t)$ поступают на фазовый дискриминатор ФД, который преобразует разность их фаз $\theta(t) = \alpha(t) - \beta(t)$ в напряжение $u_{фд}(t)$ в соответствии со своей статической характеристикой (рис. 1.14, б). На рисунке ФД представлен в виде последовательного соединения элемента сравнения ЭС, который выполняет функцию вычитания фаз, и преобразователя ФДп разности фаз $\theta(t)$ в напряжение $u_{фд}(t)$. Напряжение $u_{фд}(t)$ сглаживается фильтром Ф и через усилитель-преобразователь УП в виде управляющего напряжения $u_y(t)$ поступает на УГ. Под влиянием $u_y(t)$ частота $\omega_r(t)$ и напряжения $u_r(t)$ на выходе УГ становится равной частоте входного напряжения $\omega_c(t)$, а разность фаз $\theta(t)$ уменьшается. При изменении $\omega_c(t)$ частота $\omega_r(t)$ изменяется в соответствии с изменением $\omega_c(t)$.

Преобразующие автоматические системы. Алгоритм системы: *преобразование с необходимой точностью задающего воздействия $\alpha(t)$ (совокупности задающих воздействий) в управляемую величину $\beta(t)$ (совокупность управляемых величин) в соответствии с некоторой функцией преобразования H : $\beta(t) = H\alpha(t)$* . Преобразующая система должна возможно более точно воспроизводить на своем выходе не само задающее воздействие $\alpha(t)$ (как следящая система), а некоторую величину, связанную с управляющим воздействием функций преобразования H . К преобразующим системам относятся, например, интегрирующие, дифференцирующие, экстраполирующие и другие системы автоматического управления.

Классификация САУ по свойствам в установившемся режиме

По свойствам в установившемся режиме САУ делятся на статические и астатические.

1. **Статическая система** — это система, в которой при возмущающем (задающем) воздействии, стремящемся к постоянной величине, отклонение управляемой величины также стремится к постоянной величине, зависящей от этого воздействия.

Примером статической системы является система стабилизации частоты n вращения электродвигателя с принципом управления по отклонению (рис. 1.10, а), так как в ней n при изменении момента нагрузки M_n стремится к заданному значению, но не достигает его на величину статической ошибки, зависящей от M_n . Действительно, в соответствии с формулой (1.6) отклонение $\Delta n_0 = \gamma M_n$. Поскольку $\gamma = k_3/(1 + k_p) \neq 0$, то отклонение частоты Δn_0 также не равно нулю и его значение зависит от M_n .

Показателем точности установившегося режима по отношению к возмущению является коэффициент статизма системы стабилизации, равный тангенсу угла наклона статической характеристики (рис. 1.15):

$$\operatorname{tg} \alpha = \Delta n_0 / \Delta M_n = -\gamma = -k_3 / (1 + k_p).$$

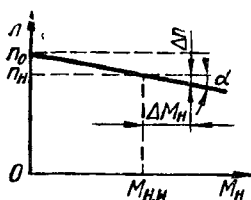


Рис. 1.15. Статическая характеристика статической системы.

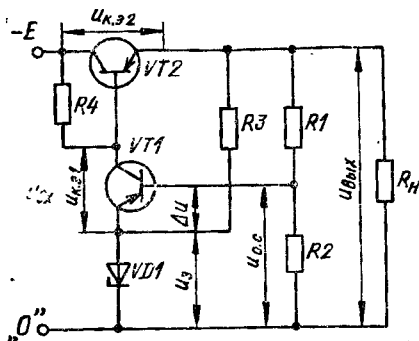


Рис. 1.16. Принципиальная схема стабилизатора напряжения на транзисторах.

Из приведенной формулы видно, что коэффициент статизма, а следовательно, и ошибка Δn_0 системы уменьшается с увеличением коэффициента усиления системы k_p в разомкнутом состоянии.

Из выражения (1.6) видно, что в режиме холостого хода ($M_H = 0$) управляемая величина ($n = n_0$) пропорциональна значению задающего воздействия u_3 . Наклон же статической характеристики не зависит от u_3 . Поэтому, изменяя u_3 , можно перемещать статическую характеристику параллельно себе в вертикальном направлении. Обычно u_3 выбирают таким образом, чтобы управляемая величина точно соответствовала требуемому (номинальному) значению ($n = n_H$) не в режиме холостого хода, а при номинальной нагрузке ($M_H = M_{HH}$), как показано на рис. 1.15. При такой настройке отклонение управляемой величины от требуемого значения будет меньше, чем при другой (например, при настройке $n_H = n_0$).

Примером статической системы автоматического управления может служить также *электронный стабилизатор напряжения* источника питания, принципиальная схема которого приведена на рис. 1.16. Электронный стабилизатор предназначен для поддержания с определенной точностью постоянства напряжения $u_{\text{вых}}$ на нагрузке R_H (в качестве которой могут быть различные электронные схемы) при изменениях входного напряжения $u_{\text{вх}}$, подводимого от выпрямителя, и нагрузки R_H . Управляемой величиной в схеме является выходное напряжение $u_{\text{вых}}$. Задающее напряжение u_3 снимается со стабилитрона $VD1$ и сравнивается с напряжением обратной связи $u_{0.c}$, снимаемого с резистора $R2$ делителя напряжения, образованного резисторами $R1$ и $R2$. Транзистор $VT1$ является усилителем разности напряжений $\Delta u = u_3 - u_{0.c}$, поступающей между его эмиттером и базой, а транзистор $VT2$, работающий в режиме эмиттерного повторителя, — регулирующим элементом. При номинальном напряжении $u_{\text{вых}}$ на нагрузке R_H напряжение Δu положительно. При увеличении по абсолютному значению напряжения $u_{\text{вых}}$ напряжение $u_{0.c} = \Delta u$ увеличивается, что вызывает увеличение коллекторного тока $VT1$ и уменьшение напряжения u_{K31} между его коллектором и эмиттером. Напряжение u_{K31} через $R3$ прикладывается между эмиттером и базой транзистора $VT2$ и поэтому его уменьшение вызывает уменьшение коллекторного тока $VT2$, увеличение сопротивления между его эмиттером и коллектором, повышение падения напряжения u_{K32} на $VT2$, а следовательно, соответствующее уменьшение напряжения $u_{\text{вых}}$.

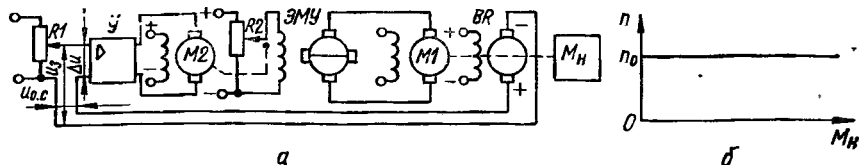


Рис. 1.17. Принципиальная схема астатической системы автоматического управления частотой вращения электродвигателя постоянного тока (а) и ее статическая характеристика (б).

Изменение падения напряжения на регулирующем транзисторе VT_2 возможно лишь при отклонении $u_{вых}$ от заданного значения (т. е. при появлении ошибки), поэтому рассматриваемая система является статической.

Рассмотрены примеры статических систем по отношению к возмущающему воздействию. Различают также системы статические по отношению к задающему воздействию. В этих системах отклонение управляемой величины в установившемся режиме зависит от постоянного значения задающего воздействия.

2. Астатическая система — это система, в которой отклонение управляемой величины в установившемся режиме при любом постоянном значении возмущающего (задающего) воздействия равно нулю.

Если отклонение управляемой величины в установившемся режиме не зависит от возмущающего воздействия, то система является астатической по отношению к этому возмущающему воздействию, если же оно не зависит от задающего воздействия, то астатической по отношению к задающему воздействию.

Примером астатической системы по отношению к возмущающему воздействию является система стабилизации частоты вращения ротора двигателя (рис. 1.17, а). В отличие от статической системы (рис. 1.10, а) здесь введен вспомогательный двигатель M_2 . При отклонении (уменьшении) частоты двигателя M_1 от заданной (например, за счет изменения момента нагрузки M_H) появляется напряжение ошибки Δu , которое поступает на усилитель U , усиливается и приводит во вращение вспомогательный двигатель M_2 . Последний перемещает движок потенциометра R_2 таким образом (вверх), что напряжение $u_{o.c}$ тахогенератора BR по своему значению приближается к задающему напряжению u_z . Двигатель M_2 остановится только при $\Delta u = 0$, т. е. при достижении двигателем M_1 заданной частоты (после устранения ошибки). Статическая характеристика астатической системы изображена на рис. 1.17, б.

Выходная величина вспомогательного двигателя — линейное перемещение движка потенциометра R_2 (а следовательно, и управляющее воздействие системы) является интегралом от входного напряжения двигателя, пропорционального отклонению (ошибке системы), поэтому двигатель M_2 в рассматриваемом случае является интегрирующим устройством. Отсюда можно сделать вывод, что астатическая система отличается от статической наличием интегрирующего устройства.

Примером астатической системы по отношению к задающему воздействию является следящая система (рис. 1.14, а). В этой системе ошибка в установившемся режиме при любом постоянном значении задающего воздействия (угле поворота α ведущего вала) равна нулю.

Астатические системы при использовании принципа управления по отклонению, как видно из приведенных примеров, получаются путем введения интеграла от отклонения управляемой величины в алгоритм управления. При использовании же принципа управления по возмущению (по задающему воздействию) или принципа комбинированного управления астатическая система может быть получена введением в алгоритм управления с помощью компенсационной связи соответствующей функции этого воздействия и параметров исходной системы. В простейшем случае для получения астатической системы достаточно ввести в алгоритм управления величину, пропорциональную возмущающему воздействию с коэффициентом пропорциональности, определяемым из условия компенсации (см., например, выражения (1.3), (1.11)). В комбинированных САУ астатические свойства могут быть получены либо введением в алгоритм управления интегралов от отклонения управляемой величины, либо соответствующей функции от возмущающего (задающего) воздействия, либо введением того и другого одновременно.

Классификация САУ по характеру изменения величин, определяющих работу отдельных элементов

По характеру изменения величин, определяющих работу отдельных элементов, САУ можно разделить на системы *непрерывного действия и дискретные системы*.

В системах непрерывного действия между входными и выходными величинами всех элементов существует непрерывная функциональная связь. Выходные величины всех элементов в этих системах в каждый момент времени определяются значением входных величин.

Примерами систем непрерывного действия являются рассмотренные стабилизаторы частоты вращения электродвигателя и следящая система. В дискретных системах выходная величина какого-либо элемента имеет дискретный характер, т. е. представляет собой определенную последовательность импульсов. Преобразование непрерывных сигналов в дискретные выполняется дискретным элементом.

Классификация САУ в зависимости от способов их настройки

В процессе работы обычно изменяются характеристики задающего и возмущающих воздействий и параметры самой системы. Поэтому для обеспечения оптимального режима работы необходимо настраивать систему (изменять параметры, характеристики, алгоритм управления, структуру системы). В зависимости от того, производится настройка системы человеком или автоматически системой, САУ делятся на *неадаптивные и адаптивные системы*.

Неадаптивные системы — это системы, в которых не предусмотрено на автоматическая настройка при изменении характеристик внешних воздействий или параметров самой системы с целью обеспечения оптимального процесса управления. Настройку такой системы обычно выполняет человек. Примерами неадаптивных систем являются все рассмотренные ранее системы.

Адаптивные системы — это системы, которые в зависимости от условий работы (характеристик воздействий и параметров самой системы) изменяют свою настройку, обеспечивая для каждой совокупности условий наивыгоднейший режим работы.

Классификация САУ по другим признакам

В зависимости от наличия или отсутствия усилителя мощности различного САУ соответственно *непрямого (косвенного)* и *прямого действия*.

Примерами САУ непрямого действия (содержащих усилители мощности) с принципом управления по отклонению являются системы стабилизации и следящая система (рис. 1.10, 1.12, 1.14, а, 1.16).

В САУ прямого действия выходная мощность измерительного элемента используется непосредственно для управления объектом. Примером такой системы может служить система стабилизации напряжения генератора постоянного тока с угольным регулятором.

По математическим признакам САУ делятся на:

линейные системы, описываемые линейными дифференциальными уравнениями при значительных отклонениях регулируемой величины от заданного значения;

нелинейные системы, но описываемые линейными уравнениями при малых отклонениях от равновесия. Дифференциальные уравнения таких систем являются нелинейными, но их можно линеаризовать и производить анализ этих систем с помощью линеаризованных дифференциальных уравнений;

существенно нелинейные САУ (например, релейные САУ).

В зависимости от того, имеются или отсутствуют местные обратные связи, САУ подразделяются на *одноконтурные* и *многоконтурные*. Одноконтурной называется система, имеющая только одну главную обратную связь. Местные обратные связи в этой системе отсутствуют. Многоконтурной называется система, имеющая как главную, так и местные обратные связи.

В зависимости от числа управляемых величин САУ подразделяются на *одномерные* и *многомерные (многосвязные)*. Одномерной называется система, имеющая одну управляемую величину, двумерной — две и многомерной — много управляемых величин.

1.4. Понятие о режимах работы систем автоматического управления.

Линеаризация нелинейных дифференциальных уравнений

Различают два режима работы САУ: установившийся и неустойчивый (переходный). Основным требованием, предъявляемым к САУ, является обеспечение необходимой точности работы как в установившемся, так и в переходном режимах. Точность САУ в установившемся режиме можно определить по ее статической характеристике.

Статической характеристикой элемента (системы) называется зависимость между выходной и входной величинами элемента (системы) в установившемся режиме.

Наиболее часто встречающиеся статические характеристики элементов приведены на рис. 1.18.

Точные дифференциальные уравнения системы автоматического управления, в состав которой входит, например, один из нелинейных элементов, характеристики которых показаны на рис. 1.18, б—з, являются нелинейными. Исследование нелинейных уравнений связано со значительными трудностями. Поэтому стремятся их линеаризовать. Основанием для линеаризации является то обстоятельство, что в реальных САУ отклонения управляемой величины и других переменных от их установившихся значений являются незначительными. Метод линеаризации рассмотрим на конкретных примерах.

Пример 1. Пусть статическая характеристика элемента системы описывается нелинейной квадратичной функцией $F(x) = kx^2$, график которой показан на рис. 1.19, а и установившееся значение $F(x_0) = F_0$.

Нелинейную функцию $F(x)$ в точке a , соответствующей установившемуся режиму, можно разложить в ряд Тейлора:

$$F(x) = F_0 + \left(\frac{dF(x)}{dx} \right)_{x=x_0} \Delta x + \left(\frac{d^2F(x)}{dx^2} \right)_{x=x_0} \frac{\Delta x^2}{2!} + \dots$$

$$\dots + \left(\frac{d^n F(x)}{dx^n} \right)_{x=x_0} \frac{\Delta x^n}{n!} + \dots$$

При достаточно малых отклонениях Δx от установившегося значения x_0 можно ограничиться первыми двумя членами разложения

$$F(x) = F_0 + \left(\frac{dF(x)}{dx} \right)_{x=x_0} \Delta x.$$

Величина $(dF(x)/dx)_{x=x_0}$ равна тангенсу угла α^0 наклона касательной, проведенной к кривой $F(x)$ в точке $x = x_0$, т. е. $(dF(x)/dx)_{x=x_0} = \operatorname{tg} \alpha$. Учитывая, что для рассматриваемой функции $(dF(x)/dx)_{x=x_0} = 2kx_0$, получим

$$F(x) = F_0 + 2kx_0 \Delta x = F_0 + k_L \Delta x,$$

где $k_L = 2kx_0$ — коэффициент линеаризованного уравнения.

Перенеся начало координат в точку x_0 , F_0 , получим уравнение в отклонениях $F(\Delta x) = k_L \Delta x$, или, обозначая Δx просто через x , $F(x) = k_L x$. Последнее уравнение является линейным уравнением для отклонений. Это уравнение представляет собой уравнение прямой, касательной к исходной кривой в точке a .

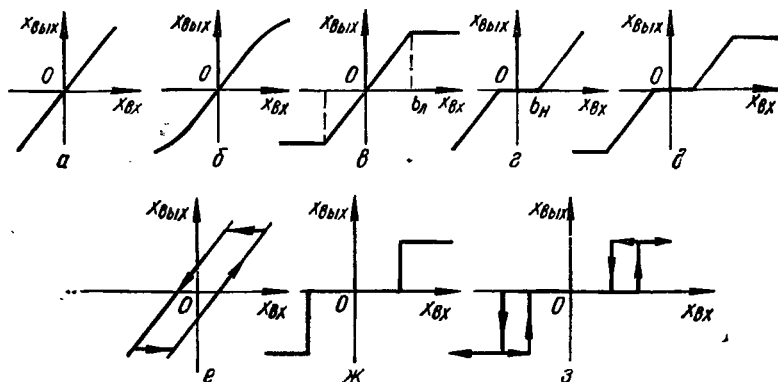


Рис. 1.18. Статические характеристики элементов:

а — линейная; б — з — нелинейные.

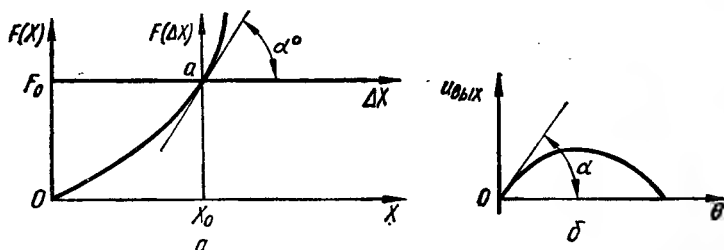


Рис. 1.19. К линейризации функций:

а — $F(x) = kx^2$; б — $u_{\text{вых}}(\theta) = k \sin \theta$.

Пример 2. Выходное напряжение сельсинной пары, работающей в трансформаторном режиме, определяется нелинейной синусоидальной функцией $u_{\text{вых}}(\theta) = k \sin \theta$, где θ — угол рассогласования между роторами сельсина-датчика и сельсина-приемника. График функции показан на рис. 1.19, б.

Если сельсины в качестве измерительного элемента применяются в следящей системе, где в установившемся статическом режиме обычно $\theta = 0$, то разложение нелинейной функции в ряд Тейлора необходимо произвести в точке, соответствующей началу координат, $\theta_0 = 0$, $u_{\text{вых}} = 0$:

$$u_{\text{вых}}(\theta) = u_{\text{вых}0} + \left(\frac{du_{\text{вых}}(\theta)}{d\theta} \right)_{\theta=\theta_0} \Delta\theta.$$

Учитывая, что $u_{\text{вых}0} = 0$ и что $(du_{\text{вых}}(\theta)/d\theta)_{\theta=\theta_0} = (k \sin \theta / d\theta)_{\theta=\theta_0} = \text{tg } \alpha = k (\cos \theta)_{\theta=\theta_0} = k$, получим $u_{\text{вых}}(\theta) = k \Delta\theta$, или, обозначая $\Delta\theta$ через θ : $u_{\text{вых}}(\theta) = k\theta$. Последнее выражение является уравнением прямой, касательной к исходной кривой в начале координат.

Как видно из приведенных примеров, геометрически при линейризации криволинейные характеристики заменяются прямыми, касательными к ним в исследуемой точке. При линейризации нелинейные функции, имеющиеся в дифференциальных уравнениях, разлагаются в ряд Тейлора и члены выше первой степени отбрасываются.

Метод линеаризации применим в случае, если нелинейная функция F в окрестности исследуемой точки является непрерывной и кривой, изображающей функцию, можно провести здесь касательную. Метод линеаризации неприменим, если нелинейная функция F имеет разрыв непрерывности в исследуемой точке, так как при этом частные производные отсутствуют и нельзя провести касательную или составить ряд Тейлора.

ГЛАВА 2

Динамические характеристики звеньев и систем автоматического управления

В следящих системах (рис. 1.14, а) при повороте ведущего вала на некоторый угол приемный вал также поворачивается на этот же угол. Однако приемный вал занимает новое положение не мгновенно, а с некоторым запозданием после окончания переходного процесса. Переходный процесс может быть аperiodическим (рис. 2.1, а) и колебательным с затухающими колебаниями (рис. 2.1, б). Возможно, что колебания приемного вала будут незатухающими (рис. 2.1, в) или возрастающими по амплитуде (рис. 2.1, г). Последние два режима являются неустойчивыми.

Каким образом данная система будет обрабатывать то или иное изменение задающего или возмущающего воздействия, т. е. каков характер переходного процесса системы, будет ли система устойчивой или неустойчивой — эти и подобные вопросы рассматриваются в динамике систем автоматического управления.

2.1. Динамические звенья автоматических систем

Необходимость представления элементов автоматических систем динамическими звеньями. Определение динамического звена

Для определения динамических свойств автоматической системы необходимо иметь ее математическое описание, т. е. математическую модель системы. Для этого следует составить дифференциальные уравнения элементов системы, с помощью которых описываются происходящие в них динамические процессы.

При анализе элементов автоматических систем выясняется, что разнообразные элементы, отличающиеся назначением, конструкцией, принципом действия и физическими процессами, описываются одинаковыми дифференциальными уравнениями, т. е. являются сходными по динамическим свойствам. Например, в электрической цепи и механической системе, несмотря на различную их физическую природу, динамические процессы могут описываться аналогичными дифференциальными уравнениями.

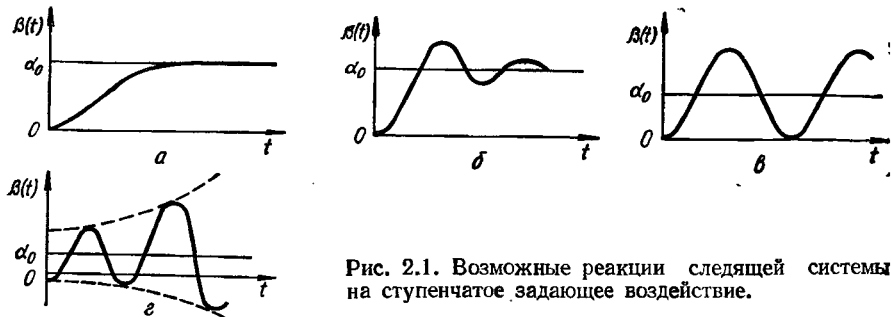


Рис. 2.1. Возможные реакции следящей системы на ступенчатое задающее воздействие.

В теории автоматического управления элементы автоматических систем с точки зрения их динамических свойств представляют с помощью небольшого числа элементарных динамических звеньев. Под элементарным динамическим звеном понимается математическая модель искусственно выделяемой части системы, характеризующая некоторым простейшим алгоритмом (математическим или графическим описанием процесса).

Одним элементарным звеном иногда могут быть представлены несколько элементов системы или наоборот — один элемент может быть представлен в виде нескольких звеньев.

По направлению прохождения воздействия различают вход и выход и соответственно входную $x_{\text{вх}}(t)$ и выходную $x_{\text{вых}}(t)$ величины звена. Выходная величина звена направленного действия не оказывает влияния на входную величину. Дифференциальные уравнения таких звеньев можно составлять отдельно и независимо от других звеньев. Поскольку в САУ входят различные усилители, обладающие направленным действием, САУ обладает способностью передавать воздействия только в одном направлении. Поэтому уравнение динамики всей системы можно получить из уравнений динамики ее звеньев, исключая промежуточные переменные.

Элементарные динамические звенья являются основой для построения математической модели системы любой сложности.

Классификация и динамические характеристики звеньев

Тип звена определяется алгоритмом, в соответствии с которым происходит преобразование входного воздействия. В зависимости от алгоритма различают следующие типы элементарных динамических звеньев: пропорциональное (усилительное), аperiodическое (инерционное), колебательное, интегрирующее и дифференцирующее.

Каждое звено характеризуется следующими динамическими характеристиками: уравнением динамики (движения), передаточной функцией, переходной и импульсной переходной (весовой) функциями, частотными характеристиками. Такими же динамическими характеристиками оцениваются и свойства автоматической системы. Рассмотрим динамические характеристики на примере аperiodического звена,

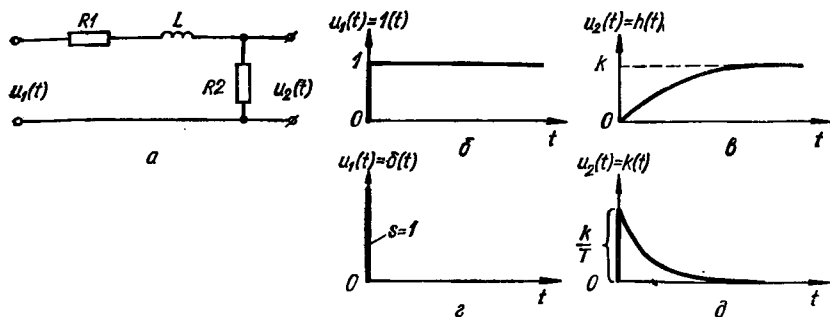


Рис. 2.2. Электрическая RL -цепь, представляемая апериодическим звеном, и реакции звена на типовые входные воздействия:

a — схема; $б$ — единичное ступенчатое воздействие; $в$ — переходная функция звена; $г$ — единичный импульс; $д$ — импульсная переходная функция звена.

которым представляется электрическая цепь, изображенная на рис. 2.2, a .

Уравнение динамики звена (системы). Уравнение динамики элемента (звена) — уравнение, определяющее зависимость выходной величины элемента (звена) $x_{\text{вых}}(t)$ от входной величины $x_{\text{вх}}(t)$:

$$x_{\text{вых}}(t) = f[x_{\text{вх}}(t)].$$

Уравнение динамики можно записать в дифференциальной и операционной формах. Для получения дифференциального уравнения элемента составляются дифференциальные уравнения для входной и выходной величин этого элемента. Применительно к электрической цепи (рис. 2.2, a):

$$u_1(t) = (R_1 + R_2)i(t) = L di(t)/dt,$$

$$u_2(t) = R_2 i(t).$$

Дифференциальное уравнение цепи получают из этих уравнений исключением промежуточной переменной $i(t)$:

$$T du_2(t)/dt + u_2(t) = k u_1(t), \quad (2.1)$$

где $T = L/(R_1 + R_2)$ — постоянная времени, c ; $k = R_2/(R_1 + R_2)$ — коэффициент усиления звена.

В теории автоматического управления принята следующая форма записи уравнения: выходная величина и ее производные находятся в левой части, причем на первом месте стоит производная высшего порядка; выходная величина входит в уравнение с коэффициентом, равным единице; входная величина, а также в более общем случае ее производные и другие члены (возмущения) стоят в правой части уравнения. Уравнение (2.1) записано в соответствии с этой формой.

Элемент системы, процесс в котором описывается уравнением вида (2.1), представляется *апериодическим звеном* (инерционным, статическим звеном первого порядка).

Для получения уравнения динамики в операционной (по Лапласу) форме функции, входящие в дифференциальное уравнение, заменяются преобразованными по Лапласу функциями, а операции дифференциро-

вания и интегрирования в случае нулевых начальных условий — умножением и делением на комплексную переменную $p = \sigma + j\omega$ изображений функций, от которых берется производная или интеграл. В результате этого осуществляется переход от дифференциального уравнения к алгебраическому. В соответствии с дифференциальным уравнением (2.1) уравнение динамики апериодического звена в операционной форме для случая нулевых начальных условий имеет вид:

$$(Tp + 1)U_2(p) = kU_1(p), \quad (2.2)$$

где $U_i(p) = \int_0^{\infty} u_i(t) e^{-pt} dt = L[u_i(t)]$ — изображение по Лапласу функции времени $u_i(t)$; $i = 1, 2$; $p = \sigma + j\omega$ — комплексное число.

Не следует путать операционную форму (2.2) записи уравнения с символической формой записи дифференциального уравнения:

$$(Tp + 1)u_2(t) = ku_1(t),$$

где $p \equiv d/dt$ — символ дифференцирования. Отличить символ дифференцирования от комплексной переменной несложно: после символа дифференцирования стоит оригинал, т. е. функция от t , а после комплексной переменной — изображение по Лапласу, т. е. функция от p .

Из формулы (2.1) видно, что апериодическое звено описывается уравнением первого порядка. Другие элементарные звенья описываются уравнениями нулевого, первого и максимум второго порядка.

Передаточная функция звена (системы) $K(p)$ представляет собой отношение изображений по Лапласу выходной $X_{\text{вых}}(p)$ и входной $X_{\text{вх}}(p)$ величин при нулевых начальных условиях:

$$K(p) = X_{\text{вых}}(p)/X_{\text{вх}}(p). \quad (2.3)$$

Передаточная функция звена (системы) может быть определена из уравнения звена (системы), записанного в операционной форме. Для апериодического звена в соответствии с уравнением (2.2)

$$K(p) = U_2(p)/U_1(p) = k/(Tp + 1). \quad (2.4)$$

Из выражения (2.3) следует

$$X_{\text{вых}}(p) = K(p) X_{\text{вх}}(p), \quad (2.5)$$

т. е. зная изображение по Лапласу входного воздействия и передаточную функцию звена (системы), можно определить изображение выходной величины этого звена (системы).

Изображение выходной величины апериодического звена в соответствии с выражением (2.4) следующее:

$$U_2(p) = [k/(Tp + 1)] U_1(p). \quad (2.6)$$

Переходной функцией звена (системы) $h(t)$ называется реакция звена (системы) на воздействие вида единичной ступенчатой функции $1(t)$ (рис. 2.2, б) при нулевых начальных условиях. Переходная функция может быть определена решением дифференциального уравнения обычным или операционным методами. Для определения $h(t)$ опера-

ционным методом в уравнение (2.5) подставляем изображение единичной ступенчатой функции $X_{\text{вх}}(p) = L[1(t)] = 1/p$ и находим изображение переходной функции

$$H(p) = X_{\text{BIX}}(p) = K(p)/p, \quad (2.7)$$

т. е. изображение переходной функции равно передаточной функции, деленной на p . Переходная функция находится как обратное преобразование Лапласа от $H(p)$: $h(t) = L^{-1}[H(p)]$.

Для определения $h(t)$ апериодического звена в уравнение (2.6) подставляем $U_1(p) = L[1(t)] = 1/p$ и находим изображение переходной функции $H(p) = U_2(p) = k/(Tp + 1)p$.

Разлагаем $H(p)$ на элементарные дроби $H(p) = \frac{k}{(Tp+1)p} = \frac{k}{(Tp+1)p} = k \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+a} \right)$, где $a = 1/T$, и с помощью таблиц преобразования Лапласа находим оригинал

$$h(t) = L^{-1} \left[k \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+a} \right) \right] = k(1 - e^{-t/T}).$$

График переходной функции апериодического звена изображен на рис. 2.2, в. Из рисунка видно, что переходный процесс звена имеет апериодический характер. Выходная величина звена достигает своего значения не сразу, а постепенно. В частности, значение $h(t) = 0,95h_{уст}(t)$ достигается через $t = (3...4) T$.

Импульсная переходная функция (весовая функция) звена (системы) $k(t)$ есть реакция звена (системы) на единичный импульс $\delta(t)$ (мгновенный импульс с бесконечно большой амплитудой и единичной площадью, рис. 2.2, *г*). Единичный импульс получается дифференцированием единичного скачка: $\delta(t) = d1(t)/dt$, или в операционной форме: $\delta(p) = pL[1(t)] = p/p = 1$. Поэтому

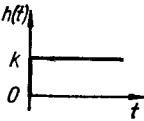
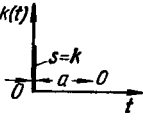
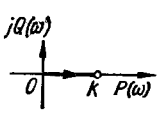
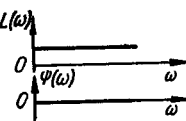
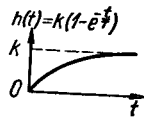
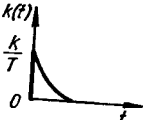
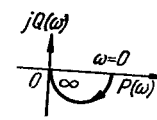
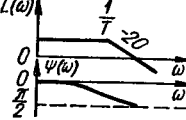
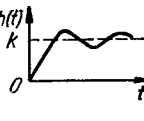
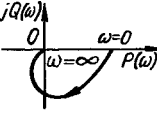
$$L[k(t)] = K(p) \delta(p) = K(p), \quad (2.8)$$

т. е. изображение импульсной переходной функции равно передаточной функции звена (системы). Отсюда следует, что для характеристики динамических свойств звена (системы) в равной мере могут быть использованы как передаточная функция, так и импульсная переходная функция. Как видно из (2.8), чтобы получить импульсную переходную функцию, надо найти оригинал, соответствующий передаточной функции $k(p) = L^{-1}[K(p)]$. Импульсная переходная функция апериодического звена

$$k(t) = L^{-1} \left[\frac{k}{Tp + 1} \right] = \frac{k}{T} e^{-t/T}. \quad (2.9)$$

В соответствии с (2.7) $K(p) = pH(p)$, или при переходе к оригиналам $k(t) = dh(t)/dt$, т. е. импульсная переходная функция звена (системы) может быть также получена дифференцированием переходной функции. Импульсная переходная функция аperiodического

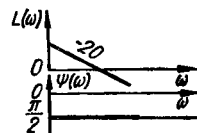
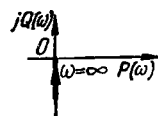
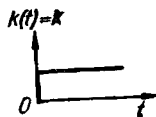
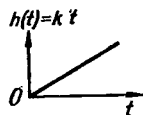
Таблица 2.1. Характеристики динамических звеньев

Тип звена	Уравнение динамики звена	Передаточная функция	Переходная переходная функция	Импульсная переходная	Частотные характеристики	
					АФЧХ	ЛЧХ
Пропорциональное	$x_{\text{ВЫХ}}(t) = kx_{\text{ВХ}}(t)$	$K(p) = k$				
Апериодическое	$T \frac{dx_{\text{ВЫХ}}(t)}{dt} + x_{\text{ВЫХ}}(t) = kx_{\text{ВХ}}(t)$	$K(p) = \frac{k}{Tp + 1}$				
Колебательное	$T^2 \frac{d^2x_{\text{ВЫХ}}(t)}{dt^2} + 2\xi T \frac{dx_{\text{ВЫХ}}(t)}{dt} + x_{\text{ВЫХ}}(t) = kx_{\text{ВХ}}(t)$	$K(p) = \frac{k}{T^2p^2 + 2\xi Tp + 1}$				

Интегрирующее

$$x_{\text{ВЫХ}}(t) = k \int_0^t x_{\text{ВХ}}(t) dt$$

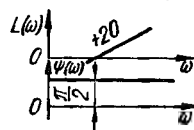
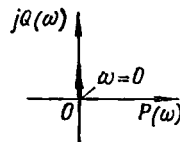
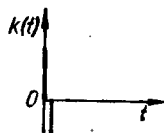
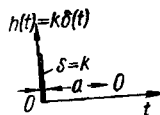
$$K(p) = \frac{k}{p}$$



Идеальное дифференцирующее

$$x_{\text{ВЫХ}} = k \frac{dx_{\text{ВХ}}(t)}{dt}$$

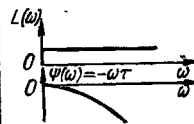
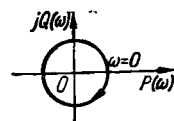
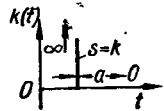
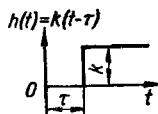
$$K(p) = kp$$



Запаздывающее

$$x_{\text{ВЫХ}} = kx_{\text{ВХ}}(t - \tau)$$

$$K(p) = ke^{-\tau p}$$



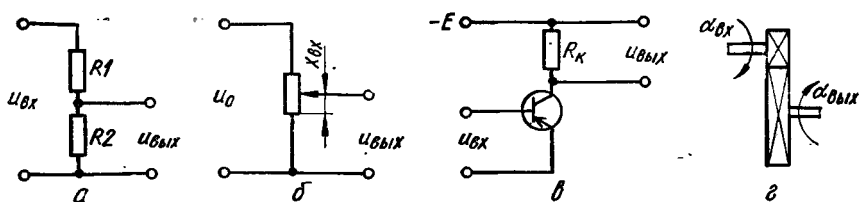


Рис. 2.3. Принципиальные схемы элементов, представляемых пропорциональным звеном:

а — делитель напряжения; *б* — потенциометр; *в* — усилитель на транзисторе; *г* — редуктор.

звена

$$k(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \frac{d}{dt} [k(1 - e^{-t/T})] = \frac{k}{T} e^{-t/T}. \quad (2.10)$$

Как видим, выражения (2.9) и (2.10) для $k(t)$ совпадают. График импульсной переходной функции апериодического звена изображен на рис. 2.2, *д*.

Из выражения (2.5) и рассмотренных примеров следует, что при заданном входном воздействии выходная величина определяется передаточной функцией. Поэтому технические требования к выходной величине звена (системы) можно выразить через соответствующие требования к передаточной функции $K(p)$ этого звена (системы). В теории автоматического управления метод исследования и проектирования систем с помощью передаточной функции является одним из основных методов.

Пропорциональное (усилительное) звено. Уравнение звена имеет вид:

$$x_{\text{вых}}(t) = kx_{\text{вх}}(t), \quad (2.11)$$

т. е. между выходной и входной величинами звена имеется пропорциональная зависимость. Уравнение (2.11) в операционной форме

$$X_{\text{вых}}(p) = kX_{\text{вх}}(p). \quad (2.12)$$

Из уравнения (2.12) определяется передаточная функция звена

$$K(p) = X_{\text{вых}}(p)/X_{\text{вх}}(p) = k, \quad (2.13)$$

т. е. передаточная функция пропорционального звена численно равна коэффициенту усиления. Примерами такого звена могут служить делитель напряжения, потенциометрический датчик, электронный усилительный каскад, идеальный редуктор, схемы которых изображены на рис. 2.3, *а, б, в, г* соответственно. Коэффициент усиления пропорционального звена может быть как безразмерной (делитель напряжения, усилительный каскад, редуктор), так и размерной величиной (потенциометрический датчик).

Оценим динамические свойства пропорционального звена. При подаче на вход звена ступенчатой функции выходная величина (переходная функция) в силу равенства (2.11) также будет ступенчатой (табл. 2.1), т. е. выходная величина копирует изменение входной ве-

личины без запаздывания и искажения. Поэтому пропорциональное звено называют еще безынерционным.

Импульсная переходная функция пропорционального звена

$$k(t) = dh(t)/dt = dk_l(t)/dt = k\delta(t),$$

т. е. представляет собой мгновенный бесконечно большой амплитуды импульс, площадь которого $s = k$.

Колебательное звено. Уравнение звена:

$$T^2 \frac{d^2 x_{\text{вых}}(t)}{dt^2} + 2\xi T \frac{dx_{\text{вых}}(t)}{dt} + x_{\text{вых}}(t) = k x_{\text{вх}}(t), \quad (2.14)$$

или в операционной форме

$$(T^2 p^2 + 2\xi T p + 1) X_{\text{вых}}(p) = k X_{\text{вх}}(p). \quad (2.15)$$

Тогда передаточная функция колебательного звена имеет вид

$$K(p) = \frac{X_{\text{вых}}(p)}{X_{\text{вх}}(p)} = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}. \quad (2.16)$$

Динамические свойства звена зависят от корней его характеристического уравнения $T^2 p^2 + 2\xi T p + 1 = 0$:

$$p_{1,2} = (-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1})/T. \quad (2.17)$$

Свободная составляющая решения

$$x_c(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t}. \quad (2.18)$$

Полное решение уравнения (2.14) при ступенчатом входном воздействии $x_{\text{вх}}(t) = 1(t)$ (переходная функция звена) имеет вид:

$$x_{\text{вых}}(t) = h(t) = k x_{\text{вх}} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\alpha t} \sin(\Omega_0 t + \varphi) \right], \quad (2.19)$$

где $\Omega_0 = (\sqrt{1 - \xi^2})/T$ — угловая частота собственных колебаний; $\varphi = \arctg [(\sqrt{1 - \xi^2})/\xi]$ — начальная фаза колебаний; $\alpha = \xi/T$ — декремент затухания; ξ — относительный коэффициент затухания.

Из формулы (2.19) видно, что характер переходной функции зависит от относительного коэффициента затухания ξ :

1) если $0 < \xi < 1$, то переходная функция имеет вид затухающих колебаний (табл. 2.1);

2) если $\xi = 0$, то переходная функция представляет собой незатухающие гармонические колебания. В этом случае передаточная функция (2.16) преобразуется к виду:

$$K(p) = k/(T^2 p^2 + 1). \quad (2.20)$$

Звено с передаточной функцией (2.20) является разновидностью колебательного звена и называется *консервативным звеном*;

3) при $-1 < \xi < 0$ на выходе звена возникают возрастающие по амплитуде колебания, а передаточная функция принимает вид:

$$K(p) = k/(T^2 p^2 - 2\xi T p + 1).$$

Эта передаточная функция соответствует неустойчивому колебательному звену;

4) если $\xi > 1$, то, как следует из формулы (2.17), корни характеристического уравнения являются вещественными отрицательными, а переходная функция (2.19) имеет монотонный характер. В этом случае звено с передаточной функцией (2.16) называют аperiодическим звеном второго порядка. Поскольку при $\xi > 1$ знаменатель передаточной функции (2.16) можно разложить на два сомножителя, то рассматриваемое звено можно представить в виде двух последовательно соединенных аperiодических звеньев:

$$K(p) = k/(T_1 p + 1)(T_2 p + 1), \quad (2.21)$$

где $T_1 = T(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})$; $T_2 = T(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})$.

Если ξ весьма велико ($\xi \gg 1$), то $T_2 \ll T_1$, и влиянием T_2 на переходный процесс можно пренебречь. Передаточная функция (2.21) в этом случае может быть записана в виде $K(p) = k/(T_1 p + 1)$, т. е. колебательное звено при $\xi \gg 1$ вырождается в аperiодическое звено.

Вид кривой импульсной переходной функции колебательного звена приведен в табл. 2.1.

Примерами колебательного звена могут служить электрическая цепь, состоящая из емкости C , индуктивности L и сопротивления R , электродвигатель и др.

Интегрирующее звено. Выходная величина звена является интегралом по времени от величины на его входе

$$x_{\text{вых}}(t) = k \int_0^t x_{\text{вх}}(t) dt. \quad (2.22)$$

Уравнение (2.22) звена в операционной форме $x_{\text{вых}}(p) = kX_{\text{вх}}(p)/p$, откуда передаточная функция звена

$$K(p) = X_{\text{вых}}(p)/X_{\text{вх}}(p) = k/p. \quad (2.23)$$

Если ко входу звена приложить воздействие в виде ступенчатой функции, то уравнение (2.22) примет вид $x_{\text{вых}}(t) = kx_{\text{вх}}t$, а переходная функция звена будет определяться выражением $h(t) = kt$. Графики переходной и импульсной переходной функций интегрирующего звена приведены в табл. 2.1.

Дифференцирующее звено. Уравнение звена: $x_{\text{вых}}(t) = kdx_{\text{вх}}(t)/dt$, или в операционной форме $X_{\text{вых}}(p) = kpX_{\text{вх}}(p)$. Передаточная функция звена:

$$K(p) = X_{\text{вых}}(p)/X_{\text{вх}}(p) = kp. \quad (2.24)$$

Здесь k — коэффициент усиления звена по производной, равный отношению выходной величины к скорости изменения величины на входе. Выходная величина звена пропорциональна производной входной величины. Графики переходной и импульсной переходной функций звена приведены в табл. 2.1. Рассмотренное дифференциальное звено является идеальным. Передаточной функцией, близкой к передаточной функции дифференцирующего звена, обладают реальные дифференцирующие устройства, например, тахогенератор, когда за его входную величину принимается угол поворота, электрические дифференцирующие цепи и др.

Кроме рассмотренных выше динамических звеньев в таблице приведены сведения также о *запаздывающем звене*. Это звено передает сигнал без искажений, но при этом выходной сигнал запаздывает на постоянную величину τ по отношению ко входному. Переходная функция запаздывающего звена по своей форме совпадает с переходной функцией пропорционального звена, но сдвинута по времени на τ . Примерами запаздывающих звеньев являются релейный усилитель, в котором время запаздывания определяется временем срабатывания реле, длинные электрические линии и т. д.

2.2. Структурные (алгоритмические) схемы автоматических систем

Для получения математической модели системы необходимо ее элементы заменить соответствующими динамическими звеньями и соединить их между собой. Соединение звеньев должно соответствовать соединению элементов системы. Графическое изображение, показывающее, из каких динамических звеньев состоит система и как они соединены между собой, называется структурной схемой данной системы. Структурная схема, являясь математической моделью системы, отображает ее динамические свойства. Она, по существу, представляет графическое изображение системы уравнений динамики (алгоритмов) элементов, записанных в операционной форме (в виде передаточных функций).

Представление САУ структурными схемами, составленными из динамических звеньев, дает возможность создать общие методы исследования (анализа и синтеза) для всех систем, независимо от их конструкции, физической природы и т. д.

Методика составления уравнений элементов и структурной схемы системы

Методику составления уравнений элементов системы, представления их динамическими звеньями и построения структурной схемы системы рассмотрим на примере следящей системы, принципиальная схема которой изображена на рис. 1.14, а. Как отмечалось, в состав системы входят сельсины BC и BE , работающие в трансформаторном режиме, фазовый дискриминатор ФД, электромашинный усилитель мощности ЭМУ, двигатель M , редуктор P .

1. Сельсины применяются в качестве элемента сравнения и преобразователя угла рассогласования $\theta(t)$ в напряжение $u_{ст}(t)$..

Сельсины как элемент сравнения описываются алгебраическим выражением $\theta(t) = \alpha(t) - \beta(t)$. Элемент сравнения ЭС на структурной схеме (рис. 2.4) изображается как сумматор. Инвертирующий его вход указывает, что соответствующая величина вычитается.

Сельсины как преобразователь угла рассогласования $\theta(t)$ в напряжение $u_{ст}(t)$ описываются уравнением $u_{ст}(t) = k_{ст} \sin \theta(t)$. Это нелинейное алгебраическое уравнение. На основании линеаризации в первой главе для малых углов рассогласования было получено $u_{ст}(t) = k_{ст} \theta(t)$, где $k_{ст} = u_{ст}(t)/\theta(t)$, В/рад или В/град, — коэффициент усиления.

Уравнение сельсинов в операционной форме $U_{ст}(p) = k_{ст} \theta(p)$, откуда передаточная функция сельсинов $K_{ст}(p) = U_{ст}(p)/\theta(p) = k_{ст}$. Из уравнения и переда-

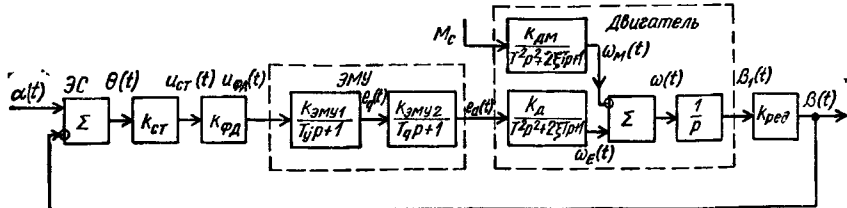


Рис. 2.4. Структурная схема следящей системы (рис. 1.14, а).

точной функции видно, что сельсины как преобразователи на структурной схеме представляются пропорциональным звеном.

На структурной схеме динамические звенья изображаются прямоугольниками, внутри которых записываются передаточные функции звеньев. Связи между звеньями обозначаются линиями со стрелками, указывающими направление передачи воздействий.

2. *Фазовый дискриминатор* описывается уравнением $u_{фд}(t) = k_{фд} u_{ст}(t)$, или в операционной форме $U_{фд}(p) = k_{фд} U_{ст}(p)$, откуда передаточная функция фазового дискриминатора

$$K_{фд}(p) = U_{фд}(p)/U_{ст}(p) = k_{фд},$$

т. е. фазовый дискриминатор на структурной схеме также представляется пропорциональным звеном.

3. *Электромашинный усилитель мощности ЭМУ* состоит из двух каскадов усиления. Выходное напряжение дискриминатора поступает на обмотку управления ЭМУ (на вход первого каскада усиления). В результате воздействия этого напряжения в поперечной цепи ЭМУ индуцируется э. д. с. $e_q(t)$. Найдем уравнение, связывающее между собой $e_q(t)$ и $u_{фд}(t)$. Уравнение напряжения в обмотке управления ЭМУ

$$u_{фд}(t) = R_y i_y(t) + L_y di(t)/dt, \quad (2.26)$$

где R_y и L_y — активное сопротивление и индуктивность цепи обмотки управления ЭМУ. Электродвижущая сила, индуцируемая в поперечной цепи ЭМУ:

$$e_q(t) = c_1 i_y(t). \quad (2.27)$$

Подставив в (2.26) значение $i_y(t) = e_q(t)/c_1$ из (2.27) и разделив (2.26) на R_y , получим

$$\frac{u_{фд}(t)}{R_y} = \frac{e_q(t)}{c_1} + \frac{L_y}{R_y c_1} \frac{de_q(t)}{dt}.$$

Умножив левую и правую части полученного уравнения на c_1 и записав его в принятой в автоматике форме, будем иметь

$$T_y de_q(t)/dt + e_q(t) = k_{ЭМУ1} u_{фд}(t), \quad (2.28)$$

где $T_y = L_y/R_y$ — постоянная времени цепи обмотки управления ЭМУ; $k_{ЭМУ1} = c_1/R_y$ — коэффициент усиления первого каскада ЭМУ.

Запишем уравнение (2.28) в операционной форме:

$$(T_y p + 1) E_q(p) = k_{ЭМУ1} U_{фд}(p),$$

откуда передаточная функция первого каскада ЭМУ

$$K_{ЭМУ1}(p) = E_q(p)/U_{фд}(p) = k_{ЭМУ1}/(T_y p + 1), \quad (2.29)$$

т. е. первый каскад ЭМУ на структурной схеме представляется апериодическим звеном.

Найдем уравнение и передаточную функцию второго каскада ЭМУ, входом которого является поперечная, а выходом — продольная цепь ЭМУ. Входной величиной каскада является э. д. с. $e_q(t)$, а выходной — э. д. с. $e_d(t)$, индуцируемая в продоль-

ной цепи. Уравнение напряжения в поперечной цепи ЭМУ:

$$e_q(t) = i_q(t) R_q + L_q di_q(t)/dt, \quad (2.30)$$

где R_q и L_q — активное сопротивление и индуктивность поперечной цепи ЭМУ. Электродвижущая сила, индуцируемая в продольной цепи ЭМУ,

$$e_d(t) = c_2 i_q(t). \quad (2.31)$$

Исключив из формул (2.30) и (2.31) промежуточную переменную $i_q(t)$, получим

$$T_q de_d(t)/dt + e_d(t) = k_{ЭМУ2} e_q(t), \quad (2.32)$$

где $T_q = L_q/R_q$ — постоянная времени поперечной цепи ЭМУ; $k_{ЭМУ2} = c_2/R_q$ — коэффициент усиления второго каскада ЭМУ. В операционном виде уравнение (2.32) имеет вид $(T_q p + 1) E_d(p) = k_{ЭМУ2} E_q(p)$, откуда передаточная функция звена

$$K_{ЭМУ2}(p) = E_d(p)/E_q(p) = k_{ЭМУ2}/(T_q p + 1),$$

т. е. второй каскад ЭМУ на структурной схеме также представляется апериодическим звеном.

4. Выход ЭМУ в следящей системе включен на *двигатель постоянного тока* с независимым возбуждением. Рассмотрим участок системы, включающий продольную цепь ЭМУ — двигатель. Входной величиной этого участка является э. д. с. $e_d(t)$, индуцируемая в продольной цепи ЭМУ, а выходной — частота вращения $\omega(t)$ двигателя. Найдем уравнение, связывающее $\omega(t)$ и $e_d(t)$.

Уравнение для э. д. с. $e_d(t)$ в электрической цепи, состоящей из продольной цепи ЭМУ и обмотки якоря двигателя, имеет вид

$$e_d(t) = R_d i_d(t) + L_d di_d(t)/dt + e_{дв}(t), \quad (2.33)$$

где

$$R_d = (R_{я} + R_{к.о} + R_{д.п} + R_{щ})_{ЭМУ} + (R_{я} + R_{д.п} + R_{щ})_{дв};$$

$$L_d = (L_{я} + L_{к.о} + L_{д.п})_{ЭМУ} + (L_{я} + L_{д.п})_{дв},$$

$R_{я}$, $R_{д.п}$, $R_{к.о}$, $R_{щ}$ — активные сопротивления обмоток якоря, дополнительных полюсов, компенсационной обмотки, щеток соответственно; $L_{я}$, $L_{д.п}$, $L_{к.о}$ — индуктивности обмоток якоря, дополнительных полюсов и компенсационной обмотки; $e_{дв}(t) = c\omega(t)\Phi$ — противо-э. д. с.

Поскольку рассматривается двигатель с независимым возбуждением, то, пренебрегая влиянием потока реакции якоря, можно считать, что магнитный поток двигателя $\Phi = \text{const}$ и тогда

$$e_{дв}(t) = k_e \omega(t), \quad k_e = c\Phi.$$

Подставив значение $e_{дв}(t)$ в уравнение (2.33), получим

$$e_d(t) = R_d i_d(t) + L_d di_d(t)/dt + k_e \omega(t). \quad (2.34)$$

Выражение (2.34) представляет собой только уравнение для э. д. с. в рассматриваемой цепи. Однако в этой цепи есть и механическая энергия, поэтому необходимо составить уравнение моментов. Образующийся в двигателе момент вращения $M_{вр}$ уравновешивается моментом сопротивления M_c и динамическим моментом $J d\omega(t)/dt$, т. е.

$$M_{вр} = M_c + J d\omega(t)/dt,$$

где $J = J_{дв} + (1/q^2) J_{р.м}$ — момент инерции всех вращающихся частей, приведенных к валу двигателя, Н · м · с²; $J_{дв}$, $J_{р.м}$ — моменты инерции двигателя и рабочего механизма соответственно; q — передаточное число редуктора; $M_c = M_{с.р.м}/q$ — момент сопротивления рабочего механизма, приведенный к валу двигателя, Н · м; $M_{с.р.м}$ — момент сопротивления рабочего механизма.

Момент вращения двигателя $M_{вр} = k\Phi i_d(t)$, или, учитывая, что $\Phi = \text{const}$,

$$M_{вр} = k_m i_d(t), \quad k_m = k\Phi.$$

Подставив значение $M_{\text{вр}}$ в уравнение моментов, получим

$$k_m i_d(t) = M_c + J d\omega(t)/dt.$$

Из последнего уравнения находим

$$i_d(t) = M_c/k_m + (J/k_m) d\omega(t)/dt$$

и подставляем в уравнение (2.34):

$$e_d(t) = \frac{R_d M_c}{k_m} + \frac{J R_d}{k_m} \frac{d\omega(t)}{dt} + \frac{L_d J}{k_m} \frac{d^2\omega(t)}{dt^2} + k_e \omega(t).$$

Разделив это уравнение на k_e , получим

$$\frac{L_d}{R_d} \frac{J R_d}{k_m k_e} \frac{d^2\omega(t)}{dt^2} + \frac{J R_d}{k_m k_e} \frac{d\omega(t)}{dt} + \omega(t) = \frac{e_d(t)}{k_e} - \frac{R_d}{k_m k_e} M_c,$$

или

$$T_s T_m d^2\omega(t)/dt^2 + T_m d\omega(t)/dt + \omega(t) = k_d e_d(t) - k_{\text{дм}} M_c,$$

где $T_s = L_d/R_d$ — электромагнитная постоянная времени цепи, с; $T_m = J R_d/k_m k_e$ — электромеханическая постоянная времени, с; $k_d = 1/k_e$ — коэффициент усиления двигателя по отношению к $e_d(t)$; $k_{\text{дм}} = R_d/k_m k_e$ — коэффициент усиления двигателя по отношению к M_c .

Обозначим $T_s T_m = T^2$, $T_m = 2\xi T$; тогда последнее уравнение примет вид

$$T^2 d^2\omega(t)/dt^2 + 2\xi T d\omega(t)/dt + \omega(t) = k_d e_d(t) - k_{\text{дм}} M_c,$$

или в операционной форме

$$(T^2 p^2 + 2\xi T p + 1) \omega(p) = k_d E_d(p) - k_{\text{дм}} M_c(p),$$

откуда находим

$$\omega(p) = \omega_e(p) - \omega_m(p),$$

где

$$\omega_e(p) = \frac{k_d}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1} E_d(p), \quad \omega_m(p) = \frac{k_{\text{дм}}}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1} M_c(p)$$

изображения составляющих частоты вращения двигателя, вызванных — э. д. с. $e_d(t)$ на входе участка и моментом сопротивления $M_c(t)$ соответственно.

Как видно из последней формулы, частота вращения двигателя $\omega(t)$ зависит от $e_d(t)$ и $M_c(t)$. Из выражения для $\omega_e(p)$ находим передаточную функцию участка (двигателя), связывающую $\omega_e(t)$ и $e_d(t)$,

$$K_d(p) = \frac{\omega_e(p)}{E_d(p)} = \frac{k_d}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}, \quad (2.35)$$

а из формулы для $\omega_m(p)$ — передаточную функцию, связывающую $\omega_m(t)$ и $M_c(t)$,

$$K_{\text{дм}}(p) = \frac{\omega_m(p)}{M_c(p)} = \frac{k_{\text{дм}}}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}, \quad (2.36)$$

где $\xi = T_m/2T = (1/2) \sqrt{T_m/T_s}$ — относительный коэффициент затухания.

Полученные передаточные функции соответствуют передаточной функции колебательного звена (2.16). Поэтому участок, включающий продольную цепь ЭМУ — двигатель, на структурной схеме (рис. 2.4) представляется двумя каналами, в каждом из которых содержится соответствующее колебательное звено; выходные сигналы звеньев вычитаются. Как указывалось, характер колебательного звена зависит от относительного коэффициента затухания ξ . Если $\xi > 1$, то в соответствии с формулой (2.21) каждое колебательное звено заменяется двумя апериодическими; а при $\xi \gg 1$ — одним апериодическим звеном. Как видно из выражения для ξ , значение $\xi > 1$ возможно, если $T_m > 4T_s$, что практически всегда выполняется.

5. Таким образом, получены передаточные функции участка продольная цепь ЭМУ — двигатель, связывающие частоту вращения вала двигателя $\omega(t)$ с $e_d(t)$ и $M_c(t)$. Однако при рассмотрении работы следящей системы интерес представляет не частота $\omega(t)$ (как, например, в системе стабилизации частоты), а *угол поворота* $\beta_1(t)$ вала двигателя, который выражается интегралом по времени от частоты $\omega(t)$, т. е.

$$\beta_1(t) = k_n \int_0^t \omega(t) dt, \quad k_n = 1,$$

или в операционной форме:

$$\beta_1(p) = (k_n/p) \omega(p).$$

Данной математической зависимости на структурной схеме соответствует интегрирующее звено с передаточной функцией

$$K_n(p) = \beta_1(p)/\omega(p) = k_n/p.$$

Таким образом, если считать выходной величиной двигателя не частоту вращения $\omega(t)$ вала, а угол $\beta_1(t)$ его поворота, то продольную цепь ЭМУ — двигатель в зависимости от значения ξ можно представить: а) колебательным и интегрирующим звеньями, если $0 < \xi < 1$; б) двумя апериодическими и интегрирующим звеньями, если $\xi > 1$; в) апериодическим и интегрирующим звеньями, если $\xi \gg 1$.

6. Двигатель с приемным валом связан через *редуктор* с передаточным числом q (обычно $q \gg 1$). Поэтому угол поворота $\beta(t)$ приемного вала определяется уравнением $\beta(t) = k_{\text{ред}} \beta_1(t)$, или в операционной форме: $\beta(p) = k_{\text{ред}} \beta_1(p)$, где $k_{\text{ред}} = 1/q$ — коэффициент усиления редуктора. Передаточная функция редуктора

$$K_{\text{ред}}(p) = \beta(p)/\beta_1(p) = k_{\text{ред}},$$

т. е. математической моделью редуктора является пропорциональное звено.

После замены элементов системы динамическими звеньями для получения структурной схемы необходимо эти звенья соответствующим образом соединить между собой.

Поскольку в рассматриваемой следящей системе (рис. 1.14, а) элементы соединены последовательно, то и динамические звенья, которыми представлены элементы, также соединяются последовательно.

По алгоритмической схеме системы можно определить передаточную функцию, являющуюся одной из важнейших ее динамических характеристик, а также составить уравнения динамики элементов и уравнение системы в целом.

На рис. 2.4 изображена структурная схема системы, в которой звенья соединены последовательно. На практике встречаются более сложные структурные схемы, содержащие такие типовые соединения звеньев, как последовательное и параллельное соединения звеньев, охват звена (группы звеньев) обратной связью. Поэтому, прежде чем решать задачу определения передаточной функции системы, выясним правила нахождения передаточных функций типовых соединений звеньев.

2.3. Передаточные функции типовых соединений звеньев

Передаточная функция последовательного соединения звеньев

Для определения передаточной функции последовательного соединения n звеньев с передаточными функциями $K_1(p)$, $K_2(p)$, ..., $K_n(p)$ (рис. 2.5, а) составляем уравнения звеньев в операционной форме:

$$\left. \begin{aligned} X_1(p) &= K_1(p) X_{\text{вх}}(p); \\ X_2(p) &= K_2(p) X_1(p); \\ &\dots \dots \dots \\ X_{\text{вых}}(p) &= K_n(p) X_{n-1}(p). \end{aligned} \right\}$$

Исключив из этих уравнений все промежуточные переменные, кроме $X_{\text{вх}}(p)$ и $X_{\text{вых}}(p)$, получим уравнение соединения:

$$X_{\text{вых}}(p) = K_1(p) K_2(p) \dots K_n(p) X_{\text{вх}}(p).$$

Из этого уравнения определяем передаточную функцию соединения:

$$K_{\text{пос}}(p) = X_{\text{вых}}(p)/X_{\text{вх}}(p) = K_1(p) K_2(p) \dots K_n(p) = \prod_{i=1}^n K_i(p), \quad (2.37)$$

т. е. передаточная функция последовательного соединения звеньев равна произведению передаточных функций звеньев, входящих в это соединение.

Передаточная функция параллельного соединения звеньев

При параллельном соединении звеньев [(рис. 2.5, б) входное воздействие для всех звеньев одно и то же, а результирующая выходная величина равна алгебраической сумме выходных величин звеньев:

$$X_{\text{вых}}(p) = \sum_{i=1}^n X_i(p). \quad (2.38)$$

Выходные величины звеньев определяются из уравнений этих звеньев:

$$\left. \begin{aligned} X_1(p) &= K_1(p) X_{\text{вх}}(p); \\ X_2(p) &= K_2(p) X_{\text{вх}}(p); \\ &\dots \dots \dots \\ X_n(p) &= K_n(p) X_{\text{вх}}(p). \end{aligned} \right\} \quad (2.39)$$

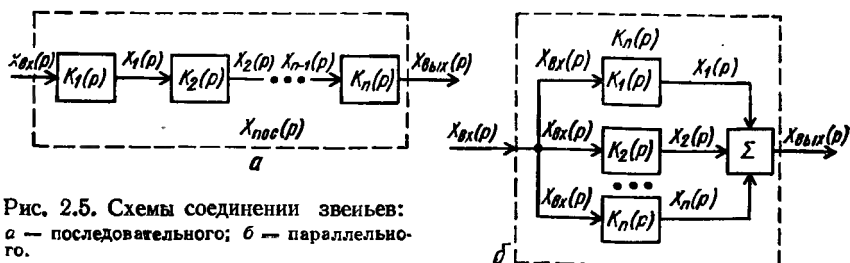


Рис. 2.5. Схемы соединения звеньев:
а — последовательного; б — параллельного.

Подставляя значения $X_i(p)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) из (2.38) в (2.38), получаем уравнение параллельного соединения звеньев:

$$X_{\text{вых}}(p) = [K_1(p) + K_2(p) + \dots + K_n(p)] X_{\text{вх}}(p).$$

Из этого уравнения находим передаточную функцию $K_n(p)$ параллельного соединения n звеньев:

$$K_n(p) = X_{\text{вых}}(p)/X_{\text{вх}}(p) = K_1(p) + K_2(p) + \dots + K_n(p) = \sum_{i=1}^n K_i(p), \quad (2.40)$$

т. е. передаточная функция параллельного соединения звеньев равна сумме передаточных функций звеньев, входящих в соединение.

Передаточная функция звена, охваченного обратной связью

Обратной связью называется цепь передачи воздействий с выхода звена (системы) на ее вход. Наряду с главной обратной связью, с помощью которой реализуется принцип управления по отклонению, в САУ для повышения точности часто применяются местные обратные связи, охватывающие одно или несколько звеньев (рис. 2.6). Обратные связи бывают отрицательные и положительные. При отрицательной обратной связи воздействие $X_1(p)$, поступающее на вход звена в прямой цепи, равно разности воздействий $X_{\text{вх}}(p)$ и $X_{\text{о.с.}}(p)$, а при положительной — их сумме:

$$X_1(p) = X_{\text{вх}}(p) \mp X_{\text{о.с.}}(p). \quad (2.41)$$

Последнее выражение называется уравнением замыкания контура.

Для получения уравнения звена с обратной связью запишем уравнения звеньев в прямой цепи и цепи обратной связи:

$$X_{\text{вых}}(p) = K_1(p) X_1(p); \quad (2.42)$$

$$X_{\text{о.с.}}(p) = K_{\text{о.с.}}(p) X_{\text{вых}}(p). \quad (2.43)$$

Значение $X_{\text{о.с.}}(p)$ из (2.43) подставляем в (2.41):

$$X_1(p) = X_{\text{вх}}(p) \mp K_{\text{о.с.}}(p) X_{\text{вых}}(p),$$

а полученное значение $X_1(p)$ в (2.42):

$$X_{\text{вых}}(p) = K_1(p) X_{\text{вх}}(p) \mp K_1(p) K_{\text{о.с.}}(p) X_{\text{вых}}(p),$$

или

$$[1 \pm K_1(p) K_{\text{о.с.}}(p)] \times \\ \times X_{\text{вых}}(p) = K_1(p) X_{\text{вх}}(p). \quad (2.44)$$

Из этого уравнения определяем передаточную функцию звена с

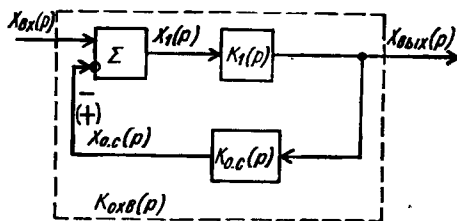


Рис. 2.6. Схема звена, охваченного обратной связью.

обратной связью:

$$K_{\text{о.с.}}(p) = \frac{X_{\text{вых}}(p)}{X_{\text{вх}}(p)} = \frac{K_1(p)}{1 \pm K_1(p) K_{\text{о.с.}}(p)}, \quad (2.45)$$

где знак «+» соответствует отрицательной, а «-» — положительной обратной связи.

Если окажется, что в некоторой области значений p произведение $|K_{\text{о.с.}}(p)K_1(p)| \gg 1$, то выражение (2.45) для этих значений может быть записано в виде $K_{\text{о.с.}}(p) = 1/(\pm K_{\text{о.с.}}(p))$, т. е. передаточная функция звена, охваченного обратной связью, равна величине, обратной передаточной функции звена, включенного в цепь обратной связи. Поэтому изменение параметров звена в прямой цепи мало влияет на $K_{\text{о.с.}}(p)$.

В случае, если в обратной связи отсутствует какое-либо звено, т. е. имеет место единичная обратная связь $K_{\text{о.с.}}(p) = 1$, то

$$K_{\text{о.с.}}(p) = K_1(p)/(1 \pm K_1(p)). \quad (2.46)$$

Используя полученные выражения передаточных функций типовых соединений звеньев, можно сложную структурную схему системы привести к схеме, состоящей из ряда последовательно включенных звеньев и тем самым облегчить определение передаточной функции системы.

2.4. Передаточные функции систем автоматического управления в разомкнутом и замкнутом состояниях

Передаточная функция системы в разомкнутом состоянии

Передаточная функция одноконтурной системы в разомкнутом состоянии. В одноконтурной системе нет местных обратных связей и поэтому имеется только один замкнутый контур, образованный с помощью главной обратной связи. Примером одноконтурной системы является следящая система (рис. 1.14, а), структурная схема которой изображена на рис. 2.4. Для определения передаточной функции системы в разомкнутом состоянии размыкают систему. Для этого обычно разрывают обратную связь. В разомкнутой системе управляемая величина (угол поворота приемного вала $\beta(t)$) не подается на вход системы и поэтому величина угла $\theta(t)$ между роторами сельсинов ВС и ВЕ не равна разности между $\alpha(t)$ и $\beta(t)$, т. е. $\theta(t) \neq \alpha(t) - \beta(t)$. Входной величиной разомкнутой системы является $\theta(t)$, а выходной — угол поворота приемного вала $\beta(t)$.

Рассматриваемая система в разомкнутом состоянии состоит из последовательно соединенных звеньев. Поэтому передаточная функция этой системы в разомкнутом состоянии в соответствии с выражением (2.37) равна произведению передаточных функций звеньев системы:

$$\begin{aligned} K_p(p) &= K_{\text{ст}}(p) K_{\text{фд}}(p) K_{\text{ЭМУ1}}(p) K_{\text{ЭМУ2}}(p) K_{\text{д}}(p) K_{\text{н}}(p) K_{\text{ред}}(p) = \\ &= \beta(p)/\theta(p). \end{aligned}$$

Если система имеет неединичную обратную связь, то передаточная функция звена в обратной связи $K_{o.c}(p)$ входит сомножителем в передаточную функцию разомкнутой системы. После подстановки в формулу для $K_p(p)$ значений передаточных функций элементов

$$K_p(p) = \frac{k_p}{(T_y p + 1)(T_q p + 1)(T^2 p^2 + 2\xi T p + 1)p}, \quad (2.47)$$

где $k_p = k_{ст} k_{фд} k_{эм} k_{му} k_{д} k_{и} k_{ред}$ — коэффициент усиления разомкнутой системы, или после преобразования:

$$K_p(p) = \frac{k_p}{a_0 p^5 + a_1 p^4 + a_2 p^3 + a_3 p^2 + a_4 p} = \frac{D(p)}{F_0(p)p} = \frac{D(p)}{F(p)} = \frac{\beta(p)}{\theta(p)}, \quad (2.48)$$

где

$$a_0 = T_y T_q T^2; \quad a_1 = T_y T^2 + T_q T^2 + T_y T_q 2\xi T;$$

$$a_2 = (T_y + T_q) 2\xi T + T_y T_q + T^2; \quad a_3 = T_y + T_q + 2\xi T; \quad a_4 = 1;$$

$D(p)$ и $F(p)$ — обозначения полиномов от p числителя и знаменателя $K_p(p)$; $F_0(p)$ — обозначение полинома знаменателя без сомножителя p .

Передаточная функция многоконтурной системы с простыми обратными связями в разомкнутом состоянии. Часто для повышения точности систем автоматического управления в них вводят местные обратные связи, охватывающие одно или несколько звеньев и образующие местные замкнутые контуры. Такие системы называются многоконтурными. Для определения передаточной функции многоконтурных систем их структурные схемы обычно преобразуют к эквивалентным одноконтурным схемам. При таком преобразовании последовательно соединенные звенья системы, звенья, включенные параллельно, и звенья, охваченные обратными связями, заменяются эквивалентными звеньями с соответствующими передаточными функциями по правилам, изложенным в предыдущем параграфе.

Рассмотрим методику преобразования структурной схемы многоконтурной следящей системы к эквивалентной одноконтурной на конкретном примере. Пусть требуется определить передаточную функцию следящей системы в разомкнутом состоянии, структурная схема которой изображена на рис. 2.7, а. Система имеет две местные обратные связи, охватывающие отдельные звенья, и главную обратную связь. Кроме того, звенья с передаточными функциями $K_5(p)$ и $K_6(p)$ включены параллельно.

Преобразование структурной схемы можно производить в следующей последовательности. Заменяем два последовательно соединенных звена с передаточными функциями $K_1(p)$ и $K_2(p)$ эквивалентным звеном с передаточной функцией $K_{1-2}(p) = K_1(p) K_2(p)$, а два параллельно соединенных звена с передаточными функциями $K_5(p)$ и $K_6(p)$ — эквивалентным звеном с передаточной функцией $K_{5-6}(p) = K_5(p) + K_6(p)$. В результате такого преобразования получим

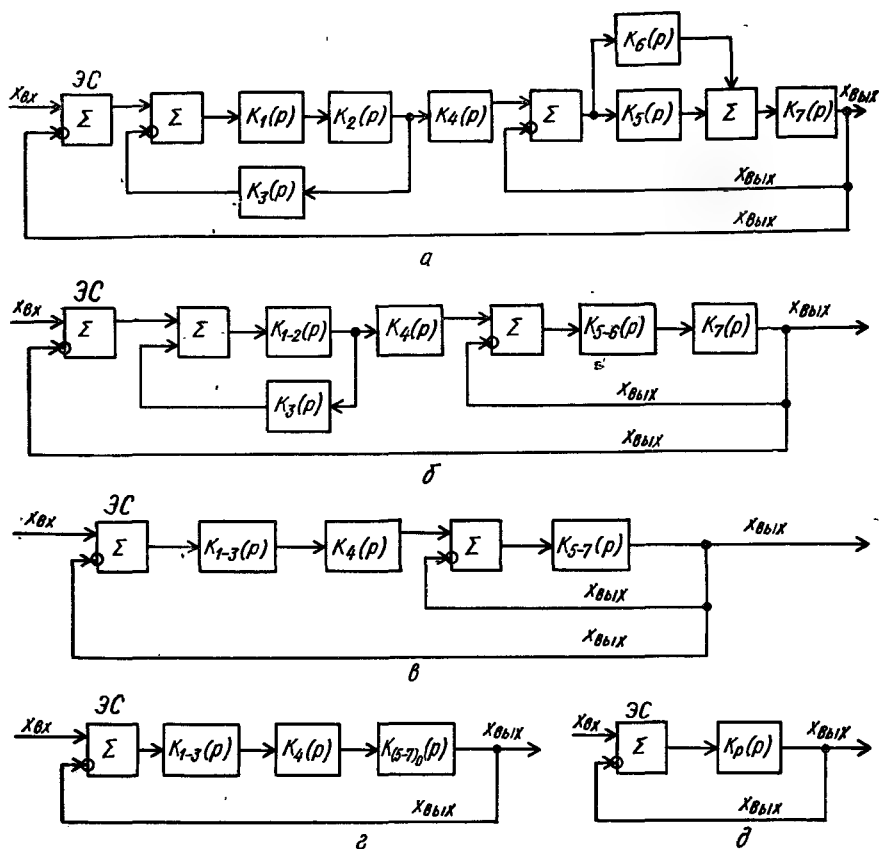
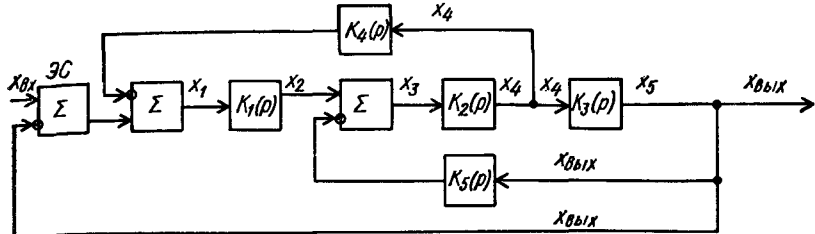


Рис. 2.7. Этапы преобразования структурной схемы многоконтурной системы с простыми обратными связями к эквивалентной одноконтурной.

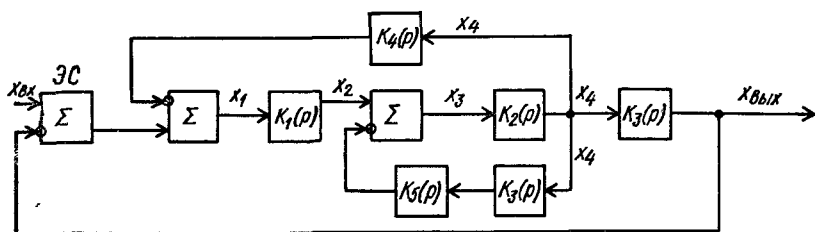
структурную схему (рис. 2.7, б). Заменяя звено с передаточной функцией $K_{1-2}(p)$, охваченное обратной связью, эквивалентным звеном с передаточной функцией $K_{1-3}(p) = K_{1-2}(p) / [1 + K_3(p)K_{1-2}(p)]$, а последовательно соединенные звенья с передаточными функциями $K_{5-6}(p)$ и $K_7(p)$ — звеном с передаточной функцией $K_{5-7}(p) = K_{5-6}(p)K_7(p)$, получим схему, представленную на рис. 2.7, в.

Заменив звено $K_{5-7}(p)$, охваченное обратной связью, эквивалентным звеном с передаточной функцией $K_{5-70}(p) = K_{5-7}(p) / [1 + K_{5-7}(p)]$, получим одноконтурную схему системы, показанную на рис. 2.7, г.

Замена трех последовательно соединенных звеньев в прямой цепи системы одним эквивалентным звеном с передаточной функцией $K_p(p) = K_{1-3}(p)K_4(p)K_{5-70}(p)$, являющейся передаточной функцией разомкнутой системы, дает окончательный вид структурной схемы эквивалентной одноконтурной системы (рис. 2.7, д). Аналогичные



а



б

Рис. 2.8. Преобразование структурной схемы многоконтурной системы с перекрещивающимися обратными связями.

преобразования позволяют определить передаточную функцию $K_p(p)$ любой многоконтурной системы с простыми обратными связями.

Передаточная функция многоконтурной системы с перекрещивающимися обратными связями в разомкнутом состоянии. На практике встречаются системы с перекрещивающимися обратными связями, когда обратная связь охватывает группу звеньев, содержащих только начало или конец другой цепи обратной связи (рис. 2.8, а). Для нахождения передаточной функции такой системы необходимо ее структурную схему сначала преобразовать в схему, содержащую простые неперекрещивающиеся обратные связи, а затем в соответствии с изложенной выше методикой преобразовать последнюю в одноконтурную систему.

Преобразование структурной схемы с перекрещивающимися обратными связями в схему с простыми обратными связями осуществляется с помощью способа переключения связей, сущность которого состоит в следующем. Из рис. 2.8, а видно, что сигнал $x_4(t)$, поступающий в контур обратной связи, содержащий звено $K_5(p)$, предварительно проходит через звено $K_3(p)$. Через это же звено проходит сигнал $x_4(t)$ также на выход системы, т. е. проходит сигнал прямой цепи. Поэтому, если вход рассматриваемой цепи обратной связи переключить к выходу звена $K_2(p)$, подсоединив звено $K_3(p)$ в цепь обратной связи последовательно со звеном $K_5(p)$ и в то же время оставив звено с передаточной функцией $K_3(p)$ в прямой цепи системы (рис. 2.8, б), то работа системы не изменится. Преобразованная схема уже не имеет перекрещивающихся обратных связей и может быть легко преобразована к одноконтурной схеме и найдена передаточная функция $K_p(p)$. Схему, изображенную на рис. 2.8, а, можно было бы также преобразо-

вать переключением выхода обратной связи, содержащей звено $K_4(p)$, на выход звена $K_1(p)$. При преобразовании схем следует иметь в виду, что переключение входа или выхода обратной связи следует производить в ту точку системы, к которой присоединен вход или выход другой обратной связи.

Передаточные функции замкнутой системы

Передаточные функции замкнутой системы по отношению к задающему и возмущающему воздействиям. В замкнутой системе (рис. 2.9) управляемая величина $\beta(t)$ через обратную связь подается на ее вход (на элемент сравнения). В общем случае к системе приложены задающее $\alpha(t)$ и возмущающее $L(t)$ воздействия. Оба этих воздействия оказывают влияние на управляемую величину $\beta(t)$. Поэтому при анализе замкнутой системы интересуют передаточные функции, связывающие $\beta(t)$ с $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ с $L(t)$. Для определения этих передаточных функций составим уравнение замкнутой системы. Рассмотрим случай, когда система имеет единичную обратную связь ($K_{oc}(p) = 1$). В соответствии с рис. 2.9 имеем:

$$\left. \begin{aligned} \theta(p) &= \alpha(p) - \beta(p); \\ \beta(p) &= K_p(p) \theta(p) + K_L(p) L(p), \end{aligned} \right\} \quad (2.49)$$

где $K_p(p)$ и $K_L(p)$ — передаточные функции системы в разомкнутом состоянии и канала возмущения соответственно. Подставив значение $\theta(p)$ из первого уравнения во второе, получаем уравнение системы в замкнутом состоянии:

$$[1 + K_p(p)] \beta(p) = K_p(p) \alpha(p) + K_L(p) L(p), \quad (2.50)$$

откуда находим изображение управляемой величины

$$\beta(p) = \beta_\alpha(p) + \beta_L(p), \quad (2.51)$$

где

$$\beta_\alpha(p) = \{K_p(p) / [1 + K_p(p)]\} \alpha(p) \quad (2.52)$$

— составляющая управляемой величины, обусловленная действием задающего воздействия (полезная составляющая);

$$\beta_L(p) = \{K_L(p) / [1 + K_p(p)]\} L(p) \quad (2.53)$$

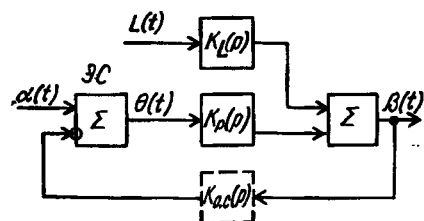


Рис. 2.9. Структурная схема замкнутой САУ.

— составляющая управляемой величины, вызванная возмущающим воздействием $L(p)$ (отклонение управляемой величины, вызванное $L(t)$).

Из выражения (2.52) определяем передаточную функцию замкнутой системы, связывающую $\beta(p)$ и $\alpha(p)$ — передаточную функцию замкнутой системы по отношению к

задающему воздействию (или просто передаточную функцию замкнутой системы):

$$K_{\beta\alpha}(p) = K_s(p) = \beta_\alpha(p)/\alpha(p) = K_p(p)/[1 + K_p(p)]. \quad (2.54)$$

Эта передаточная функция характерна для следящей и программной систем.

Из выражения (2.54) следует, что если в некоторой области значений p $|K_p(p)| \gg 1$, то $K_s(p) \approx 1$ и поэтому $\beta_\alpha(p) \approx \alpha(p)$, т. е. система при $L(t) = 0$ воспроизводит задающее воздействие без заметных искажений.

В выражении (2.54) для $K_s(p)$ передаточная функция $K_p(p)$ входит как в знаменатель, так и в числитель. Поэтому изменение $K_p(p)$ за счет изменения параметров прямой цепи системы мало влияет на $K_s(p)$. Это подтверждает вывод, сделанный при рассмотрении принципов управления, что системы с обратной связью менее чувствительны к изменениям параметров элементов, включенных в их прямую цепь, чем разомкнутые системы. Этим преимуществом отчасти объясняется широкое распространение замкнутых САУ.

Замкнутая система и звено с единичной обратной связью имеют аналогичные структурные схемы, и их передаточные функции описываются аналогичными выражениями (2.46) и (2.54).

Если система (рис. 2.9) имеет неединичную обратную связь (в обратную связь включено звено с передаточной функцией $K_{o.c}(p) \neq 1$), то передаточная функция замкнутой системы имеет вид, аналогичный передаточной функции звена с неединичной обратной связью (2.45):

$$K_s(p) = K_p(p)/[1 + K_{o.c}(p) K_p(p)]. \quad (2.55)$$

Из выражения (2.53) находим передаточную функцию, связывающую $\beta_\Sigma(t)$ и $L(t)$ — передаточную функцию замкнутой системы по отношению к возмущающему воздействию (или просто передаточную функцию системы по возмущению):

$$K_{\beta L}(p) = \beta_L(p)/L(p) = K_L(p)/[1 + K_p(p)]. \quad (2.56)$$

Эта передаточная функция характерна для следящей системы, подверженной влиянию возмущающего воздействия, и для системы стабилизации.

Передаточные функции системы по ошибке. Целью исследования САУ является определение ее ошибки $\theta(t)$, возникающей при изменении задающего $\alpha(t)$ и возмущающего $L(t)$ воздействий, а также нахождение способов уменьшения этой ошибки. Поэтому исследование системы упрощается, если пользоваться передаточными функциями, непосредственно связывающими $\theta(t)$ с $\alpha(t)$ и $\theta(t)$ с $L(t)$. Для определения этих передаточных функций составим уравнение замкнутой системы для ошибки.

Из первого уравнения (2.49) определяем $\beta(p) = \alpha(p) - \theta(p)$ и после подстановки во второе получаем уравнение системы для ошибки

$$[1 + K_p(p)] \theta(p) = \alpha(p) + K_L(p) L(p). \quad (2.57)$$

Из этого уравнения находим изображение ошибки системы

$$\theta(p) = \theta_\alpha(p) + \theta_L(p), \quad (2.58)$$

где

$$\theta_{\alpha}(p) = \{1/[1 + K_p(p)]\} \alpha(p) \quad (2.59)$$

— составляющая ошибки, вызываемая изменением задающего воздействия $\alpha(p)$;

$$\theta_L(p) = \{K_L(p)/[1 + K_p(p)]\} L(p) \quad (2.60)$$

— составляющая ошибки, вызываемая возмущающим воздействием $L(p)$.

Из выражения (2.59) находим передаточную функцию, связывающую $\theta_{\alpha}(p)$ и $\alpha(p)$ — передаточную функцию системы по ошибке, вызываемой задающим воздействием (или просто передаточную функцию системы по ошибке):

$$K_{\theta\alpha}(p) = \theta_{\alpha}(p)/\alpha(p) = 1/[1 + K_p(p)]. \quad (2.61)$$

С помощью формулы (2.61) устанавливается связь между $K_{\theta\alpha}(p)$ и передаточной функцией системы в разомкнутом состоянии $K_p(p)$. Выразим $K_{\theta\alpha}(p)$ через передаточную функцию замкнутой системы $K_s(p)$:

$$K_{\theta\alpha}(p) = \frac{1}{1 + K_p(p)} = \frac{1 + K_p(p) - K_p(p)}{1 + K_p(p)} = 1 - K_s(p). \quad (2.62)$$

Из выражения (2.61) следует, что если в некоторой области значений p $|K_p(p)| \rightarrow \infty$, то $K_{\theta\alpha}(p) \rightarrow 0$, а следовательно, и $\theta_{\alpha}(p) \rightarrow 0$. Передаточная функция $K_{\theta\alpha}(p)$ характерна для следящих и программных систем.

Используя (2.60), получаем передаточную функцию системы $K_{\theta L}(p)$, связывающую $\theta_L(p)$ и $L(p)$, т. е. передаточную функцию системы по ошибке, вызываемой возмущающим воздействием $L(p)$:

$$K_{\theta L}(p) = \theta_L(p)/L(p) = K_L(p)/[1 + K_p(p)]. \quad (2.63)$$

Сравнивая выражения (2.53) и (2.60), находим, что $\beta_L(p) = \theta_L(0)$, т. е. составляющая $\beta_L(t)$ управляемой величины, вызванная возмущающим воздействием $L(t)$, есть отклонение $\theta_L(t)$, возникшее в результате влияния этого воздействия. Из выражений (2.56) и (2.63) следует, что $K_{\beta L}(p) = K_{\theta L}(p)$.

2.5. Передаточные функции статических и астатических САУ

Передаточные функции по ошибке статических и астатических САУ

САУ в зависимости от ошибки в установившемся режиме при постоянном возмущающем (задающем) воздействии делятся на *статические* и *астатические*. Выясним, какие передаточные функции присущи тем и другим системам. Поскольку ошибки, вызываемые задающим и возмущающими воздействиями в одной и той же системе в общем случае различны (см., например, (2.59) и (2.60)), то рассматривают свойство астатизма системы по отношению к конкретному воздействию,

В следящих системах интересуются, в первую очередь астатизмом по отношению к задающему воздействию, а в системах стабилизации по отношению к основному возмущающему воздействию. Для примера рассмотрим следящую систему и исследуем вопросы астатизма по отношению к задающему воздействию.

В следящей системе составляющая ошибки $\theta_\alpha(p)$, вызываемая задающим воздействием $\alpha(p)$, определяется с помощью формулы (2.59). Запишем эту формулу в следующем виде:

$$\theta_\alpha(p) = [1/(1 + K_p(p))] \alpha(p) = K_{\theta\alpha}(p) \alpha(p), \quad (2.64)$$

где $K_{\theta\alpha}(p)$ — передаточная функция системы по ошибке. В соответствии с теоремой операционного исчисления о конечном значении оригинала

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta_\alpha(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \theta_\alpha(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p K_{\theta\alpha}(p) \alpha(p). \quad (2.65)$$

Система будет статической по отношению к $\alpha(p)$, если она будет иметь ошибку в установившемся режиме, т. е. если $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta_\alpha(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p K_{\theta\alpha}(p) \alpha(p) \neq 0$, и астатической, если в установившемся режиме ошибка системы равна нулю, т. е. если $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta_\alpha(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p K_{\theta\alpha}(p) \alpha(p) = 0$ при условии, что задающее воздействие представляет собой ступенчатую функцию $\alpha(t) = \alpha_0 l(t)$.

Выясним, каким требованиям должна удовлетворять передаточная функция по ошибке, чтобы система была статической или астатической по отношению к задающему воздействию, изменяющемуся по закону ступенчатой функции. Подставим изображение ступенчатой функции $\alpha(p) = L[\alpha_0 l(t)] = \alpha_0/p$ в формулу (2.65):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta_\alpha(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p K_{\theta\alpha}(p) \alpha_0/p = \lim_{p \rightarrow 0} K_{\theta\alpha}(p) \alpha_0. \quad (2.66)$$

Из выражения (2.66) можно сделать следующие выводы.

1. Система будет *статической*, если

$$\lim_{p \rightarrow 0} K_{\theta\alpha}(p) \neq 0, \quad (2.67)$$

т. е. если числитель передаточной функции $K_{\theta\alpha}(p)$ будет иметь свободные, не зависящие от p члены. Для замкнутой системы это соответствует случаю, когда в ней нет интегрирующего звена, т. е. передаточная функция системы в разомкнутом состоянии имеет вид $K_p(p) = D(p)/F_0(p)$, где $F_0(p)$ — полином от p , в котором p не является общим множителем и поэтому имеет свободные от p члены. Например, для системы, содержащей два апериодических звена, $F_0(p) = (T_1 p + 1)(T_2 p + 1) = a_0 p^2 + a_1 p + 1$, т. е. $F_0(p)$ содержит свободный от p член, равный единице, и поэтому

$$\lim_{p \rightarrow 0} F_0(p) \neq 0. \quad (2.68)$$

Передаточная функция системы по ошибке в этом случае равна

$$K_{\theta\alpha}(p) = \frac{1}{1 + K_p(p)} = \frac{1}{1 + D(p)/F_0(p)} = \frac{F_0(p)}{F_0(p) + D(p)}.$$

С учетом (2.68)

$$\lim_{p \rightarrow 0} K_{\theta\alpha}(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \{F_0(p)/[F_0(p) + D(p)]\} \neq 0,$$

т. е. выполняется условие (2.67), и поэтому замкнутая система без интегрирующего звена действительно является статической.

2. Система будет *астатической* (ошибка в установившемся режиме равна нулю), если $\lim_{p \rightarrow 0} K_{\theta\alpha}(p) = 0$, т. е. если передаточная функция по ошибке $K_{\theta\alpha}(p)$ имеет нуль какого-либо порядка при $p = 0$.

Передаточная функция $K_{\theta\alpha}(p)$ будет иметь нуль первого порядка, если в замкнутой системе содержится одно интегрирующее звено. Действительно, передаточная функция системы с интегрирующим звеном в разомкнутом состоянии $K_p(p) = D(p)/F_0(p)p$, а передаточная функция системы по ошибке

$$K_{\theta\alpha}(p) = \frac{1}{1 + K_p(p)} = \frac{F_0(p)p}{F_0(p)p + D(p)} = K_{\theta\alpha_0}(p)p,$$

где

$$K_{\theta\alpha_0}(p) = F_0(p)/[F_0(p)p + D(p)]; \quad \lim_{p \rightarrow 0} K_{\theta\alpha_0}(p) \neq 0.$$

Из формулы для $K_{\theta\alpha}(p)$ следует:

$$\lim_{p \rightarrow 0} K_{\theta\alpha}(p) = \lim_{p \rightarrow 0} K_{\theta\alpha_0}(p)p = 0, \text{ или } K_{\theta\alpha}(0) = 0,$$

т. е. передаточная функция по ошибке при $p = 0$ имеет нуль первого порядка.

Если замкнутая система имеет два интегрирующих звена, то ее передаточная функция в разомкнутом состоянии $K_p(p) = D(p)/F_0(p)p^2$, а передаточная функция по ошибке

$$K_{\theta\alpha}(p) = \frac{F_0(p)p^2}{F_0(p)p^2 + D(p)} = K_{\theta\alpha_0}(p)p^2,$$

т. е. передаточная функция по ошибке при $p = 0$ имеет нуль второго порядка.

Система имеет астатизм ν -го порядка, если передаточная функция системы по ошибке имеет нуль ν -го порядка при $p = 0$. Так, у замкнутой системы с одним интегрирующим звеном $K_{\theta\alpha}(p)$ имеет нуль первого порядка при $p = 0$ и, следовательно, система является астатической с астатизмом первого порядка; система с двумя интегрирующими звеньями имеет астатизм второго порядка и т. д. Если у замкнутой системы нет интегрирующего звена, то она имеет астатизм нулевого порядка и будет статической.

Примером следящей системы с астатизмом первого порядка является система, принципиальная и структурная схемы которой изображены на рис. 1.14, а и рис. 2.4 соответственно, а передаточная функ-

ция в разомкнутом состоянии описывается формулой (2.47). В прямой цепи этой системы имеется одно интегрирующее звено, входящее в математическую модель двигателя.

Выше было описано, каким требованиям удовлетворяют передаточные функции по ошибке статических и астатических систем по отношению к задающему воздействию. Очевидно, что аналогичным требованиям должны удовлетворять и передаточные функции по ошибке относительно возмущающего воздействия (см., например, формулу (2.63)) статических и астатических систем по отношению к этому воздействию. Повышения порядка астатизма системы по отношению к возмущающему воздействию также можно добиться включением интегрирующих звеньев в замкнутую систему. Однако место их включения в этом случае зависит от места приложения возмущающего воздействия.

Одним из способов реализации требуемого порядка астатизма является включение в прямую цепь замкнутой системы интегрирующих звеньев. Другим способом повышения порядка астатизма относительно задающего и возмущающего воздействий является введение компенсационных каналов по задающему и возмущающему воздействиям.

Ошибки САУ в установившихся режимах

Ранее была определена ошибка системы в установившемся режиме при подаче на ее вход задающего воздействия в виде ступенчатой функции, у которой первая и производные более высокого порядка в установившемся режиме равны нулю. Однако на практике задающее воздействие $\alpha(t)$ может быть различной функцией времени, содержащей первую производную, равную скорости изменения задающего воздействия, вторую производную, равную ускорению воздействия, и производные более высокого порядка. Так, задающее воздействие, изменяющееся по закону $\alpha(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t$ (рис. 2.10, а), где α_0 — начальное значение (скачок) $\alpha(t)$, имеет первую производную $d\alpha(t)/dt = \alpha_1 = \text{const}$, которая при $t = 0$ изменяется скачком (рис. 2.10, б). Вторая производная от $\alpha(t)$ равна нулю. Такой закон изменения задающего воздействия встречается, например, в режиме захвата цели системой автосопровождения. В этом случае α_0 — начальное значение координаты цели (начальное рассогласование), α_1 — скорость цели.

В общем случае задающее воздействие $\alpha(t)$ может содержать r производных и представлено в виде полинома от времени t :

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots + \alpha_r t^r, \quad (2.69)$$

где α_0 — начальное значение задающего воздействия; α_1 , $2! \alpha_2$, ..., $(r-1)! \alpha_{r-1}$ — начальные значения от первой до

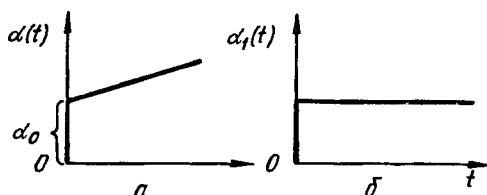


Рис. 2.10. Задающее воздействие, изменяющееся по закону $\alpha(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t$ (а) и его первая производная (б).

$(r - 1)$ -й производных задающего воздействия; $r! \alpha_r = \text{const}$ — значение r -й производной задающего воздействия.

Найдем общее выражение для ошибки системы с астатизмом ν -го порядка в установившемся режиме при задающем воздействии, имеющем r производных.

Для этого запишем изображение задающего воздействия (2.69)

$$\alpha(p) = \alpha_0/p + \alpha_1/p^2 + 2! \alpha_2/p^3 + \dots + r! \alpha_r/p^{r+1} \quad (2.70)$$

и передаточную функцию по ошибке системы с астатизмом ν -го порядка

$$K_{\theta\alpha}(p) = K_{\theta\alpha_0}(p) p^\nu. \quad (2.71)$$

Подставив значение $K_{\theta\alpha}(p)$ из формулы (2.71) в формулу (2.65), имеем

$$\theta_{\text{уст}}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \theta_\alpha(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p K_{\theta\alpha_0}(p) p^\nu \alpha(p). \quad (2.72)$$

После подстановки в эту формулу значения $\alpha(p)$ из формулы (2.70) получаем общее выражение для установившейся ошибки системы:

$$\theta_{\text{уст}}(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p^{\nu+1} K_{\theta\alpha_0}(p) \left[\frac{\alpha_0}{p} + \frac{\alpha_1}{p^2} + \frac{2! \alpha_2}{p^3} + \dots + \frac{r! \alpha_r}{p^{r+1}} \right]. \quad (2.73)$$

Из этого выражения получаем следующее.

1. Если $\nu > r$, то $\theta_{\text{уст}}(t) = 0$, т. е. если порядок астатизма системы больше, чем порядок высшей производной задающего воздействия, то ошибка системы в установившемся режиме равна нулю.

2. Если $\nu = r$, то $\theta_{\text{уст}}(t) = K_{\theta\alpha_0}(0) r! \alpha_r$, т. е. если порядок астатизма системы равен порядку высшей производной задающего воздействия, то ошибка системы в установившемся режиме будет иметь определенное значение. Эта ошибка, как видно из выражения (2.73) и последнего выражения, будет вызываться действием только высшей производной задающего воздействия. Составляющие же ошибки от других производных задающего воздействия и начального скачка самого воздействия в этом случае равны нулю.

3. Если $\nu < r$, то $\theta_{\text{уст}}(t) = \infty$, т. е. если порядок астатизма системы ниже, чем порядок высшей производной задающего воздействия, то ошибка системы с течением времени будет увеличиваться до бесконечности.

Следует различать *статический* установившийся режим, когда задающее воздействие не изменяется во времени, и *динамический* установившийся режим, когда r -я производная от задающего воздействия есть величина постоянная. Например, в следящей системе режимы равномерного (когда первая производная $\alpha_1 = \text{const}$), равноускоренного (вторая производная $\alpha_2 = \text{const}$) и т. д. вращений ведущего вала являются динамическими установившимися режимами. В соответствии с этим различают статические и динамические установившиеся ошибки системы. Ошибки, возникающие при статическом установившемся режиме, называются статическими, а при динамическом установившемся режиме — динамическими.

Установившиеся ошибки следящей системы с астатизмом первого порядка

Для примера определим установившиеся ошибки наиболее распространенной в технике следящей системы с астатизмом первого порядка при следующих законах изменения задающего воздействия:

$$\alpha(t) = \alpha_0 1(t); \quad \alpha(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t; \quad \alpha(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2.$$

Формула (2.72) для установившейся ошибки применительно к системе с астатизмом первого порядка ($\nu = 1$) принимает вид:

$$\theta_{\text{уст}}(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p^2 K_{\theta\alpha_0}(p) \alpha(p). \quad (2.74)$$

1. При подаче на вход системы ступенчатого задающего воздействия $\alpha(t) = \alpha_0 1(t)$ (при мгновенном повороте на угол α_0 ведущего вала следящей системы (см. рис. 1.14, а)) установившуюся ошибку получим, если в формулу (2.74) подставим значение изображения задающего воздействия $\alpha(p) = L[\alpha_0 1(t)] = \alpha_0/p$:

$$\theta_{\text{уст}}(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p^2 K_{\theta\alpha_0}(p) \alpha_0/p = 0.$$

Из этой формулы видно, что следящая система с астатизмом первого порядка не имеет ошибки в установившемся режиме при ступенчатом задающем воздействии, т. е. статическая ошибка в астатической системе равна нулю.

2. Если задающее воздействие изменяется по линейному закону $\alpha(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t$, то ошибку воспроизведения получим, подставив в формулу (2.74) изображение задающего воздействия $\alpha(p) = L[\alpha_0 + \alpha_1 t] = \alpha_0/p + \alpha_1/p^2$:

$$\theta_{\text{уст}}(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p^2 K_{\theta\alpha_0}(p) [\alpha_0/p + \alpha_1/p^2] = K_{\theta\alpha_0}(0) \alpha_1.$$

Учитывая, что $K_{\theta\alpha_0}(p) = F_0(p)/[F_0(p)p + D(p)]$; $D(0) = k_p$; $F_0(0) = 1$, а следовательно, $K_{\theta\alpha_0}(0) = 1/k_p$, получаем

$$\theta_{\text{уст}}(t) = \alpha_1/k_p, \quad (2.75)$$

т. е. в следящей системе с астатизмом первого порядка при изменении задающего воздействия с постоянной скоростью возникает постоянная установившаяся ошибка. Поскольку эта ошибка обусловлена первой производной (скоростью изменения) α_1 задающего воздействия, то обычно ее называют *скоростной ошибкой* системы. Как видно из формулы (2.75), скоростная ошибка пропорциональна скорости α_1 изменения задающего воздействия $\alpha(t)$ и обратно пропорциональна коэффициенту усиления системы в разомкнутом состоянии k_p . Отсюда следует, что при данном k_p с увеличением α_1 (скорости вращения ведущего вала следящей системы) пропорционально увеличивается и скоростная ошибка. Чтобы уменьшить последнюю, необходимо увеличивать коэффициент усиления системы в разомкнутом состоянии k_p .

В следящей системе в установившемся режиме управляемая величина $\beta(t)$ изменяется с той же скоростью α_1 , что и задающее воздействие $\alpha(t)$ (приемный вал вращается со скоростью ведущего). Поэтому в соответствии с формулой $\alpha_1 = k_p \theta_{\text{уст}}(t)$, полученной из выражения

(2.75), в следящей системе с астатизмом первого порядка k_p является коэффициентом пропорциональности между ошибкой системы в установившемся режиме и скоростью изменения управляемой величины (скоростью вращения приемного вала), т. е. представляет собой коэффициент усиления системы по скорости.

3. Если задающее воздействие изменяется по закону квадратичной функции (с постоянным ускорением α_2) $\alpha(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$, изображение которого имеет вид $\alpha(p) = \alpha_0/p + \alpha_1/p^2 + 2! \alpha_2/p^3$,

$$\theta_{\text{ауст}}(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p^2 K_{\theta \alpha_0}(p) [\alpha_0/p + \alpha_1/p^2 + 2! \alpha_2/p^3] = \infty.$$

Из этой формулы видно, что в следящей системе с астатизмом первого порядка при изменении задающего воздействия с постоянным ускорением ошибки растут до бесконечности.

Дополнительные статические ошибки САУ

Статическая ошибка в астатической системе теоретически равна нулю. Однако на практике оказывается, что астатическая система и в статическом установившемся режиме имеет ошибки. Эти ошибки вызываются в основном следующими факторами: наличием сил сухого трения, люфтов, зазоров и упругих деформаций в механических соединениях; появлением небаланса в двухтактных усилительно-преобразовательных схемах; наличием погрешностей элементов сравнения, проявляющихся в том, что на их выходе появляется напряжение даже при отсутствии ошибки (угла рассогласования между ведущим и приемным валом) системы; наличием остаточного намагничивания в магнитных, электромашинных усилителях и т. д. Ошибки системы, вызванные этими факторами, будем называть дополнительными статическими ошибками.

Дополнительные статические ошибки, вызванные наличием сухого трения и другими факторами в следящей системе, будут возникать не только в статическом, но и в динамическом установившемся режиме. Поэтому ошибка следящей системы в установившемся динамическом режиме будет складываться из дополнительной статической $\theta_{\text{ст}}$ и динамической $\theta_{\text{дин}}$ ошибок: $\theta_{\text{уст}} = \theta_{\text{ст}} + \theta_{\text{дин}}$. Определение статических ошибок $\theta_{\text{ст}}$ следящих систем производится из условия компенсации соответствующих возмущающих воздействий (момента сухого трения, небаланса двухтактных усилителей) дополнительным управляющим воздействием, возникающим благодаря увеличению ошибки системы.

Рассмотрим методику определения статических ошибок на примере определения статической ошибки, вызываемой моментом сил сухого трения. Если через k_m обозначить коэффициент усиления системы по моменту, то момент вращения, развиваемый исполнительным двигателем системы, $M_{\text{вр}} = k_m \theta$. Статическую ошибку $\theta_{\text{ст}}$, вызванную статическим моментом нагрузки $M_{\text{ст}}$ (момент сил сухого трения), найдем из уравнения $M_{\text{ст}} = M_{\text{вр}} = k_m \theta_{\text{ст}}$. Она оказывается равной $\theta_{\text{ст}} = M_{\text{вр}}/k_m$.

2.6. Уравнения динамики систем автоматического управления

Уравнение динамики системы в разомкнутом состоянии

Уравнение динамики разомкнутой системы, связывающее между собой входное воздействие $\theta(t)$ (в разомкнутой системе $\theta(t) \neq \alpha(t) = \beta(t)$) и выходную величину системы $\beta(t)$, можно найти либо из уравнений ее элементов исключением промежуточных переменных, либо из выражения для передаточной функции разомкнутой системы.

Если передаточная функция системы в разомкнутом состоянии

$$K_p(p) = D(p)/F(p) = \beta(p)/\theta(p), \quad (2.76)$$

то уравнение движения этой системы в разомкнутом состоянии будет иметь вид:

$$F(p)\beta(p) = D(p)\theta(p).$$

Если в выражении (2.76) для $K_p(p)$ полиномы $D(p)$ и $F(p)$ написать в развернутом виде, то общий вид передаточной функции разомкнутой системы, имеющий астатизм ν -го порядка, будет следующий:

$$\begin{aligned} K_p(p) &= D(p)/F(p) = D(p)/F_0(p) p^\nu = \\ &= \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m}{(a_0 p^k + a_1 p^{k-1} + \dots + a_{k-1} p + a_k) p^\nu} = \frac{\beta(p)}{\theta(p)}, \end{aligned} \quad (2.77)$$

а общий вид уравнения этой системы в разомкнутом состоянии:

$$\begin{aligned} (a_0 p^k + a_1 p^{k-1} + \dots + a_{k-1} p + a_k) p^\nu \beta(p) &= \\ = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m) \theta(p), \end{aligned} \quad (2.78)$$

или в дифференциальной форме:

$$\begin{aligned} a_0 \frac{d^n \beta(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} \beta(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{k-1} \frac{d^{1+\nu} \beta(t)}{dt^{1+\nu}} + \\ + a_k \frac{d^\nu \beta(t)}{dt^\nu} = b_0 \frac{d^m \theta(t)}{dt^m} + \dots + b_m \theta(t), \end{aligned} \quad (2.79)$$

где $n = k + \nu$ — порядок полинома $F(p)$ знаменателя передаточной функции разомкнутой системы; k — порядок полинома $F_0(p)$; $b_m = = k_p$, $a_k = 1$.

В реальных системах $n \geq m$, поэтому порядок уравнения разомкнутой системы равен n .

Уравнения динамики замкнутой системы

Уравнение динамики замкнутой системы находим либо из уравнений динамики ее элементов исключением промежуточных переменных (см., например, уравнение (2.49)), либо из передаточной функции замкнутой системы.

Передаточная функция замкнутой системы (см. рис. 2.9), как было показано (см. формулу (2.54)), равна

$$K_s(p) = K_p(p) / [1 + K_p(p)] = \beta(p) / \alpha(p).$$

Учитывая, что $K_p(p) = D(p) / F(p)$, получим

$$K_s(p) = D(p) / [F(p) + D(p)] = \beta(p) / \alpha(p),$$

откуда уравнение замкнутой системы

$$[F(p) + D(p)] \beta(p) = D(p) \alpha(p). \quad (2.80)$$

Для примера найдем уравнение замкнутой системы с астатизмом первого порядка, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии имеет вид:

$$K_p(p) = \frac{k_p(T_d p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)p} = \frac{b_0 p + b_1}{a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p} = \frac{D(p)}{F(p)},$$

где $b_0 = k_p T_d$; $b_1 = k_p$; $a_0 = T_1 T_2$; $a_1 = T_1 + T_2$; $a_2 = 1$.

Передаточная функция системы в замкнутом состоянии

$$\begin{aligned} K_s(p) &= \frac{D(p)}{F(p) + D(p)} = \frac{b_0 p + b_1}{a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + b_0 p + b_1} = \\ &= \frac{b_0 p + b_1}{c_0 p^3 + c_1 p^2 + c_2 p + c_3} = \frac{\beta(p)}{\alpha(p)}, \end{aligned}$$

где $c_0 = a_0$; $c_1 = a_1$; $c_2 = a_2 + b_0 = b_0 + 1$; $c_3 = b_1 = k_p$, откуда уравнение замкнутой системы в операционной форме

$$(c_0 p^3 + c_1 p^2 + c_2 p + c_3) \beta(p) = (b_0 p + b_1) \alpha(p).$$

Записывая полиномы $D(p)$ и $F(p)$ в выражении для $K_s(p)$ в развернутом виде, получим следующий вид передаточной функции замкнутой системы, имеющей астатизм v -го порядка,

$$\begin{aligned} K_s(p) &= D(p) / [F(p) + D(p)] = \\ &= \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m}{(a_0 p^k + a_1 p^{k-1} + \dots + a_{k-1} p + a_k) p^v + b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m} = \\ &= \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m}{c_0 p^n + c_1 p^{n-1} + \dots + c_{n-1} p + c_n} = \frac{\beta(p)}{\alpha(p)}, \end{aligned} \quad (2.81)$$

где $n = k + v$; $c_0, c_1, \dots, c_n$ — коэффициенты, равные сумме коэффициентов $a_0, a_1, \dots, a_k$ полинома $F(p)$ и $b_0, b_1, \dots, b_m$ полинома $D(p)$ при одинаковых степенях p . В соответствии с (2.81) общий вид уравнения замкнутой системы

$$\begin{aligned} (c_0 p^n + c_1 p^{n-1} + \dots + c_{n-1} p + c_n) \beta(p) = \\ = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m) \alpha(p). \end{aligned} \quad (2.82)$$

Уравнение замкнутой системы можно также получить из уравнения разомкнутой системы подстановкой $\theta(t) = \alpha(t) - \beta(t)$.

При анализе САУ иногда удобнее пользоваться уравнением динамики системы для ошибки. Это уравнение может быть получено либо

из уравнений звеньев системы исключением промежуточных переменных (см., например, уравнение (2.57)), либо с помощью передаточной функции по ошибке. В соответствии с формулой (2.61) передаточная функция по ошибке $K_{\theta\alpha}(p) = 1/[1 + K_p(p)] = \theta_\alpha(p)/\alpha(p)$, откуда уравнение системы для ошибки $\theta_\alpha(p)$:

$$[1 + K_p(p)] \theta_\alpha(p) = \alpha(p). \quad (2.83)$$

Из формулы (2.63) находим уравнение системы для ошибки $\theta_L(p)$:

$$[1 + K_p(p)] \theta_L(p) = K_L(p) L(p). \quad (2.84)$$

Уравнения динамики разомкнутой и замкнутой САУ используются для исследования динамических свойств, в частности, для определения устойчивости САУ (см. гл. 3).

2.7. Частотные характеристики звеньев и систем автоматического управления

Важной динамической характеристикой звеньев и систем автоматического управления являются частотные характеристики. На основе их использования разработаны инженерные частотные методы исследования САУ. Достоинство частотных методов анализа и синтеза САУ состоит в том, что частотные характеристики позволяют просто выявлять влияние того или иного параметра на динамические свойства системы (устойчивость, переходной процесс). Кроме того, частотные характеристики можно определить экспериментально. Это важно в тех случаях, когда трудно составить уравнения динамики (например, для систем с распределенными параметрами). Частотные характеристики звеньев и систем строятся на основании их комплексных передаточных функций.

Комплексная передаточная функция звена (системы)

Для получения наглядного представления о частотных характеристиках и выяснения их физического смысла сначала рассмотрим частотные характеристики на примере *апериодического звена*. Схема электрической цепи, представляемой апериодическим звеном, изображена на рис. 2.2, а. Уравнение звена в соответствии с формулой (2.1) имеет вид:

$$T \frac{du_2(t)}{dt} + u_2(t) = k u_1(t), \quad \text{где } T = \frac{L}{R_1 + R_2}; \quad k = \frac{R_2}{R_1 + R_2}. \quad (2.85)$$

Если на вход звена подать синусоидальное напряжение $u_1(t) = U_m \sin \omega t$, то после окончания переходного процесса на выходе звена также установятся синусоидальные колебания, но иной амплитуды и фазы, чем на входе: $u_2(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$.

Для анализа звена при синусоидальных колебаниях удобнее пользоваться символическим комплексным методом, который применяется в электротехнике. В соответствии с этим методом синусоидальные функции, входящие в дифференциальное уравнение, заменяются

их изображениями в виде комплексных чисел, а операции дифференцирования и интегрирования соответственно умножением и делением на $j\omega$ изображений функции, от которых берется производная или интеграл.

Комплексные изображения входного и выходного напряжений звена имеют вид:

$$\dot{u}_1 = U_{m1} e^{j\omega t}; \quad \dot{u}_2 = U_{m2} e^{j(\omega t + \varphi)}.$$

Поскольку $U_{m1} e^{j\omega t} = U_{m1} (\cos \omega t + j \sin \omega t)$, для перехода от изображений к функциям следует брать мнимую часть изображения и разделить на j :

$$U_{m1} \sin \omega t = [\operatorname{Im} (U_{m1} e^{j\omega t})] / j.$$

Запишем дифференциальное уравнение (2.85) апериодического звена в символической комплексной форме

$$T j \omega U_{m2} e^{j(\omega t + \varphi)} + U_{m2} e^{j(\omega t + \varphi)} = k U_{m1} e^{j\omega t},$$

или

$$(j\omega T + 1) U_{m2} e^{j(\omega t + \varphi)} = k U_{m1} e^{j\omega t}. \quad (2.86)$$

Из уравнения (2.86) можно определить U_{m2} и φ , а также найти комплексную передаточную функцию звена.

Комплексная передаточная функция (КПФ) звена (системы) представляет собой отношение изображений в виде комплексных чисел выходной и входной величин звена (системы) в установившемся режиме гармонических колебаний, т. е.

$$K(j\omega) = \dot{u}_2 / \dot{u}_1. \quad (2.87)$$

КПФ еще называют комплексным коэффициентом усиления, комплексной частотной функцией или частотной характеристикой.

Комплексная передаточная функция апериодического звена в соответствии с (2.86)

$$K(j\omega) = \frac{\dot{u}_2}{\dot{u}_1} = \frac{U_{m2} e^{j(\omega t + \varphi)}}{U_{m1} e^{j\omega t}} = \frac{k}{1 + j\omega T}. \quad (2.88)$$

Данная передаточная функция является комплексной, так как представляет отношение комплексных функций. КПФ можно представить в алгебраической и показательной формах.

Алгебраическая форма КПФ:

$$K(j\omega) = \frac{k(1 - j\omega T)}{(1 + j\omega T)(1 - j\omega T)} = \frac{k}{1 + \omega^2 T^2} - j \frac{k\omega T}{1 + \omega^2 T^2} = P(\omega) + jQ(\omega), \quad (2.89)$$

где

$P(\omega) = \frac{k}{1 + \omega^2 T^2}$; $Q(\omega) = -\frac{k\omega T}{1 + \omega^2 T^2}$ — вещественная и мнимая части КПФ соответственно.

$$K(j\omega) = k/(1 + j\omega T) = N(\omega)e^{j\psi(\omega)}, \quad (2.90)$$

где

$$N(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \frac{N_q(\omega)}{N_s(\omega)} = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \quad (2.91)$$

модуль КПФ; $N_q(\omega)$ и $N_s(\omega)$ — модули числителя и знаменателя КПФ,

$$\psi(\omega) = \arctg [Q(\omega)/P(\omega)] = -\arctg \omega T \quad (2.92)$$

аргумент КПФ апериодического звена

Если $K(j\omega) = k/F(j\omega)$ имеет комплексное число лишь в знаменателе, как, например, в формуле (2.88), то аргумент проще определять по формуле $\psi(\omega) = -\arctg |\operatorname{Im} F(j\omega)/\operatorname{Re} F(j\omega)|$, где $\operatorname{Im} F(j\omega)$ — мнимая, $\operatorname{Re} F(j\omega)$ — вещественная часть знаменателя $F(j\omega)$ КПФ.

Передаточная функция связывает входную и выходную величины звена в любом (переходном и установившемся) режиме при условии, что входная величина может изменяться по любому закону во времени. Комплексная передаточная функция определяет зависимость выходной величины от входной лишь в установившемся режиме при подаче на вход гармонических колебаний. Оператор p в передаточной функции является комплексным числом $p = \alpha + j\omega$, а в комплексной передаточной функции $p = j\omega$, т. е. является мнимой величиной. Таким образом, КПФ является частным случаем передаточной функции.

КПФ можно получить из передаточной функции, если в ней заменить p на $j\omega$: $K(j\omega) = [K(p)]_{p=j\omega}$.

Действительно, если имеем передаточную функцию апериодического звена $K(p) = k/(1 + Tp)$, то, заменив p на $j\omega$, получим КПФ этого звена: $K(j\omega) = k/(1 + j\omega T)$.

Амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики

Выясним физический смысл модуля $N(\omega)$ и аргумента $\psi(\omega)$ КПФ. Для этого числитель и знаменатель выражения (2.88) разделим на $e^{j\omega t}$:

$$K(j\omega) = N(\omega)e^{j\psi(\omega)} = (U_{m2}/U_{m1}) e^{j\psi}. \quad (2.93)$$

Из формулы (2.93) получаем следующее.

$$1. N(\omega) = U_{m2}/U_{m1}, \quad (2.94)$$

т. е. модуль $N(\omega)$ КПФ звена (системы) равен отношению амплитуд выходного и входного колебаний звена (системы). Из формулы (2.91) следует, что $N(\omega)$ зависит от частоты ω . Кривая зависимости модуля $N(\omega)$ КПФ звена (системы) от частоты называется *амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ)* этого звена (системы). АЧХ апериодического звена определяется выражением (2.91).

$$2. \psi(\omega) = \varphi,$$

т. е. аргумент $\psi(\omega)$ КПФ равен сдвигу фаз между выходным и входным колебаниями. Из формулы (2.92) видно, что $\psi(\omega)$ есть функция частоты ω . Кривая зависимости аргумента $\psi(\omega)$ КПФ от частоты называется *фазочастотной характеристикой* (ФЧХ). ФЧХ апериодического звена определяется формулой (2.92).

Амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ)

Комплексную передаточную функцию $K(j\omega)$ при ω_i можно изобразить вектором в полярной системе координат (рис. 2.11, а). Длина этого вектора определяется модулем $N(\omega_i)$, а угол его поворота относительно полярной оси — аргументом $\psi(\omega_i)$ КПФ. Обычно полярную систему координат совмещают с декартовой (рис. 2.11, б). За полюс принимается начало декартовых координат, а за полярную ось — положительная вещественная ось. Поскольку $N(\omega)$ и $\psi(\omega)$ являются функциями частоты, длина вектора $N(\omega)$ и угол его поворота изменяются с изменением ω (рис. 2.11, в).

Кривая, описываемая концом вектора комплексной передаточной функции $K(j\omega)$ звена (системы) при изменении частоты ω от 0 до ∞ (логограф вектора $K(j\omega)$), называется *амплитудно-фазовой частотной характеристикой* звена (системы).

Амплитудно-фазовую частотную характеристику апериодического звена можно построить в декартовой и полярной системах координат.

1. Для построения АФЧХ в декартовой системе координат КПФ звена представляют в алгебраической форме:

$$K(j\omega) = k/(1 + j\omega T) = P(\omega) + jQ(\omega),$$

где

$$P(\omega) = k/(1 + \omega^2 T^2); \quad Q(\omega) = -kT\omega/(1 + \omega^2 T^2) \quad (2.95)$$

выражения для вещественной и мнимой частотных характеристик звена соответственно. Задаваясь различными значениями частоты ω_i , определяют соответствующие значения $P(\omega)$ и $Q(\omega)$, которые являются координатами точек АФЧХ в декартовой системе координат. Уравнения (2.95) представляют собой параметрические уравнения АФЧХ апериодического звена с параметром ω . Исключение этого параметра

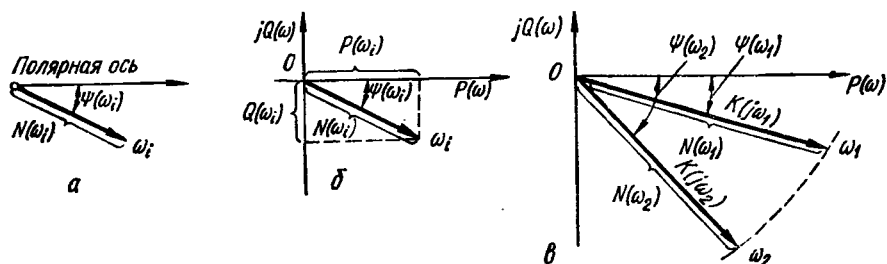


Рис. 2.11. Изображение вектора комплексной передаточной функции $K(j\omega)$:

а — в полярной системе координат; б — в декартовой системе координат; в — изменение вектора $K(j\omega)$ с изменением частоты ω .

дает уравнение АФЧХ в декартовых координатах $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ в виде

$$[P(\omega) - k/2]^2 + Q^2(\omega) = (k/2)^2.$$

Это уравнение окружности, касающейся мнимой оси в начале координат, с центром на вещественной оси в точке $(k/2, 0)$, диаметром k (рис. 2.12). Нижняя полуокружность АФЧХ соответствует частотам ω от 0 до $+\infty$, а верхняя — от 0 до $-\infty$. Физический смысл имеют только частоты от 0 до $+\infty$, поэтому обычно изображают ту часть АФЧХ, которая соответствует изменению от 0 до $+\infty$.

Для определения характерных точек АФЧХ апериодического звена зададимся некоторыми частотами и вычислим по формулам (2.95) значения $P(\omega)$ и $Q(\omega)$. В соответствии с полученными данными (табл. 2.2) на АФЧХ отмечаем частоты.

Если АФЧХ снята экспериментально, то из нее можно определить параметры k и T звена. Коэффициент k определяется непосредственно из АФЧХ, как длина отрезка на вещественной оси от начала координат до точки АФЧХ, соответствующей $\omega = 0$. Чтобы определить T , находится частота ω_T , соответствующая точке АФЧХ, где $Q(\omega_T) = k/2$, затем T находится как величина, обратная ω_T , т. е. $T = 1/\omega_T$.

2. Для построения АФЧХ в полярной системе координат КПФ представляют в показательной форме:

$$K(j\omega) = \frac{k}{\sqrt{\omega^2 T^2 + 1}} e^{-j \arctg \omega T} = N(\omega) e^{j\psi(\omega)},$$

где $N(\omega) = k/\sqrt{\omega^2 T^2 + 1}$ — модуль КПФ;

$\psi(\omega) = -\arctg \omega T$ — аргумент КПФ.

Задаваясь различными значениями частоты ω , определяют $N(\omega)$ и $\psi(\omega)$ (табл. 2.3) и откладывают их в полярной системе координат, совмещенной с декартовой (рис. 2.13, а).

Из выражений для $N(\omega)$, $\psi(\omega)$ и АФЧХ апериодического звена видно, что с увеличением частоты ω модуль $N(\omega)$ уменьшается, а аргумент $\psi(\omega)$ по абсолютному значению увеличивается. Это согласуется с физическими представлениями о процессах в электрической

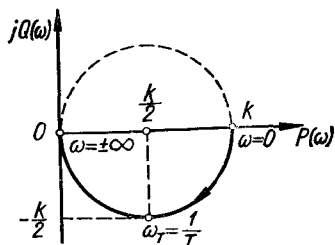


Рис. 2.12. АФЧХ апериодического звена.

Таблица 2.2. Значения функций $P(\omega)$ и $Q(\omega)$

ω	0	$1/T = \omega_T$	∞
$P(\omega)$	k	$k/2$	0
$Q(\omega)$	0	$-k/2$	0

Таблица 2.3 Значения функций $N(\omega)$ и $\psi(\omega)$

ω	0	$1/T = \omega_T$	∞
$N(\omega)$	k	$k/\sqrt{2}$	0
$\psi(\omega)$	0°	-45°	-90°

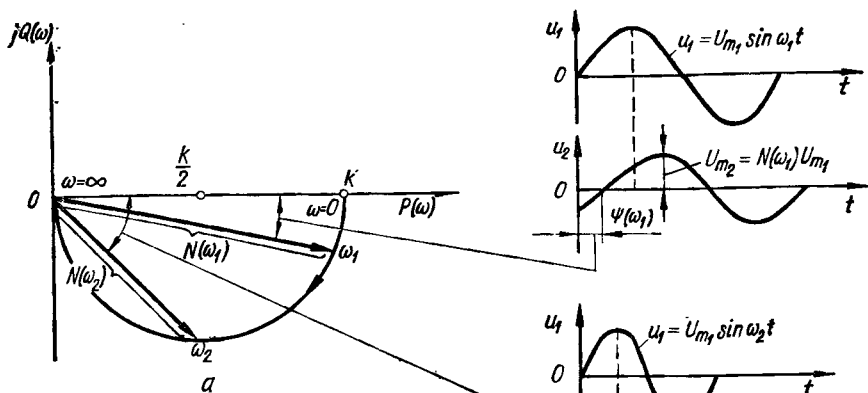


Рис. 2.13. Построение АФЧХ аperiodического звена в полярной системе координат:

а — АФЧХ звена; б — графики входных $u_1(t)$ и выходных $u_2(t)$ колебаний звена.

цепи (рис. 2.2, а). При подаче на вход цепи постоянного напряжения ($\omega = 0$) выходное напряжение после окончания переходного процесса

$$u_2(t) = k u_1(t), \quad k = R_2 / (R_1 + R_2),$$

откуда $k = u_2(t) / u_1(t)$. Постоянное напряжение можно считать частным случаем переменного напряжения, когда $\omega = 0$, а амплитуда равна значению постоянного напряжения ($u_1(t) = U_{m1}$, $u_2(t) = U_{m2}$). Поэтому можно написать $k = u_2(t) / u_1(t) = U_{m2} / U_{m1} = N(\omega)_{\omega=0}$. Понятие о фазовом сдвиге при $\omega = 0$ теряет свой смысл. В этом случае $\psi(\omega)_{\omega=0} = 0$.

При подаче на вход схемы синусоидального напряжения $u_1(t) = U_{m1} \sin \omega t$ ток в цепи из-за индуктивности L отстает по фазе от входного напряжения $u_1(t)$. Следовательно, будет отставать по фазе от $u_1(t)$ и напряжение $u_2(t)$ на выходе схемы, так как $u_2(t)$ снимается с активного сопротивления R_2 и совпадает с током по фазе. Из-за падения части подводимого напряжения на индуктивном сопротивлении $x_L = \omega L$ напряжение $u_2(t)$ по сравнению со случаем $\omega = 0$ уменьшается. Следовательно, уменьшается и модуль $N(\omega)$. С увеличением частоты ω из-за влияния L угол отставания $\varphi = \psi(\omega)$ увеличивается, а амплитуда выходных колебаний U_{m2} при условии, что $U_{m1} = \text{const}$, уменьшается. Из последнего следует, что с увеличением ω модуль $N(\omega) = U_{m2} / U_{m1}$ уменьшается.

На рис. 2.13, б изображены графики колебаний напряжения на входе $u_1(t)$ и выходе $u_2(t)$ цепи для частот ω_1 и ω_2 ($\omega_2 > \omega_1$). На этом же рисунке иллюстрируется связь между АФЧХ цепи и параметрами колебаний на ее входе и выходе.

Амплитудно-фазовые частотные характеристики динамических звеньев

Амплитудно-фазовая частотная характеристика пропорционального звена. АФЧХ звеньев и системы строятся на основании выражений для комплексных передаточных функций. Последние, как отмечалось, можно определять из передаточных функций, заменяя p на $j\omega$.

Передаточная функция пропорционального звена $K(p) = k$, следовательно, КПФ этого звена

$$K(j\omega) = k.$$

При построении АФЧХ в полярной системе координат представляем КПФ в показательной форме:

$$K(j\omega) = N(\omega) e^{j\psi(\omega)}, \quad (2.97)$$

где $N(\omega) = k$, $\psi(\omega) = 0$. Из формулы (2.97) и АФЧХ (рис. 2.14, а) видно, что модуль $N(\omega)$ (а следовательно, и амплитуда выходных колебаний) не зависит от частоты, а также, что $\psi(\omega) = \varphi = 0$, т. е. выходные колебания совпадают по фазе с колебаниями на входе на всех частотах.

Амплитудно-фазовая частотная характеристика интегрирующего звена. Передаточная функция интегрирующего звена $K(p) = k/p$, откуда, заменяя p на $j\omega$, получаем КПФ звена:

$$K(j\omega) = k/j\omega = -jk/\omega. \quad (2.98)$$

Учитывая, что $-j = e^{-j\pi/2}$, последнее выражение можем написать в виде

$$K(j\omega) = (k/\omega) e^{-j\pi/2} = N(\omega) e^{j\psi(\omega)}, \quad (2.99)$$

где $N(\omega) = k/\omega$; $\psi(\omega) = -\pi/2$.

Из формулы (2.99) и АФЧХ (рис. 2.14, б), построенной в соответствии с этой формулой, видно, что при $\omega = 0$ $N(\omega) = \infty$, с увеличением ω (на АФЧХ направление увеличения ω будем обозначать стрелкой) $N(\omega)$ уменьшается и при $\omega = \infty$ $N(\omega) = 0$. Аргумент $\psi(\omega)$ не зависит от частоты и равен $-\pi/2$, т. е. интегрирующее звено вносит запаздывание колебаний по фазе, равное 90° , на всех частотах.

Амплитудно-фазовая частотная характеристика идеального дифференцирующего звена. Передаточная функция звена $K(p) = \tau p$,

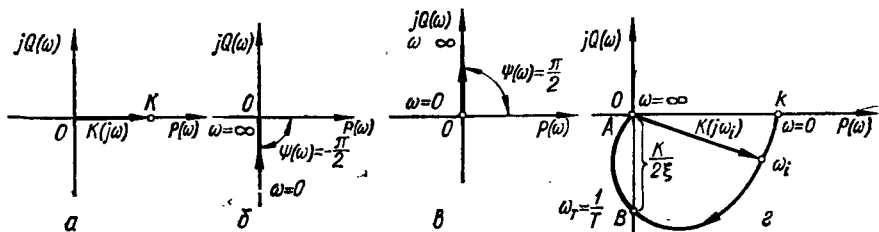


Рис. 2.14. АФЧХ динамических звеньев:

а — пропорционального; б — интегрирующего; в — идеального дифференцирующего; г — колебательного.

Таблица 2.4. Значения функций $N(\omega)$ и $\psi(\omega)$

ω	0	$1/T = \omega_T$	∞
$N(\omega)$	k	$k/2\xi$	0
$\psi(\omega)$	0	$-\pi/2$	$-\pi$

$\omega = \infty$ $N(\omega) = \infty$. Аргумент $\psi(\omega)$ не зависит от частоты и равен $\pi/2$, т. е. идеальное дифференцирующее звено вносит не запаздывание колебаний по фазе, как другие звенья, а опережение. Это опережение равно $\pi/2$ на всех частотах.

Амплитудно-фазовая частотная характеристика колебательного звена. Передаточная функция колебательного звена $k(p) = k/(T^2 p^2 + 2\xi T p + 1)$, откуда его КПФ:

$$K(j\omega) = k/(1 - T^2\omega^2 + j2\xi T\omega) = N(\omega) e^{j\psi(\omega)},$$

где

$$N(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2}}; \quad \psi(\omega) = \arctg \frac{2\xi T\omega}{1 - \omega^2 T^2}.$$

Для выявления характера АФЧХ определим $N(\omega)$ и $\psi(\omega)$ при некоторых частотах (табл. 2.4).

АФЧХ колебательного звена изображен на рис. 2.14, з.

Если АФЧХ звена определена экспериментально, то с ее помощью можно определить параметры k , ξ и T : коэффициент k равен длине отрезка на вещественной оси от начала координат до точки АФЧХ при $\omega = 0$; коэффициент ξ находится из выражения $AB = k/2\xi$; $\xi = k/2AB$; постоянная времени $T = 1/\omega_T$.

Амплитудно-фазовые частотные характеристики САУ в разомкнутом состоянии

Построение АФЧХ системы в разомкнутом состоянии, как и АФЧХ звеньев, выполняют в декартовой или полярной системах координат.

При построении АФЧХ САУ в декартовой системе координат КПФ системы представляют в алгебраической форме $K_p(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$. Задаваясь различными значениями ω , вычисляют $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ и откладывают их значения по осям координат. При построении АФЧХ в полярной системе координат КПФ системы представляют в показательной форме $K_p(j\omega) = N(\omega) e^{j\psi(\omega)}$. Задаваясь различными значениями ω , определяют $N(\omega)$ и $\psi(\omega)$ и откладывают их значения в полярной системе координат.

Пример 1. Задана комплексная передаточная функция системы

$$K_p(j\omega) = \frac{k_p(1 + T_2 j\omega)}{(1 + T_1 j\omega)(1 - T_3^2 \omega^2 + 2\xi T_3 j\omega)} = N(\omega) e^{j\psi(\omega)}.$$

Определить выражения для модуля и аргумента КПФ.

откуда КПФ звена:

$$K(j\omega) = j\omega\tau = \omega\tau e^{j\pi/2} = N(\omega) e^{j\psi(\omega)}, \quad (2.100)$$

где $N(\omega) = \omega\tau$; $\psi(\omega) = \pi/2$ — модуль и аргумент КПФ.

Из формулы (2.100) и АФЧХ (рис. 2.14, в), построенной в соответствии с этой формулой, видно, что при $\omega = 0$ $N(\omega) = 0$, с увеличением ω $N(\omega)$ увеличивается и при

Пользуясь правилом, что модуль произведения комплексных чисел равен произведению их модулей, а аргумент — сумме аргументов сомножителей, находим:

$$N(\omega) = \frac{k_p \sqrt{1 + T_2^2 \omega^2}}{\sqrt{1 + T_1^2 \omega^2} \sqrt{(1 - T_3^2 \omega^2)^2 + (2\xi T_3 \omega)^2}};$$

$$\psi(\omega) = \operatorname{arctg} T_2 \omega - \operatorname{arctg} T_1 \omega - \operatorname{arctg} [2\xi T_3 \omega / (1 - T_3^2 \omega^2)] - \pi/2.$$

Для построения АФЧХ задаются различными значениями ω , вычисляют значения $N(\omega)$ и $\psi(\omega)$ и откладывают их в полярной системе координат. Соединение найденных точек дает АФЧХ системы.

Пример 2. КПФ системы задана в следующем виде:

$$K_p(j\omega) = \frac{b_0(j\omega)^2 + b_1j\omega + b_2}{a_0(j\omega)^6 + a_1(j\omega)^4 + a_2(j\omega)^3 + a_3(j\omega)^2 + a_4j\omega}.$$

Определим $N(\omega)$ и $\psi(\omega)$ КПФ:

$$K_p(j\omega) = \frac{b_2 - b_0\omega^2 + jb_1\omega}{a_1\omega^4 - a_3\omega^2 + j(a_0\omega^6 - a_2\omega^3 + a_4\omega)} = \frac{U_1(\omega) + jV_1(\omega)}{U(\omega) + jV(\omega)};$$

$$K_p(j\omega) = \frac{U_1(\omega) + jV_1(\omega)}{U(\omega) + jV(\omega)} = N(\omega) e^{j\psi(\omega)},$$

где

$$N(\omega) = \frac{\sqrt{U_1^2(\omega) + V_1^2(\omega)}}{\sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}}, \quad \begin{aligned} U_1(\omega) &= b_2 - b_0\omega^2; \\ V_1(\omega) &= b_1\omega; \end{aligned}$$

$$\psi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{V_1(\omega)}{U_1(\omega)} - \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)}; \quad \begin{aligned} U(\omega) &= a_1\omega^4 - a_3\omega^2; \\ V(\omega) &= a_0\omega^6 - a_2\omega^3 + a_4\omega. \end{aligned}$$

АФЧХ статической системы в разомкнутом состоянии. Пусть КПФ системы определяется выражением

$$K_p(j\omega) = k_p \prod_{i=1}^m (1 + j\omega T_i) / \prod_{k=1}^n (1 + j\omega T_k) = N(\omega) e^{j\psi(\omega)}, \quad n > m.$$

На частоте $\omega = 0$: $K_p(j\omega) = N(\omega) = k_p$; $\psi(\omega) = 0$, т. е. АФЧХ статической системы (рис. 2.15, а) начинается из точки, расположенной на вещественной оси и удаленной от начала координат на расстояние k_p . При частоте $\omega = \infty$ модуль $N(\omega) = 0$, поскольку $n > m$. Чтобы определить, под каким углом АФЧХ подходит к началу координат (сколько квадрантов проходит АФЧХ), нужно определить аргумент $\psi(\omega)$ КПФ при $\omega = \infty$. Заметим, что каждый сомножитель первого порядка $(1 + j\omega T_k)$, стоящий в знаменателе, при $\omega = \infty$ вносит запаздывание $\psi_k(\omega) = -\operatorname{arctg} \omega T_k = -90^\circ$, сомножитель в числителе — опережение, равное 90° . Поэтому при $\omega = \infty$ $\psi(\omega) = -n90^\circ + m90^\circ = -(n - m)90^\circ$. Если, например, $n - m = 3$, то АФЧХ подходит к началу координат под углом, равным -270° , т. е. АФЧХ проходит три квадранта по часовой стрелке (рис. 2.15, а). В общем случае n — степень полинома знаменателя, m — степень полинома числителя.

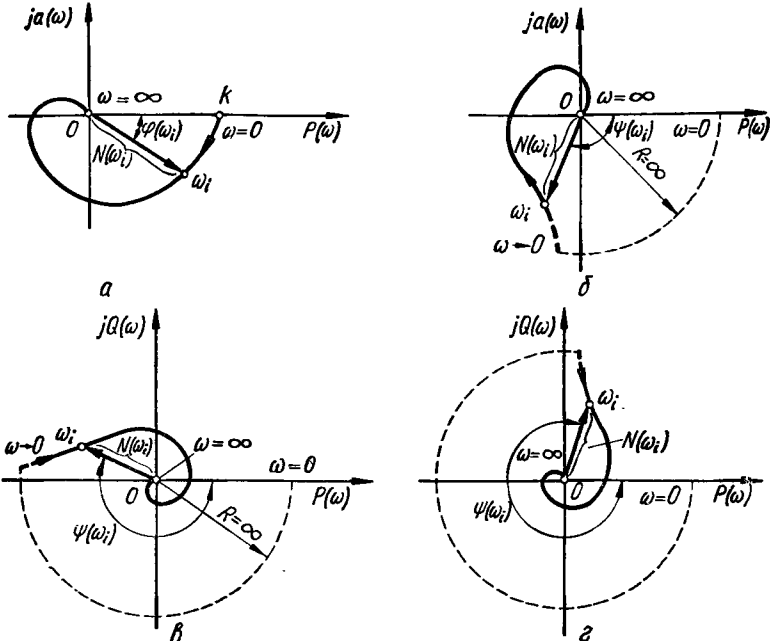


Рис. 2.15. АФЧХ статической и астатических систем:

a — статической системы; *б* — *в* — астатических систем, имеющих астатизм 1—3-го порядка соответственно.

АФЧХ системы с астатизмом 1-го порядка в разомкнутом состоянии. Пусть КПФ системы определяется выражением

$$K_p(j\omega) = k_p \prod_{i=1}^m (1 + j\omega T'_i) / j\omega \prod_{k=1}^{n-1} (1 + j\omega T_k) = N(\omega) e^{j\psi(\omega)}, \quad n > m.$$

При $\omega \rightarrow 0$ сомножители числителя и знаменателя, взятые в скобки, стремятся к единице, вследствие чего КПФ системы при $\omega \rightarrow 0$ приближается к КПФ интегрирующего звена, т. е.

$$K_p(j\omega) = k_p / j\omega = (k_p / \omega) e^{-j\pi/2} = N(\omega) e^{j\psi(\omega)},$$

где $N(\omega) = k_p / \omega$; $\psi(\omega) = -\pi/2$, следовательно, при

$$\omega \rightarrow \infty: N(\omega) \rightarrow \infty; \quad \psi(\omega) \rightarrow -\pi/2.$$

Примерный вид АФЧХ системы с астатизмом 1-го порядка показан на рис. 2.15, б. Как видно из рисунка, при $\omega \rightarrow 0$ амплитуда выходных колебаний в этих системах стремится к бесконечности, а сдвиг по фазе к $-\pi/2$. Такой вид АФЧХ системы с астатизмом первого порядка при $\omega \rightarrow 0$ объясняется тем, что при $\omega \rightarrow 0$ свойства всей системы, как было показано, определяются свойствами интегрирующего звена. Бесконечно большое значение $N(\omega)$ при $\omega \rightarrow 0$ с физической точки зрения можно объяснить следующим образом. При $\omega = 0$ на вход разомкнутой системы подается постоянный по значению сигнал

θ_0 . Поскольку система содержит интегрирующее звено (например, двигатель), его выходная величина (угол поворота якоря двигателя) при этом будет безгранично возрастать. Поэтому $N(\omega) = \beta/\theta_0$ будет увеличиваться до бесконечности. При $\omega = 0$ понятие о сдвиге по фазе между входной и выходной величинами теряет смысл. В этом случае можно считать, что АФЧХ астатической системы (интегрирующего звена) начинается в бесконечно удаленной точке, расположенной на положительной вещественной оси, но уже на самых малых частотах идет по дуге бесконечно большого радиуса, показанной на рис. 2.15, б пунктиром.

При частоте $\omega = \infty$ $N(\omega) = 0$, $\psi(\omega) = -(n - m) 90^\circ$. Если, например, $n - m = 4$, то $\psi(\omega) = -360^\circ$, т. е. АФЧХ системы проходит по часовой стрелке четыре квадранта (рис. 2.15, б).

АФЧХ систем с астатизмом 2-го и 3-го порядка изображены соответственно на рис. 2.15, в, г.

2.8. Логарифмические частотные характеристики звеньев и систем автоматического управления

Определение логарифмических частотных характеристик

Построение амплитудно-фазовых частотных характеристик сложных систем связано с большой затратой времени. Исследование САУ значительно упрощается, если пользоваться частотными характеристиками, вычерченными в логарифмическом масштабе, т. е. логарифмическими частотными характеристиками (ЛЧХ).

Простота метода ЛЧХ объясняется простотой построения характеристик:

логарифмическая частотная характеристика системы получается сложением характеристик отдельных звеньев (при построении АФЧХ системы необходимо перемножать АФЧХ отдельных ее звеньев);

точные логарифмические характеристики звеньев заменяются отрезками прямых — асимптотами.

Выясним, что представляют собой ЛЧХ. Запишем комплексную передаточную функцию в показательной форме $K(j\omega) = N(\omega) e^{j\psi(\omega)}$ и прологарифмируем выражение для $K(j\omega)$:

$$\ln K(j\omega) = \ln [N(\omega) e^{j\psi(\omega)}] = \ln N(\omega) + j\psi(\omega).$$

Кривая зависимости логарифма модуля $\ln N(\omega)$ комплексной передаточной функции от частоты, отложенной по оси абсцисс в логарифмическом масштабе, называется *логарифмической амплитудно-частотной характеристикой* (ЛАЧХ). Обычно на графике по оси ординат принято откладывать не $\ln N(\omega)$, а пропорциональную ей величину $L(\omega) = 20 \lg N(\omega)$ [$\lg N(\omega) = 0,434 \ln N(\omega)$], измеряемую в децибелах. При сравнении двух величин Um_2 и Um_1 говорят, что они отличаются на 1 дБ, если $20 \lg (Um_2/Um_1) = 1$.

Зависимость аргумента $\psi(\omega)$ КПФ от частоты, отложенной по оси абсцисс в логарифмическом масштабе, называется *логарифмической фазо-частотной характеристикой* (ЛФЧХ).

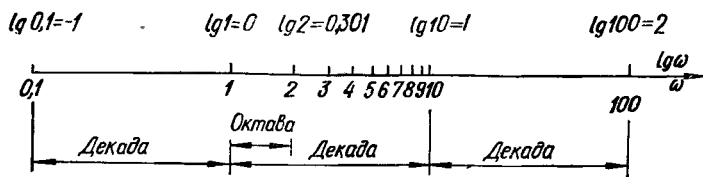


Рис. 2.16. Логарифмический масштаб частоты.

При построении логарифмического масштаба частоты по оси абсцисс откладываются отрезки, пропорциональные не самим частотам ω , а логарифмам частот $\lg \omega$, как показано на рис. 2.16. Для удобства пользования логарифмическим масштабом частот на оси абсцисс обычно наносятся значения самих частот, логарифмы которых отложены по оси.

Рассмотрим понятия об октаве и декаде. Если две частоты ω_1 и ω_2 отличаются друг от друга в два раза, т. е. $\omega_2/\omega_1 = 2$, то говорят, что эти частоты отличаются друг от друга на одну *октаву*. Если же частоты ω_1 и ω_2 отличаются друг от друга в 10 раз, т. е. $\omega_2/\omega_1 = 10$, то считают, что эти частоты отличаются на одну *декаду*. Декада — интервал между частотами, отличающимися друг от друга в 10 раз. Например, интервал частот от $\omega_1 = 0,1$ до $\omega_2 = 100$ содержит 3 декады: 1-я декада — между $\omega_1 = 0,1$ и $\omega = 1$, 2-я декада — между $\omega = 1$ и $\omega = 10$ и 3-я декада — между $\omega = 10$ и $\omega = 100$. Отрезок, изображающий декаду (или октаву) в логарифмическом масштабе, имеет одну и ту же длину для любого участка оси частот, равную $\lg(10\omega/\omega) = \lg 10 = 1$ (см. рис. 2.16).

Рассмотрим логарифмические амплитудно- и фазо-частотные характеристики динамических звеньев.

Логарифмические частотные характеристики динамических звеньев

Логарифмические частотные характеристики пропорционального звена. Комплексная передаточная функция звена

$$K(j\omega) = k = N(\omega) e^{j\psi(\omega)}, \text{ где } N(\omega) = k; \quad \psi(\omega) = 0.$$

Выражение для ЛАЧХ

$$L(\omega) = 20 \lg N(\omega) = 20 \lg k,$$

т. е. ЛАЧХ звена не зависит от частоты и поэтому представляет прямую, параллельную оси частот (рис. 2.17). Если $k > 1$, то ЛАЧХ проходит выше оси абсцисс, при $k < 1$ — ниже оси.

Выражение для ЛФЧХ: $\psi(\omega) = 0$, т. е. логарифмическая фазо-частотная характеристика не зависит от частоты и представляет прямую, совпадающую с положительной вещественной осью (прямая $\psi(\omega)$, рис. 2.17).

Логарифмические частотные характеристики интегрирующего звена. Комплексная передаточная функция звена:

$$K(j\omega) = k/j\omega = (k/\omega) e^{-j\pi/2} = N(\omega) e^{j\psi(\omega)},$$

где $N(\omega) = k/\omega$; $\psi(\omega) = -\pi/2$.

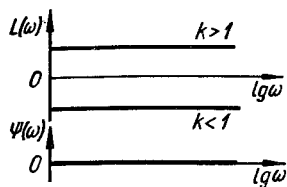


Рис. 2.17. Логарифмические амплитудно-частотная $L(\omega)$ и фазо-частотная $\psi(\omega)$ характеристики пропорционального звена.

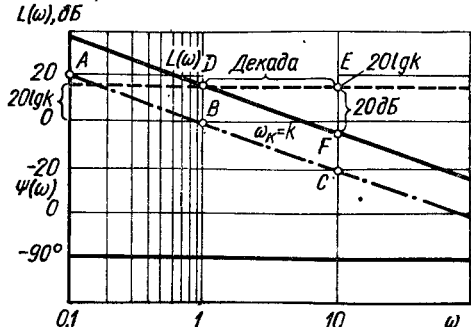


Рис. 2.18. Логарифмические амплитудно-частотная $L(\omega)$ и фазо-частотная $\psi(\omega)$ характеристики интегрирующего звена.

Выражение для ЛАЧХ звена:

$$L(\omega) = 20 \lg N(\omega) = 20 \lg(k/\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega. \quad (2.101)$$

Из формулы (2.101) следует, что ЛАЧХ звена представляет сумму из двух слагаемых. Первое слагаемое $20 \lg k$ не зависит от частоты и поэтому изображается прямой, проведенной параллельно оси частот на уровне $20 \lg k$ (рис. 2.18). Второе слагаемое — $20 \lg \omega$ зависит от частоты. Для определения вида графика, изображающего это слагаемое, зададимся несколькими частотами и определим ординаты графика при этих частотах:

ω	0,1	1	10
$-20 \lg \omega$	20 дБ (точка А)	0 дБ (точка В)	-20 дБ (точка С)

Отмечаем точки А, В и С и проводим через них график. Из рисунка видно, что слагаемое — $20 \lg \omega$ графически изображается прямой, проведенной под некоторым наклоном к оси частот (рис. 2.18). Под наклоном S ЛАЧХ понимается отношение приращения ординаты характеристики к приращению абсциссы: $S = \Delta L(\omega) / \Delta \lg \omega$. Обычно в качестве $\Delta \lg \omega$ берется отрезок на оси абсцисс, соответствующий октаве или декаде. Учитывая, что частоты, отстоящие друг от друга на 1 декаду, отличаются в 10 раз, наклон прямой — $20 \lg \omega$:

$$S = \frac{\Delta L(\omega)}{\Delta \lg \omega} = \frac{-20 \lg 10\omega - (-20 \lg \omega)}{\text{декада}} = -20 \text{ дБ/дек},$$

т. е. при увеличении ω на декаду ордината $L(\omega)$ убывает на 20 дБ.

Для получения ЛАЧХ звена $L(\omega)$ необходимо сложить ординаты графиков, изображающих слагаемые $20 \lg k$ и $-20 \lg \omega$. Как видно из рисунка 2.18, где выполнено такое сложение, ЛАЧХ интегрирующего звена $L(\omega)$ представляет собой прямую с наклоном -20 дБ/дек, имеющую при $\omega = 1$ ординату, равную $20 \lg k$.

Опуская промежуточные операции, можно рекомендовать следующий порядок построения ЛАЧХ интегрирующего звена: 1) на частоте $\omega = 1$ отложить $20 \lg k$ (точка D); 2) через точку D провести прямую с наклоном -20 дБ/дек. Для этого от точки D вправо отложить декаду (точка E) и от точки E отложить вниз 20 дБ (точка F); 3) провести прямую через точки D и F . Эта прямая и будет ЛАЧХ интегрирующего звена.

Частоту ω_k , при которой ЛАЧХ пересекает ось частот, найдем из уравнения $L(\omega_k) = 20 \lg k - 20 \lg \omega_k = 0 : \omega_k = k$. Используя это, можно рекомендовать еще одно правило построения ЛАЧХ звена: на оси абсцисс (частот) отметить точку, соответствующую частоте $\omega_k = k$, и через эту точку провести прямую с наклоном -20 дБ/дек.

При изменении k наклонная прямая перемещается в вертикальном направлении параллельно себе. Если $k = 1$, то $20 \lg k = 0$ и выражение для ЛАЧХ звена примет вид $L(\omega) = -20 \lg \omega$, т. е. в этом случае ЛАЧХ пересечет ось 0 дБ при $\omega_k = 1$ (наклонная прямая ABC , рис. 2.18).

Выражение для ЛФЧХ интегрирующего звена: $\psi(\omega) = -\pi/2$, откуда видно, что аргумент комплексной передаточной функции звена не зависит от частоты и поэтому ЛФЧХ звена представляет прямую, параллельную оси частот, проведенную на уровне -90° .

Логарифмические частотные характеристики идеального дифференцирующего звена. Комплексная передаточная функция звена:

$$K(j\omega) = j\omega\tau = \omega\tau e^{j\pi/2} = N(\omega) e^{j\psi(\omega)}, \text{ где } N(\omega) = \omega\tau; \quad \psi(\omega) = \pi/2.$$

Выражение для ЛАЧХ звена:

$$L(\omega) = 20 \lg N(\omega) = 20 \lg \omega\tau = 20 \lg \tau + 20 \lg \omega.$$

Слагаемое $L_1(\omega) = 20 \lg \tau$ не зависит от частоты и поэтому изображается прямой, параллельной оси абсцисс на уровне $20 \lg \tau$ (прямая $L_1(\omega)$, рис. 2.19). Слагаемое $L_2(\omega) = 20 \lg \omega$ изображается прямой с наклоном 20 дБ/дек. Поскольку $20 \lg \omega = 0$ при $\omega = 1$, прямая $L_2(\omega)$ пересекает ось 0 дБ в точке, соответствующей частоте $\omega = 1$. ЛАЧХ звена $L(\omega)$ получается сложением ординат слагаемых $L_1(\omega)$ и $L_2(\omega)$. Из рис. 2.19 видно, что ЛАЧХ идеального дифференцирующего звена $L(\omega)$ представляет собой прямую с наклоном 20 дБ/дек, имеющую при $\omega = 1$ ординату, равную $20 \lg \tau$.

Частоту ω_k , при которой ЛАЧХ $L(\omega)$ звена пересекает ось частот, найдем из уравнения $20 \lg \omega_k\tau = 0$:

$$\omega_k\tau = 1, \text{ откуда } \omega_k = 1/\tau.$$

Чтобы построить ЛАЧХ идеального дифференцирующего звена, следует на оси частот отметить точку, соответствующую частоте $\omega_k = 1/\tau$, и через нее провести прямую под наклоном 20 дБ/дек.

Выражение для ЛФЧХ звена $\psi(\omega) = \pi/2$, т. е. ЛФЧХ идеального дифференцирующего звена — прямая, параллельная оси абсцисс, проведенная на уровне $\pi/2$ (см. рис. 2.19).

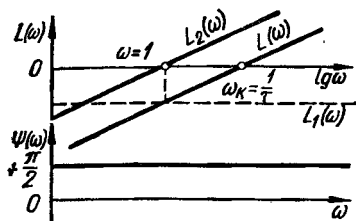


Рис. 2.19. Логарифмические амплитудно-частотная $L(\omega)$ и фазо-частотная $\psi(\omega)$ характеристики идеального дифференцирующего звена.

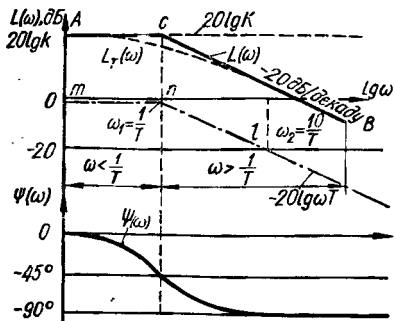


Рис. 2.20. Логарифмические амплитудно-частотная $L(\omega)$ и фазо-частотная $\psi(\omega)$ характеристики апериодического звена.

Логарифмические частотные характеристики апериодического звена. Комплексная передаточная функция звена:

$$K(j\omega) = \frac{k}{1 + j\omega T} = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} e^{-j \arctg \omega T} = N(\omega) e^{j\psi(\omega)}.$$

Выражение для ЛАЧХ звена:

$$L(\omega) = 20 \lg N(\omega) = 20 \lg (k/\sqrt{1 + \omega^2 T^2}) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2}. \quad (2.102)$$

Для области низких и высоких частот выражение для $L(\omega)$ может быть упрощено. В области малых ω , где $\omega \ll 1/T$, имеем $1 \gg \omega^2 T^2$ и поэтому $\sqrt{1 + \omega^2 T^2} \approx 1$. Учитывая, что $\lg 1 = 0$, выражение (2.102) для $L(\omega)$ в рассматриваемом диапазоне частот будет иметь вид:

$$L(\omega) = 20 \lg k, \quad (2.103)$$

т. е. ЛАЧХ апериодического звена в области низких частот представляет прямую, проведенную на уровне $20 \lg k$ параллельно оси частот (отрезок AC рис. 2.20).

В области высоких частот, где $\omega \gg 1/T$, имеем $1 \ll \omega^2 T^2$, поэтому $\sqrt{1 + \omega^2 T^2} \approx \omega T$ и выражение (2.102) будет иметь вид:

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega T. \quad (2.104)$$

Первое слагаемое $20 \lg k$ графически изображается прямой, параллельной оси абсцисс (на рис. 2.20 прямая проведена пунктиром). Для определения вида графика второго слагаемого $-20 \lg \omega T$ зададимся несколькими частотами и определим ординаты для этих частот:

$$\omega_1 = 1/T; \quad \omega_1 T = 1; \quad -20 \lg \omega_1 T = 0 \text{ дБ (точка } n);$$

$$\omega_2 = 10/T; \quad \omega_2 T = 10; \quad -20 \lg \omega_2 T = -20 \text{ дБ (точка } l).$$

Проводим через точки n, l прямую. Как видим, слагаемое $-20 \lg \omega T$ изображается прямой с наклоном:

$$S = \frac{\Delta L(\omega)}{\Delta \lg \omega} = \frac{-20 \lg 10\omega T - (-20 \lg \omega T)}{\text{дек}} = -20 \text{ дБ/дек.}$$

Для получения ЛАЧХ звена $L(\omega)$ в области высоких частот необходимо сложить прямые $20 \lg k$ и $-20 \lg \omega T$. Такое сложение показано на рис. 2.20. Как видно из рисунка, ЛАЧХ апериодического звена в области высоких частот представляет прямую CB с наклоном -20 дБ/дек.

Таким образом, ЛАЧХ апериодического звена представляется горизонтальным (AC) и наклонным с $S = -20$ дБ/дек (CB) отрезками прямых, являющимися асимптотами точной ЛАЧХ в области низких и высоких частот.

Найдем частоту ω_1 , соответствующую точке C сопряжения горизонтальной и наклонной асимптот. Поскольку точка C принадлежит обоим прямым, то на частоте ω_1 правые части выражений (2.103) и (2.104) будут равны между собой: $20 \lg k = 20 \lg k - 20 \lg \omega_1 T$. Из последнего выражения следует: $20 \lg \omega_1 T = 0$, или $\omega_1 T = 1$, откуда $\omega_1 = 1/T$, т. е. значение частоты, при которой происходит сопряжение низкочастотной и высокочастотной асимптот, равно $1/T$. Эта частота называется *частотой сопряжения*.

Можно рекомендовать следующий порядок построения ЛАЧХ апериодического звена: 1) вычислить $20 \lg k$ и полученное значение отложить по оси ординат (точка A , рис. 2.20); 2) вычислить частоту сопряжения $\omega_1 = 1/T$, отложить ее значение на оси частот; 3) на уровне $20 \lg k$ провести горизонтальный отрезок от оси ординат до частоты сопряжения ω_1 (отрезок AC); 4) из точки сопряжения C провести отрезок прямой под наклоном -20 дБ/дек (отрезок CB). Ломаная линия ACB представляет собой ЛАЧХ апериодического звена. Точная ЛАЧХ звена показана на рис. 2.20 кривой $L_T(\omega)$. Как видно из рисунка, она совпадает с приближенной асимптотической ЛАЧХ $L(\omega)$ при $\omega \ll \omega_1$ и $\omega \gg \omega_1$. Наибольшая погрешность при замене точной ЛАЧХ ее асимптотами имеет место при частоте сопряжения $\omega_1 = 1/T$ и равна 3 дБ.

Форма ЛАЧХ звена не зависит от его коэффициента усиления k . Изменение k приводит лишь к параллельному перемещению характеристики. Если $k = 1$, то горизонтальный отрезок ЛАЧХ будет совпадать с осью 0 дБ. Для случая $k = 1$ ЛАЧХ звена на рис. 2.20 изображена ломаной mnl .

Выражение для ЛФЧХ апериодического звена: $\psi(\omega) = -\text{arctg } \omega T$. Для построения ЛФЧХ звена необходимо задаться различными частотами ω и определить значения ординат характеристики на этих частотах. Для выяснения вида ЛФЧХ звена достаточно определить $\psi(\omega)$ для следующих трех частот:

ω	0	$\omega_1 = 1/T$	∞
$\psi(\omega)$	0°	-45°	-90°

ЛФЧХ апериодического звена изображена кривой $\psi(\omega)$ на рис. 2.20. Обратим внимание на то, что ЛФЧХ звена при частоте сопряжения $\omega_1 = 1/T$ имеет ординату, равную -45° .

Из сравнения ЛАЧХ и ЛФЧХ видно, что в области частот, где ЛАЧХ представляет горизонтальную прямую, ЛФЧХ стремится к 0° , а там, где ЛАЧХ выражена прямой с наклоном -20 дБ/дек, ЛФЧХ стремится к -90° . Резкие изменения ЛФЧХ имеет только около частоты сопряжения, где ЛАЧХ изменяет наклон.

Логарифмические частотные характеристики колебательного звена.
КПФ устойчивого колебательного звена:

$$K(j\omega) = k/(1 - T^2\omega^2 + j2\xi T\omega) = N(\omega)e^{j\psi(\omega)}, \quad (2.105)$$

где $N(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2}}$; $\psi(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{2\xi T\omega}{1 - T^2\omega^2}$.

Выражение для ЛАЧХ звена:

$$L(\omega) = 20 \lg N(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2}.$$

Если принять $k = 1$, то

$$L(\omega) = -20 \lg \sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2}. \quad (2.106)$$

Для области низких частот, где $\omega \ll 1/T$ и поэтому можно пренебречь членами $T^2\omega^2$ и $(2\xi T\omega)^2$ по сравнению с единицей, последнее выражение можно написать в приближенном виде: $L(\omega) = -20 \lg \sqrt{1} = 0$, т. е. в области низких частот ЛАЧХ колебательного звена при $k = 1$ будет совпадать с осью 0 дБ (рис. 2.21, а).

В области высоких частот, а именно при $\omega \gg 1/T$, когда $1 \ll T^2\omega^2$ и $(2\xi T\omega)^2 \ll (T^2\omega^2)^2$, можно написать следующее приближенное равенство: $\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2} \approx T^2\omega^2$, а выражение (2.106) для ЛАЧХ примет вид:

$$L(\omega) = -20 \lg (T\omega)^2 = -2 \cdot 20 \lg T\omega = -40 \lg T\omega.$$

При построении ЛАЧХ апериодического звена было показано, что график, изображающий $-20 \lg T\omega$, является прямой с наклоном -20 дБ/дек. Очевидно, что $L(\omega) = -2 \cdot 20 \lg T\omega$ будет изображаться прямой с наклоном, равным -40 дБ/дек (рис. 2.21, а).

Таким образом, приближенная асимптотическая ЛАЧХ колебательного звена изображается двумя отрезками прямых: горизонтальным отрезком, при $k = 1$, совпадающим с осью 0 дБ, и отрезком с наклоном -40 дБ/дек. Горизонтальный отрезок является асимптотой точной ЛАЧХ в области низких, а наклонный — в области высоких частот.

Низкочастотная и высокочастотная асимптоты ЛАЧХ сопрягаются при частоте сопряжения ω_1 , определяемой из уравнения $-20 \lg 1 = -40 \lg \omega_1 T$, т. е. при частоте $\omega_1 = 1/T$.

Можно рекомендовать следующий порядок построения асимптотической ЛАЧХ колебательного звена для случая $k \neq 1$: 1) на уровне $20 \lg k$ провести горизонтальный отрезок (отрезок АВ) до частоты сопряжения $\omega_1 = 1/T$; 2) из точки сопряжения В провести отрезок прямой под наклоном -40 дБ/дек (отрезок ВДЕ). Для этого от частоты сопряжения (точка В) отложить вправо одну декаду и от новой точки (точки С) отложить вниз 40 дБ. Затем провести отрезок прямой через точки В и Д.

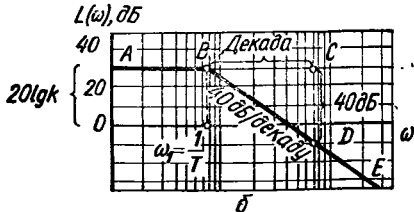
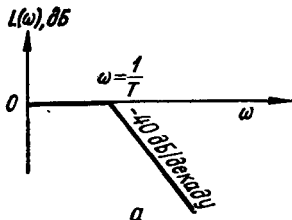


Рис. 2.21. Асимптотическая логарифмическая амплитудно-частотная характеристика колебательного звена:

а — $k = 1$; б — $k > 1$.

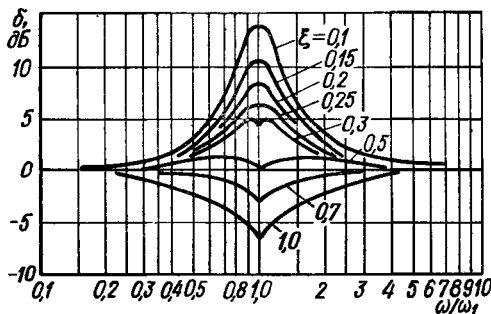


Рис. 2.22. Поправки к ЛАЧХ колебательного звена, соответствующие различным значениям ξ .

можно получать точные ЛАЧХ (рис. 2.23, а). Из рис. 2.22 видно, что при значениях ξ , лежащих в пределах $0,38 \leq \xi < 0,7$, отклонения не превосходят 3 дБ и поэтому, как и при построении ЛАЧХ апериодического звена, могут не учитываться.

Выражение для ЛФЧХ колебательного звена:

$$\psi(\omega) = -\arctg [2\xi T\omega / (1 - T^2\omega^2)].$$

Логарифмические фазо-частотные характеристики при различных значениях ξ приведены на рис. 2.23, б, из которого видно, что ЛФЧХ звена изменяются от 0° в области низких частот до -180° в области высоких частот. На частоте сопряжения $\omega_1 = 1/T$ сдвиг по фазе равен -90° .

Логарифмические частотные характеристики систем автоматического управления в разомкнутом состоянии

Методику построения ЛАЧХ систем автоматического управления рассмотрим на примере системы, состоящей из последовательно соединенных двух апериодических и одного интегрирующего звеньев, комплексная передаточная функция которой имеет вид:

$$K_p(j\omega) = k_p / [j\omega (T_1 j\omega + 1) (T_2 j\omega + 1)] = N(\omega) e^{j\psi(\omega)}.$$

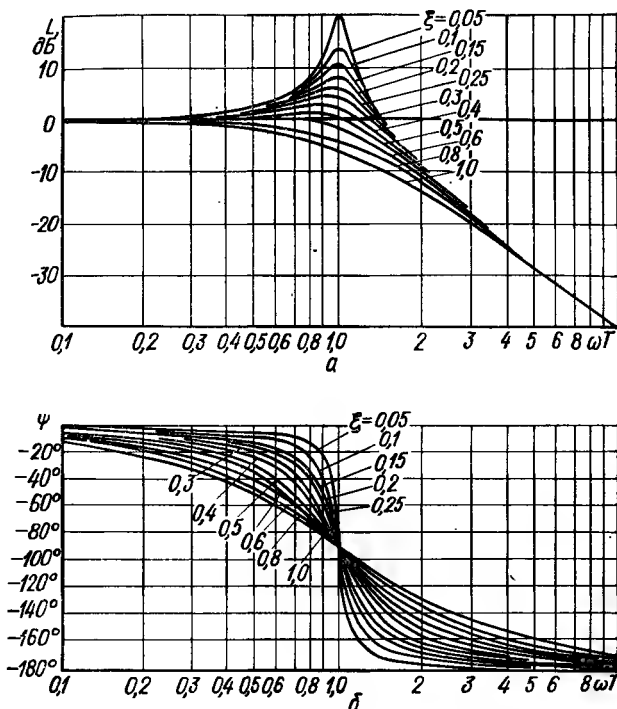


Рис. 2.23. Точные логарифмические амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики колебательного звена при различных значениях ξ :
 а — ЛАЧХ; б — ЛФЧХ.

Учитывая, что модуль произведения комплексных чисел равен произведению модулей этих чисел, а аргумент произведения равен сумме аргументов сомножителей, можем записать:

$$N(\omega) = k_p / (\omega \sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1} \sqrt{T_2^2 \omega^2 + 1});$$

$$\psi(\omega) = -\pi/2 - \arctg \omega T_1 - \arctg \omega T_2.$$
(2.107)

Выражение для ЛАЧХ системы:

$$L(\omega) = 20 \lg N(\omega) = 20 \lg k_p - 20 \lg \omega - 20 \lg \sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1} - 20 \lg \sqrt{T_2^2 \omega^2 + 1},$$
(2.108)

т. е. ЛАЧХ системы равна сумме ЛАЧХ последовательно включенных звеньев.

Для построения ЛАЧХ системы построим сначала ЛАЧХ звеньев, соответствующих слагаемым выражения (2.108), а затем сложим ординаты ЛАЧХ всех звеньев. Указанные построения выполнены на рис. 2.24.

Первое слагаемое выражения (2.108) $L_1(\omega) = 20 \lg k_p$ графически изображается, прямой $L_1(\omega)$, проведенной параллельно оси абсцисс

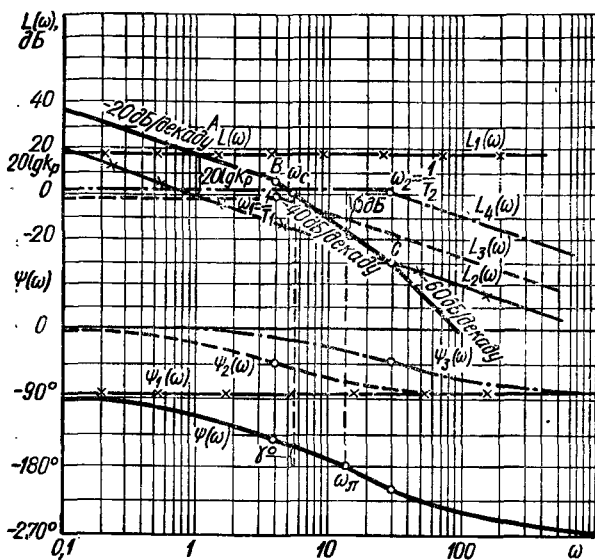


Рис. 2.24. Пример построения логарифмических частотных характеристик системы в разомкнутом состоянии.

на уровне $20 \lg k_p$. Второе слагаемое $L_2(\omega) = -20 \lg \omega$, представляющее собой выражение для ЛАЧХ интегрирующего звена, как было показано, на графике изображается прямой $L_2(\omega)$ с наклоном -20 дБ/дек, пересекающей ось 0 дБ при частоте $\omega = 1$. Третье и четвертое слагаемые $L_3(\omega) = -20 \lg \sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1}$, $L_4(\omega) = -20 \lg \sqrt{T_2^2 \omega^2 + 1}$ представляют собой выражения для ЛАЧХ апериодических звеньев в случае, если их коэффициенты усиления равны единице. Графически изображаются горизонтальными отрезками и отрезками с наклоном -20 дБ/дек, сопрягающимися при частотах сопряжения, соответственно равными $\omega_1 = 1/T_1$ и $\omega_2 = 1/T_2$.

ЛАЧХ системы, полученная сложением ординат ЛАЧХ отдельных звеньев, на рис. 2.24 изображена ломаной $L(\omega)$.

При построении ЛАЧХ системы обычно не строят ЛАЧХ отдельных звеньев, а придерживаются следующей методики: 1) определяют сопрягающие частоты $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ (для рассматриваемого примера $\omega_1 = 1/T_1, \omega_2 = 1/T_2$) и откладывают вдоль оси частот (рис. 2.24); 2) на частоте $\omega = 1$ откладывают ординату, равную $20 \lg k_p$, где k_p — коэффициент усиления разомкнутой системы (точка A); 3) через точку A проводят прямую с наклоном $-v$ 20 дБ/дек (где v — порядок астатизма системы, для нашего случая $v = 1$) до первой частоты сопряжения ω_1 (точка B). Этот отрезок будет низкочастотной асимптотой ЛАЧХ системы. Если окажется, что первая частота сопряжения $\omega_1 < 1$, то через точку A пройдет продолжение низкочастотной асимптоты; 4) после каждой из частот сопряжения ω_i необходимо изменять наклон ЛАЧХ на -20 дБ/дек, если частота сопряжения определяется постоян-

ной времени сомножителя ($T_1 j\omega + 1$) знаменателя передаточной функции, и на $+20$ дБ/дек, если эта частота определяется постоянной времени сомножителя числителя. В рассматриваемом примере все сомножители находятся в знаменателе КПФ, поэтому при ω_1 и ω_2 необходимо изменять наклон ЛАЧХ на -20 дБ/дек. При наличии колебательных звеньев наклон ЛАЧХ изменяют на ± 40 дБ/дек.

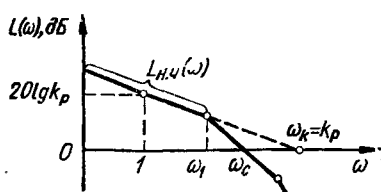


Рис. 2.25. К определению частоты ω_k .

Найдем частоту ω_k , при которой низкочастотная асимптота ЛАЧХ системы или ее продолжение пересекает ось 0 дБ (рис. 2.25). Если система имеет астатизм 1-го порядка ($\nu = 1$), то низкочастотная асимптота и ее продолжение определяются суммой первых двух членов выражения (2.108): $L_{н.ч}(\omega) = 20 \lg k_p - 20 \lg \omega$. В точке пересечения асимптоты или ее продолжения с осью 0 дБ имеем $L_{н.ч}(\omega_k) = 20 \lg k_p - 20 \lg \omega_k = 0$, откуда искомая частота $\omega_k = k_p$.

Это свойство можно использовать при построении низкочастотной асимптоты ЛАЧХ: на оси 0 дБ следует отметить точку, соответствующую частоте $\omega_k = k_p$, и через эту точку провести (пунктирную) прямую с наклоном -20 дБ/дек. Низкочастотная ЛАЧХ системы будет совпадать с этой прямой до первой частоты сопряжения ω_1 . Дальнейшее построение ЛАЧХ выполняется в соответствии с п. 4 изложенной выше методики. Используя свойство $\omega_k = k_p$, можно непосредственно по ЛАЧХ определить коэффициент усиления системы k_p . Для этого достаточно определить частоту ω_k в точке пересечения низкочастотной асимптоты ЛАЧХ или ее продолжения с осью 0 дБ.

Если система имеет астатизм второго порядка ($\nu = 2$), то уравнение пересечения низкочастотной ЛАЧХ (или продолжения асимптоты) с осью 0 дБ имеет вид: $L_{н.ч}(\omega_k) = 20 \lg k_p - 20 \lg \omega_k^2 = 0$, откуда $\omega_k = \sqrt{k_p}$. Для построения низкочастотной асимптоты ЛАЧХ в этом случае необходимо через точку на оси 0 дБ, соответствующую частоте $\omega_k = \sqrt{k_p}$, провести прямую с наклоном -40 дБ/дек.

Частота ω_c , при которой модуль КПФ системы $N(\omega_c) = 1$, называется *частотой среза*. Учитывая, что $L(\omega_c) = 20 \lg N(\omega_c) = 0$, частотой среза ω_c будет частота, при которой ЛАЧХ пересекает ось 0 дБ (рис. 2.25). Выражение для ЛФЧХ системы:

$$\psi(\omega) = -\pi/2 - \arctg \omega T_1 - \arctg \omega T_2,$$

т. е. ЛФЧХ системы может быть получена так же, как и ЛАЧХ системы: простым сложением ординат ЛФЧХ звеньев, входящих в систему. Однако на практике вычисляют значения ЛФЧХ системы аналитически. Для этого удобно составить таблицу следующей формы:

ω	$\psi_1(\omega) = -\pi/2$	ωT_1	$\psi_2(\omega) = -\arctg \omega T_1$	ωT_2	$\psi_3(\omega) = -\arctg \omega T_2$	$\psi(\omega) = \psi_1(\omega) + \psi_2(\omega) + \psi_3(\omega)$
----------	---------------------------	--------------	---------------------------------------	--------------	---------------------------------------	---

Логарифмические ФЧХ отдельных звеньев и системы изображены на рис. 2.24 кривыми с индексами в соответствии с приведенной выше таблицей.

ЛФЧХ системы $\psi(\omega)$ в области низких частот начинается со значений $-(\pi/2)\nu$, где ν — порядок астатизма системы. Из рис. 2.24 видно, что если в некоторой области частот наклон ЛАЧХ системы $L(\omega)$ сохраняет постоянное значение, то и ЛФЧХ системы $\psi(\omega)$ в этой области частот остается почти постоянной. В области низких частот, где наклон ЛАЧХ постоянен и равен -20 дБ/дек, кривая $\psi(\omega)$ также неизменна и равна -90° . По мере приближения к первой частоте сопряжения $\omega_1 = 1/T_1$, где наклон ЛАЧХ увеличивается до -40 дБ/дек, фазовая характеристика начинает изменяться все более быстро, стремясь к новому постоянному значению, равному -180° . Поскольку имеется еще одна частота сопряжения $\omega_2 = 1/T_2$, на которой наклон ЛАЧХ становится равным -60 дБ/дек, фазовая характеристика снова начинает резко изменяться в области этой частоты сопряжения, стремясь к значению -270° .

Построение логарифмической амплитудно-частотной характеристики по коэффициентам передаточной функции. Часто выражение передаточной функции сложной системы получается не в виде дроби, числитель и знаменатель которой представляют собой произведения передаточных функций элементарных звеньев, а в виде отношения полиномов (см., например, формулу (2.77)). Чтобы построить ЛАЧХ по передаточной функции, представленной в виде отношения полиномов, можно эти полиномы разложить на элементарные множители и для построения характеристики использовать рассмотренный выше метод. Однако при этом необходимо вычислять корни уравнений, получающихся приравниванием нулю полиномов числителя и знаменателя передаточной функции. Это усложняет процесс построения. В рассматриваемом случае построение ЛАЧХ удобнее выполнить непосредственно по коэффициентам полиномов передаточной функции. Убедимся в возможности такого построения на примере системы, состоящей из последовательно включенных двух апериодических и интегрирующего звеньев: $K_p(p) = k_p/p(T_1p + 1)(T_2p + 1)$. Асимптотическая ЛАЧХ такой системы представляет собой ломаную, имеющую изломы при частотах сопряжения $\omega_1 = 1/T_1$ и $\omega_2 = 1/T_2$. Низкочастотная асимптота имеет наклон -20 дБ/дек и проходит через точку с координатами $\omega = 1$; $L(\omega) = 20 \lg k_p$.

Раскроем скобки в выражении для передаточной функции

$$K_p(p) = \frac{k_p}{p[T_1T_2p^2 + (T_1 + T_2)p + 1]} = \frac{K_p}{p(a_0p^2 + a_1p + a_2)},$$

где $a_0 = T_1T_2$; $a_1 = T_1 + T_2$; $a_2 = 1$.

Определим отношения коэффициентов с большими индексами к коэффициентам с меньшими индексами:

$$a_2/a_1 = 1/(T_1 + T_2); a_1/a_0 = (T_1 + T_2)/T_1T_2.$$

Если при записи передаточной функции принимаются $T_1 > T_2$, то можно написать следующие приближенные равенства: $a_2/a_1 \approx 1/T_1 = \omega_1$; $a_1/a_0 \approx 1/T_2 = \omega_2$. Таким образом, значения частот сопряжения ЛАЧХ могут быть приближенно определены как отношения коэффициентов передаточной функции.

Данный метод построения ЛАЧХ может быть распространен также на более общий случай, когда передаточная функция системы имеет вид:

$$K_p(p) = \frac{k_p(b_0p^m + b_1p^{m-1} + \dots + b_{m-1}p + b_m)}{(a_0p^k + a_1p^{k-1} + \dots + a_{k-1}p + a_k)p^\nu}, \quad m \leq n; \quad n = k + \nu.$$

Определяются частоты сопряжения:

числителя $b_m/b_{m-1} = \omega'_1$; $b_{m-1}/b_{m-2} = \omega'_2$; ...; $b_1/b_0 = \omega'_m$,

знаменателя $a_k/a_{k-1} = \omega_1$; $a_{k-1}/a_{k-2} = \omega_2$; ...; $a_1/a_0 = \omega_k$

и их значения по мере роста откладываются по оси частот. Наклон ЛАЧХ на частотах сопряжения, принадлежащих знаменателю, изменяется на -20 дБ/дек, а на частотах сопряжения, принадлежащих числителю, на $+20$ дБ/дек. Низкочастотная асимптота проводится под наклоном -20 дБ/дек через точку с координатами $(\omega = 1; L(\omega) = 20 \lg k_p)$.

ГЛАВА 3

Устойчивость систем автоматического управления

3.1. Понятие и условие устойчивости САУ

Определение устойчивости САУ

Следящая система (рис. 1.14, а) находится в состоянии равновесия, когда ее ошибка $\theta(t) = 0$. Это состояние может быть устойчивым или неустойчивым. Если после некоторого изменения задающего воздействия $\alpha(t)$ (поворота ведущего вала на угол α_0) система в результате затухающего переходного процесса (рис. 2.1, а, б) снова приходит в состояние равновесия $\theta(t) = 0$, то это состояние равновесия является устойчивым и система называется устойчивой. Когда после незначительного изменения задающего воздействия (отклонения системы от равновесного состояния) система не стремится в первоначальное состояние равновесия, а в ней возникают незатухающие колебания управляемой величины $\beta(t)$ (рис. 2.1, в, г) или же изменение $\beta(t)$ будет независимым от $\alpha(t)$, то состояние равновесия в данной системе является неустойчивым и система называется неустойчивой.

Наглядное представление об устойчивом и неустойчивом равновесных состояниях дает рассмотрение системы шар — поверхность. Шар, помещенный во впадине (рис. 3.1, а), находится в устойчивом равновесном состоянии, так как после его отклонения под влиянием внешнего воздействия он возвратится в свое первоначальное состояние. Система шар — поверхность является устойчивой. Шар, расположенный на верхней точке возвышенности (рис. 3.1, б), находится в неустойчивом равновесном положении: достаточно незначительного отклонения от

Рис. 3.1. К понятию устойчивости равновесных состояний системы шар—поверхность:

а — устойчивое состояние; б — неустойчивое состояние; в — состояние, устойчивое при малых и неустойчивое при больших отклонениях.



этого состояния, и шар скатится по склону поверхности и не возвратится в исходное положение. Рассматриваемая система неустойчива.

Таким образом, *под устойчивостью понимается свойство системы возвращаться в прежнее состояние равновесия после вывода ее из этого состояния и прекращения изменения задающего или влияния возмущающего воздействия.*

Только устойчивая система является работоспособной. Поэтому одной из основных задач теории автоматического управления является исследование устойчивости САУ. Основы строгой теории устойчивости динамических систем были разработаны акад. А. М. Ляпуновым в работе «Общая задача об устойчивости движения» (1892 г.). Понятия об устойчивости, вытекающие из этой работы, заключаются в следующем.

Если система описывается линейным дифференциальным уравнением, то ее устойчивость не зависит от величины возмущения. Линейная система, устойчивая при малых возмущениях, будет устойчива и при больших. Нелинейные же системы могут быть устойчивы при малых возмущениях и неустойчивы при больших. Примером такой нелинейной системы являются стенные часы. Если неподвижному маятнику сообщить слабый толчок, то маятник, совершив несколько качаний, остановится, т. е. система устойчива при малых возмущениях. Если же маятнику сообщить более сильный толчок, то последний у заведенных часов начинает совершать незатухающие колебания. Следовательно, система неустойчива при больших возмущениях. Наглядное представление о нелинейных системах, устойчивых при малых и неустойчивых при больших возмущениях, дает рассмотрение шара, помещенного во впадине, расположенной на вершине выпуклого тела (рис. 3.1, в). При малых отклонениях, не превышающих края впадины, шар возвращается в исходное положение, т. е. система шар—поверхность устойчива. При отклонениях за край впадины шар не возвращается в исходное положение — система неустойчива. Поэтому для нелинейных систем устойчивость исследуется отдельно для случая малых возмущений, т. е. устойчивость в малом, и устойчивость при больших возмущениях, т. е. устойчивость в большом.

Согласно теореме Ляпунова, об устойчивости нелинейных систем при малых возмущениях можно судить по их линеаризованным уравнениям, достаточно точно описывающим поведение систем при малых отклонениях от состояния равновесия. Для определения устойчивости нелинейных систем при больших возмущениях необходимо пользоваться исходными нелинейными уравнениями динамики. В большинстве практических случаев системы, устойчивые при малых отклонениях, оказываются устойчивыми и при достаточно больших отклонениях, возможных в процессе эксплуатации, и поэтому вопрос об устойчивости этих систем может быть решен на основании исследования линеаризованных уравнений.

Проблема устойчивости обычно возникает в замкнутых САУ из-за влияния обратной связи. Поэтому в дальнейшем устойчивость исследуется на примерах замкнутых систем, хотя методы исследования устойчивости универсальны.

Условие устойчивости САУ

Ответить на вопрос, будет ли устойчива данная система, можно, решив линеаризованное дифференциальное уравнение замкнутой системы:

$$(c_0 p^n + c_1 p^{n-1} + \dots + c_n) \beta(t) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m) \alpha(t). \quad (3.1)$$

Полное решение уравнения можно представить суммой вынужденной $\beta_v(t)$ и переходной $\beta_n(t)$ составляющих:

$$\beta(t) = \beta_v(t) + \beta_n(t).$$

Вынужденная составляющая, представляющая собой частное решение уравнения, является полезной составляющей управляемой величины и характеризует установившийся режим системы. Переходная составляющая является решением однородного дифференциального уравнения и характеризует переходный режим. Эта составляющая, как уже указывалось (см., например, рис. 1.3), по существу представляет ошибку системы в переходном режиме (отклонение системы от равновесного состояния, $\beta_n(t) = \theta(t)$) и поэтому является нежелательной составляющей управляемой величины. Очевидно, что система будет устойчивой, если переходная составляющая в ней с течением времени затухает, т. е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta_n(t) = 0. \quad (3.2)$$

Если же $\beta_n(t)$ при $t \rightarrow \infty$ не стремится к нулю, а возрастает или изменяется по закону незатухающих колебаний, то система неустойчива. Таким образом, для определения устойчивости необходимо выявить только характер изменения переходной составляющей решения, т. е. достаточно исследовать однородное уравнение замкнутой системы:

$$(c_0 p^n + c_1 p^{n-1} + \dots + c_{n-1} p + c_n) \beta_n(t) = 0. \quad (3.3)$$

Переходная составляющая (решение однородного уравнения) в случае некрatных корней может быть представлена в виде следующей суммы:

$$\beta_n(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots + A_n e^{p_n t} = \sum_{i=1}^n A_i e^{p_i t}, \quad (3.4)$$

где A_i — начальное значение i -й компоненты переходной составляющей (постоянная интегрирования); p_i — i -й корень характеристического уравнения однородного уравнения замкнутой системы (3.3):

$$c_0 p^n + c_1 p^{n-1} + \dots + c_{n-1} p + c_n = 0. \quad (3.5)$$

Чтобы система была устойчивой, решение (3.4) должно удовлетворять требованию

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta_n(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A_i e^{p_i t} = 0. \quad (3.6)$$

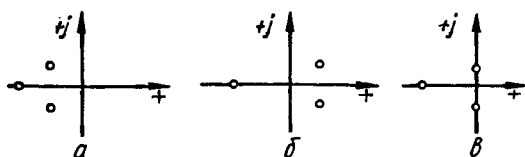


Рис. 3.2. Примеры расположения корней характеристического уравнения замкнутой системы на комплексной плоскости:

a — устойчивой; $б$ — неустойчивой; $в$ — находящейся на границе устойчивости.

Из формулы (3.4) видно, что затухание $\beta_n(t)$, т. е. устойчивость системы, зависит от значения корней $p_1, p_2, \dots, p_n$ характеристического уравнения замкнутой системы (3.5). Пусть среди них будет s корней вещественных и $n - s$ — комплексно-сопряженных. Тогда решение (3.4) можно записать в виде:

$$\beta_n(t) = \sum_{k=1}^s A_k e^{p_k t} + \sum_{i=1}^{(n-s)/2} A_i e^{\alpha_i t} \sin(\omega_i t + \varphi_i). \quad (3.7)$$

Выясним, как влияют значения корней на первую и вторую суммы формулы (3.7) при $t \rightarrow \infty$. Если все вещественные корни отрицательны ($p_k < 0$), то каждая составляющая первой суммы в формуле (3.7) представляет затухающую экспоненту и поэтому $\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^s A_k e^{p_k t} = 0$. Если вещественные части α_i всех комплексных корней отрицательны, то каждое слагаемое второй суммы (3.7) описывает затухающее колебание и поэтому

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{(n-s)/2} A_i e^{\alpha_i t} \sin(\omega_i t + \varphi_i) = 0.$$

Отсюда можно сделать вывод, что если все вещественные корни и все вещественные части комплексных корней отрицательны (все корни находятся в левой полуплоскости комплексной плоскости корней, рис. 3.2, a), то $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta_n(t) = 0$ и система будет устойчива. Если хотя бы один из вещественных корней или вещественная часть пары комплексных корней окажется положительной (рис. 3.2, $б$), то система будет неустойчивой, так как соответствующие этим корням составляющие в решении (3.7) $A_k e^{p_k t}$ и $A_i e^{\alpha_i t} \sin(\omega_i t + \varphi_i)$ с течением времени будут неограниченно возрастать. Если вещественная часть хотя бы одного корня равна нулю, а вещественные части остальных корней отрицательны (рис. 3.2, $в$), то система находится на границе устойчивости.

Таким образом, условием устойчивости системы автоматического управления является отрицательность вещественных частей всех корней ее характеристического уравнения (расположение всех корней характеристического уравнения в левой полуплоскости комплексной плоскости корней).

Корни характеристического уравнения замкнутой системы, как видно из (3.5), не зависят ни от вида задающего воздействия, ни от начальных условий, а определяются только соотношением коэффициентов $c_0, c_1, \dots, c_n$ левой части уравнения системы, т. е. параметрами самой

системы (постоянными времени звеньев, их коэффициентами усиления). Исследование устойчивости САУ может выполняться с целью определения как устойчивости системы при данных значениях ее параметров, так и некоторой области значений параметров, при которых система остается устойчивой.

Рассмотренное выше условие устойчивости для линейных систем является справедливым и для малых, и для больших возмущений. Для нелинейных систем, исследование которых производится с помощью линеаризованных уравнений, приведенное условие устойчивости справедливо для малых возмущений.

Понятие о критериях устойчивости САУ

Как было показано выше, исследование устойчивости системы сводится к определению знаков вещественных частей корней характеристического уравнения замкнутой системы. Знаки корней могут быть определены путем решения характеристического уравнения замкнутой системы. Но решение уравнений четвертой и более высоких степеней затруднительно. Поэтому применяются косвенные методы анализа устойчивости, которые дают ответ об устойчивости системы без определения корней характеристического уравнения. Такие методы называются критериями устойчивости.

3.2. Алгебраические критерии устойчивости

К алгебраическим критериям устойчивости относятся критерий Гурвица и критерий Рауса. Они отличаются только по форме, поэтому здесь рассмотрим один из них — критерий Гурвица.

Критерий устойчивости Гурвица

Критерий, предложенный немецким математиком А. Гурвицем в 1895 г., формулируется следующим образом:

чтобы все корни характеристического уравнения n -й степени

$$c_0 p^n + c_1 p^{n-1} + \dots + c_{n-1} p + c_n = 0$$

имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы при $c_0 > 0$ все n определителей Гурвица были больше нуля.

При составлении определителей Гурвица необходимо, чтобы для уравнения n -й степени было составлено n определителей: последний (главный) определитель n -го порядка, предпоследний — $(n - 1)$ -го порядка и т. д. Главный определитель Δ_n (опредетель n -го порядка) составляется следующим образом:

1) по главной диагонали выписываются коэффициенты уравнения в порядке возрастания индексов, начиная со второго (c_1) и до послед-

него (c_n) включительно:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} c_1 & c_3 & c_5 & \dots & 0 \\ c_0 & c_2 & c_4 & \dots & 0 \\ 0 & c_1 & c_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_n \end{vmatrix};$$

2) столбцы вверх от диагонали дополняются коэффициентами с возрастающими индексами, а столбцы вниз от диагонали — коэффициентами с убывающими индексами;

3) места недостающих коэффициентов заполняются нулями.

Определитель более низкого порядка получается из определителя более высокого порядка вычеркиванием одного столбца справа и строки снизу.

Рассмотрим примеры определения условий устойчивости Гурвица

Пример 1. Для уравнения 3-й степени

$$c_0 p^3 + c_1 p^2 + c_2 p + c_3 = 0$$

главный определитель Гурвица имеет вид

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} c_1 & c_3 & 0 \\ c_0 & c_2 & 0 \\ 0 & c_1 & c_3 \end{vmatrix};$$

условие устойчивости Гурвица при $c_0 > 0$

$$\Delta_1 = c_1 > 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} c_1 & c_3 \\ c_0 & c_2 \end{vmatrix} = c_1 c_2 - c_0 c_3 > 0;$$

$$\Delta_3 = c_3 (c_1 c_2 - c_0 c_3) > 0.$$

Если все коэффициенты уравнения положительны, то для устойчивости системы достаточно, чтобы $\Delta_3 > 0$, т. е. чтобы произведение коэффициентов при средних членах уравнения было больше, чем произведение коэффициентов при крайних членах.

Пример 2. Для уравнения 4-й степени

$$c_0 p^4 + c_1 p^3 + c_2 p^2 + c_3 p + c_4 = 0$$

главный определитель Гурвица:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} c_1 & c_3 & 0 & 0 \\ c_0 & c_2 & c_4 & 0 \\ 0 & c_1 & c_3 & 0 \\ 0 & c_0 & c_2 & c_4 \end{vmatrix};$$

условие устойчивости Гурвица при $c_0 > 0$:

$$\Delta_1 = c_1 > 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} c_1 & c_3 \\ c_0 & c_2 \end{vmatrix} = c_1 c_2 - c_0 c_3 > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} c_1 & c_3 & 0 \\ c_0 & c_2 & c_4 \\ 0 & c_1 & c_3 \end{vmatrix} = c_1 c_2 c_3 - c_0 c_3^2 - c_1^2 c_4 = c_3 (c_1 c_2 - c_0 c_3) - c_1^2 c_4 > 0;$$

$$\Delta_4 = c_4 \Delta_3 > 0.$$

Из записанных неравенств видно, что если все коэффициенты характеристического уравнения положительны, то при выполнении третьего неравенства ($\Delta_3 > 0$) будут выполняться и другие неравенства, т. е. в этом случае для получения устойчивой системы достаточно, чтобы $\Delta_3 > 0$.

Предельный коэффициент усиления системы

Из первой и второй глав (см., например, формулу (2.75)) следует, что для уменьшения ошибок в установившемся режиме необходимо повышать коэффициент усиления системы в разомкнутом состоянии k_p . Однако k_p входит в коэффициенты характеристического уравнения замкнутой системы и поэтому влияет на ее устойчивость. При увеличении k_p можно устойчивую систему превратить в неустойчивую. Коэффициент усиления системы k_p , соответствующий границе устойчивости системы, называется *предельным коэффициентом усиления системы* $k_{p.пр}$. Для получения устойчивой системы необходимо, чтобы $k_{p.пр} > k_p$.

Предельный коэффициент усиления можно найти с помощью критерия устойчивости Гурвица, если приравнять нулю определители Гурвица.

Методику определения $k_{p.пр}$ рассмотрим на конкретном примере.

Пример 3. Пусть дана следящая система, имеющая передаточную функцию в разомкнутом состоянии:

$$k_p(p) = \frac{D(p)}{F(p)} = \frac{k_p}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)p} = \frac{k_p}{a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3}.$$

Передаточная функция системы в замкнутом состоянии:

$$K_3(p) = \frac{D(p)}{F(p) + D(p)} = \frac{k_p}{c_0 p^3 + c_1 p^2 + c_2 p + c_3} = \frac{\beta(p)}{\alpha(p)}.$$

Коэффициенты знаменателя передаточной функции, в которые входит k_p , следует записать в явном виде относительно k_p . В рассматриваемом случае, когда $D(p) = k_p$, имеем $c_3 = k_p$. В другие коэффициенты k_p не входит. ■

Характеристическое уравнение замкнутой системы

$$F_3(p) = c_0 p^3 + c_1 p^2 + c_2 p + c_3 = 0.$$

При положительных коэффициентах условие устойчивости Гурвица имеет вид:

$$\Delta_2 = c_1 c_2 - c_0 c_3 > 0,$$

или, учитывая, что $c_3 = k_p$,

$$\Delta_2 = c_1 c_2 - c_0 k_p > 0.$$

Из уравнения, определяющего границу устойчивости системы, $\Delta_2 = c_1 c_2 - c_0 k_{p.пр} = 0$, найдем предельный коэффициент усиления $k_{p.пр} = c_1 c_2 / c_0$.

Коэффициент запаса устойчивости по усилению. Коэффициент запаса устойчивости по усилению σ представ-

ляет собой отношение предельного коэффициента усиления разомкнутой системы к коэффициенту усиления системы, т. е. $\sigma = k_{p,пр}/k_p$. Коэффициент запаса σ показывает, во сколько раз может быть увеличен коэффициент усиления системы, чтобы система стала неустойчивой. Обычно принято коэффициент запаса по устойчивости выражать в децибелах: $\sigma [дБ] = 20 \lg \sigma = 20 \lg k_{p,пр} - 20 \lg k_p$. В этом случае запас устойчивости по усилению соответствует числу децибел, на которое нужно изменить усиление системы, чтобы она стала неустойчивой. Считается, что система должна обладать запасом устойчивости в пределах 10...15 дБ.

С помощью критерия устойчивости Гурвица сравнительно просто исследовать устойчивость системы, описываемую уравнениями не выше 4—5-го порядка. Исследование же систем более высокого порядка с помощью критерия Гурвица становится сложным. Кроме того, недостатком критерия Гурвица является то, что трудно проследить, как влияет тот или иной параметр системы (T , ξ , k_p) на ее устойчивость. Поэтому наряду с алгебраическим критерием устойчивости Гурвица применяются частотные критерии устойчивости.

3.3. Частотные критерии устойчивости

Частотные критерии устойчивости основаны на использовании частотных характеристик. Разработаны следующие частотные критерии устойчивости: критерий устойчивости Михайлова, амплитудно-фазовый критерий устойчивости (критерий Найквиста — Михайлова), логарифмический частотный критерий. Основное преимущество частотных критериев устойчивости перед алгебраическими критериями заключается в том, что частотные характеристики можно получить экспериментально. Это, как уже отмечалось, важно в тех случаях, когда трудно составить уравнения динамики (например, для систем с распределенными параметрами). Кроме того, частотные характеристики позволяют сравнительно просто определить влияние того или иного параметра на устойчивость, а также дают возможность судить о переходном процессе системы. Из частотных критериев устойчивости рассмотрим амплитудно-фазовый и логарифмический.

Амплитудно-фазовый критерий устойчивости (критерий устойчивости Найквиста — Михайлова)

Амплитудно-фазовый критерий устойчивости, первоначально разработанный в 1932 г. Х. Найквистом для исследования усилителей с отрицательной обратной связью, в 1936 г. был обоснован, обобщен и впервые применен в теории автоматического управления А. В. Михайловым. Критерий Найквиста — Михайлова позволяет судить об устойчивости замкнутой системы по виду АФЧХ системы в разомкнутом состоянии. Различают формулировки критерия для случаев, когда система в разомкнутом состоянии устойчива и неустойчива.

Для первого случая критерий устойчивости формулируется сле-

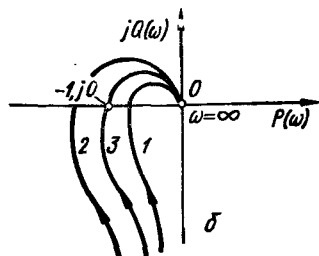
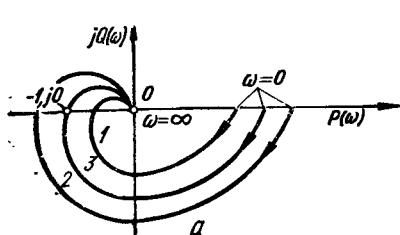


Рис. 3.3. Амплитудно-фазовые частотные характеристики САУ:
а — статических; б — астатических.

дующим образом: система автоматического управления, устойчивая в разомкнутом состоянии, будет устойчива в замкнутом состоянии, если АФЧХ разомкнутой системы не охватывает точку на комплексной плоскости с координатами $(-1, j0)$.

На рис. 3.3 показаны АФЧХ статических и астатических систем. Амплитудно-фазовые характеристики 1 не охватывают критическую точку, поэтому системы с такими характеристиками устойчивы. Амплитудно-фазовые частотные характеристики 2 охватывают точку $(-1, j0)$, поэтому системы 2 неустойчивы. Амплитудно-фазовые частотные характеристики 3 проходят через критическую точку; соответствующие системы находятся на границе устойчивости.

Приведем доказательство критерия. Если передаточная функция системы в разомкнутом состоянии $K_p(p) = D(p)/F(p)$, то передаточная функция замкнутой системы $K_z(p) = D(p)/[F(p) + D(p)] = D(p)/F_z(p)$, где $F_z(p) = F(p) + D(p)$. Рассмотрим функцию

$$F_z(p)/F(p) = f(p), \quad (3.8)$$

т. е. отношение характеристического полинома замкнутой системы к характеристическому полиному разомкнутой системы. Числитель и знаменатель выражения (3.8) можно представить так:

$$f(p) = \frac{F_z(p)}{F(p)} = \frac{(p - p_1)(p - p_2)(p - p_3) \dots (p - p_n)}{(p - p'_1)(p - p'_2)(p - p'_3) \dots (p - p'_n)},$$

где $p_1, p_2, \dots, p_n$ — корни характеристического уравнения замкнутой системы; $p_1, p_2, \dots, p_n$ — корни характеристического уравнения разомкнутой системы. Подставляя $j\omega$ вместо p в последнее выражение, получим

$$f(j\omega) = \frac{F_z(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_n)}{(j\omega - p'_1)(j\omega - p'_2) \dots (j\omega - p'_n)}.$$

При разработке критерия устойчивости задача состоит в определении условий, при которых все корни характеристического уравнения замкнутой системы лежат слева от мнимой оси комплексной плоскости. На комплексной плоскости каждый из корней p_i и p'_i изображается точкой (см. рис. 3.2) или вектором, проведенным из начала координат в соответствующую точку (рис. 3.4, а). Текущая координата $j\omega_i$ гео-

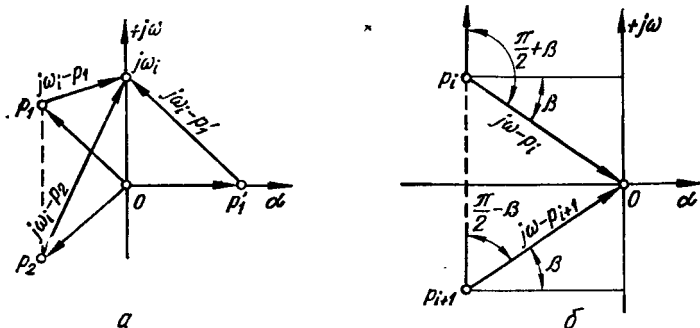


Рис. 3.4. Векторное изображение на комплексной плоскости корней характеристического уравнения, текущих координат $j\omega_i$, сомножителей $(j\omega - p_i)$ (а) и определение угла поворота вектора $(j\omega - p_i)$ при изменении ω от 0 до ∞ .

метрически также изображается вектором, направленным из начала координат вдоль мнимой оси. Каждый сомножитель $(j\omega - p_i)$ или $(j\omega - p'_i)$, являющийся разностью двух векторов, представляет собой также вектор, начало которого находится в точке, соответствующей корню p_i или p'_i , а конец — в точке $j\omega_i$ на мнимой оси $j\omega$. При изменении $j\omega_i$ концы разностных векторов будут перемещаться вдоль мнимой оси, а сами векторы поворачиваться. Принято считать поворот вектора против часовой стрелки положительным. При изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ каждый разностный вектор числителя $(j\omega - p_i)$ и знаменателя $(j\omega - p'_i)$, начало которого (т. е. соответствующий корень) лежит в левой полуплоскости, повернется на угол π , в каждый вектор, начало которого находится в правой полуплоскости, — на $-\pi$. На практике ограничиваются изменением ω от 0 до ∞ . При этом, если p_i (или p'_i) — корень действительный отрицательный, то при изменении ω от 0 до ∞ вектор $(j\omega - p_i)$ повернется на угол $+\pi/2$. Если среди корней имеются два комплексных корня $p_{i,j+1} = \alpha \pm j\Omega$, расположенных, например, как показано на рис. 3.4, б, то при изменении ω от 0 до ∞ вектор $(j\omega - p_i)$ повернется на угол $\pi/2 + \beta$, а вектор $(j\omega - p_{i+1})$ на угол $\pi/2 - \beta$. Сумма углов поворота этих двух векторов равна $2\pi/2$.

Таким образом, можно считать, что при изменении ω от 0 до ∞ каждый разностный вектор числителя $(j\omega - p_i)$ и знаменателя $(j\omega - p'_i)$ поворачивается на $\pi/2$ или $-\pi/2$ в зависимости от того, где лежит соответствующий корень.

Поскольку функции $F_3(j\omega)$ и $F(j\omega)$ равны произведению элементарных векторов, то и сами эти функции являются векторами, аргументы которых равны сумме аргументов соответствующих разностных векторов:

$$\arg F_3(j\omega) = \arg(j\omega - p_1) + \dots + \arg(j\omega - p_n),$$

$$\arg F(j\omega) = \arg(j\omega - p'_1) + \dots + \arg(j\omega - p'_n).$$

Результирующее изменение $\arg F_3(j\omega)$ и $\arg F(j\omega)$ при изменении ω от 0 до ∞ зависит от расположения соответствующих корней на ком-

плексной плоскости. Предположим, что разомкнутая система устойчива (устойчивость разомкнутой системы часто можно определить без всяких вычислений непосредственно по схеме системы; например, разомкнутая система, состоящая из устойчивых звеньев и не содержащая местных обратных связей, заведомо устойчива). В этом случае корни p_i находятся в левой полуплоскости и изменение аргумента $F(j\omega)$ (поворот характеристического вектора разомкнутой системы) при изменении ω от 0 до $+\infty$ равно $\Delta \arg F(j\omega) = n\pi/2$, где n — степень характеристического уравнения разомкнутой системы $F(p) = 0$.

Изменение аргумента $F_s(j\omega)$ при изменении ω от 0 до $+\infty$ в общем случае равно $\Delta \arg F_s(j\omega) = (n - l)\pi/2 - l\pi/2 = (n - 2l)\pi/2$, где l — число корней в правой полуплоскости.

Изменение аргумента $f(j\omega)$ равно разности изменений аргументов числителя и знаменателя:

$$\Delta \arg f(j\omega) = \Delta \arg F_s(j\omega) - \arg F(j\omega) = (n - 2l)\pi/2 - n\pi/2 = -l\pi.$$

Система будет устойчива, если $l = 0$, т. е. если $\Delta \arg f(j\omega) = 0$.

Вектор $f(j\omega)$ при изменении ω от 0 до $+\infty$ опишет угол, равный нулю, лишь в том случае, если годограф этого вектора не охватывает начала координат (рис. 3.5, а).

От годографа $f(j\omega)$ легко перейти к годографу $K_p(j\omega)$, т. е. к АФЧХ разомкнутой системы. Действительно, выражение для $f(j\omega)$ можно записать в следующем виде:

$$f(j\omega) = \frac{F(j\omega) + D(j\omega)}{F(j\omega)} = 1 + \frac{D(j\omega)}{F(j\omega)} = 1 + K_p(j\omega),$$

где $K_p(j\omega)$ — комплексная передаточная функция разомкнутой системы. Геометрически последнее выражение иллюстрируется на рис. 3.5, а.

Таким образом, годограф вектора $f(j\omega)$ представляет АФЧХ разомкнутой системы, но сдвинутую вправо на единицу. Поскольку удобнее пользоваться амплитудно-фазовой частотной характеристикой, а не годографом вектора $f(j\omega)$, то перенесем ось координат вправо на единицу, как показано на рис. 3.5, б. Изменение аргумента $f(j\omega)$ при изменении ω от 0 до $+\infty$ будет равно нулю, если точка $(-1, j0)$ находится вне амплитудно-фазовой частотной характеристики разомкнутой системы.

Отсюда следует формулировка частотного случая критерия устойчивости Найквиста — Михайлова: система автоматического управления,

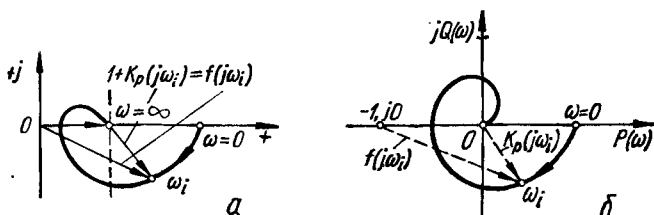


Рис. 3.5. Годограф вектора $f(j\omega)$ (а) и АФЧХ разомкнутой системы (б).

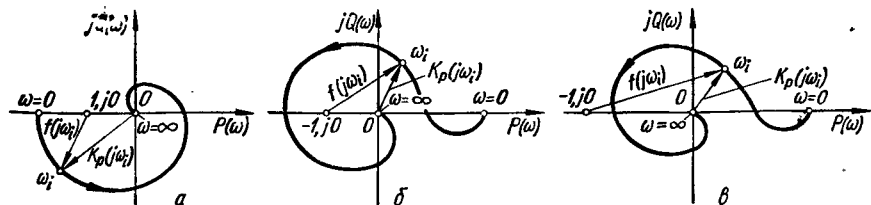


Рис. 3.6. АФЧХ устойчивых и неустойчивых систем, имеющих l корней характеристического уравнения в правой полуплоскости:

a — устойчивой системы ($l = 1$); b — устойчивой системы ($l = 2$); c — неустойчивой системы ($l = 2$).

устойчивая в разомкнутом состоянии, будет устойчива в замкнутом состоянии, если АФЧХ разомкнутой системы не охватывает критическую точку $(-1, j0)$.

Если система в разомкнутом состоянии неустойчива (например, имеются звенья, охваченные положительной обратной связью), то при определенных условиях замкнутая система может быть устойчивой. В этом случае изменение аргумента характеристического вектора разомкнутой системы $F(j\omega)$ при изменении ω от 0 до $+\infty$ равно $\Delta \arg F(j\omega) = (n - 2l)\pi/2$, где l — число корней характеристического уравнения разомкнутой системы в правой полуплоскости.

Если замкнутая система устойчива, то $\Delta \arg F_s(j\omega) = n\pi/2$, тогда $\Delta \arg f(j\omega) = n\pi/2 - (n - 2l)\pi/2 = (l/2)2\pi$, т. е. система автоматического управления, неустойчивая в разомкнутом состоянии и имеющая l корней в правой полуплоскости, будет устойчива в замкнутом состоянии, если АФЧХ разомкнутой системы охватывает критическую точку $(-1, j0)$ $l/2$ раз в положительном направлении при изменении частоты ω от 0 до $+\infty$. На рис. 3.6, a , b , c показаны АФЧХ устойчивых и неустойчивых систем для различных l .

Системы, неустойчивые в разомкнутом состоянии, включают в себя неустойчивые звенья. Рассмотрим неустойчивые апериодическое и колебательное звенья.

Неустойчивое апериодическое звено описывается передаточной функцией $K(p) = k/(Tp - 1)$ или КПФ $K(j\omega) = k/(j\omega T - 1) = P(\omega) + jQ(\omega)$, где $P(\omega) = -k/[1 + (\omega T)^2]$; $Q(\omega) = -\omega k T/[1 + (\omega T)^2]$. АФЧХ звена изображена на рис. 3.7, a .

Неустойчивое колебательное звено ($\xi < 0$) имеет передаточную функцию $K(p) = k/(T^2 p^2 - 2\xi T p + 1)$, откуда КПФ

$$K(j\omega) = k/(1 - T^2\omega^2 - j2\xi T\omega) = P(\omega) + jQ(\omega),$$

где

$$P(\omega) = \frac{k(1 - T^2\omega^2)}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2}; \quad Q(\omega) = \frac{2k\xi T\omega}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2}.$$

АФЧХ звена изображена на рис. 3.7, b .

Понятие об условной устойчивости многоконтурных систем. Правило о числе переходов амплитудно-фазовых частотных характеристик. Для повышения точности в системы включают различные корректи-

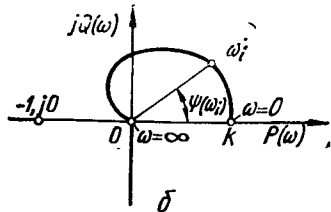
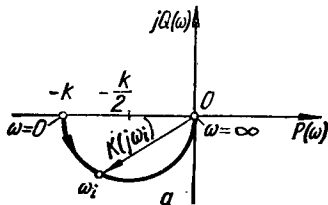


Рис. 3.7. АФЧХ неустойчивых звеньев: а — аperiodического; б — колебательного.

рующие устройства. Амплитудно-фазовые частотные характеристики таких систем могут иметь сложную форму. Часто АФЧХ пересекают вещественную ось и справа и слева от критической точки $(-1, j0)$ (рис. 3.8). Такие системы с клювообразной АФЧХ называются системами *условно устойчивыми*, или системами второго рода (обычные системы называют системами первого рода).

Система, устойчивая в разомкнутом состоянии, АФЧХ которой в разомкнутом состоянии не охватывает точку $(-1, j0)$, устойчива в замкнутом состоянии. Вывести данную систему из устойчивости, в отличие от системы первого рода, можно не только увеличением коэффициента усиления разомкнутой системы, но и его уменьшением.

При определении устойчивости систем с клювообразными и более сложными по форме АФЧХ практически удобнее пользоваться правилом о числе переходов, вытекающим из критерия устойчивости.

Рассмотрим наиболее распространенный случай, когда САУ в разомкнутом состоянии устойчива. Будем считать переход АФЧХ через вещественную ось снизу вверх отрицательным, а сверху вниз — положительным. Направление движения по АФЧХ при этом принимаем совпадающим с направлением возрастания ω . С учетом сделанного замечания правило о числе переходов можно сформулировать следующим образом: *система автоматического управления, устойчивая в разомкнутом состоянии, будет устойчива в замкнутом состоянии, если разность между числами положительных и отрицательных переходов АФЧХ разомкнутой системы через отрезок $(-\infty, -1)$ вещественной оси равна нулю.*

Физический смысл амплитудно-фазового критерия устойчивости. Физический смысл амплитудно-фазового критерия для систем первого рода, устойчивых в разомкнутом состоянии, можно объяснить следующим образом. Система автоматического управления обычно (см., например, рис. 2.4) содержит аperiodические, колебательные и интегрирующие звенья, которые вносят запаздывание колебаний по фазе. Запаздывания, вносимые аperiodическим и колебательным звеньями, согласно выражениям для аргументов комплексных передаточных функций этих звеньев:

$$\psi_i(\omega) = -\operatorname{arctg} T_i \omega; \quad \psi_k(\omega) = -\operatorname{arctg} [2\xi T_k \omega / (1 - T_k^2 \omega^2)],$$

с увеличением частоты увеличиваются. Из-за этого колебания на выходе разомкнутой системы (рис. 3.9, а) будут отставать по фазе относительно колебаний $\theta(t)$ на входе. С увеличением частоты, согласно приве-

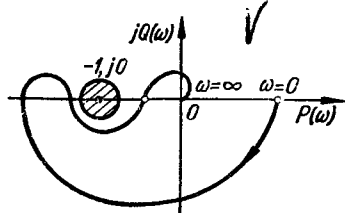
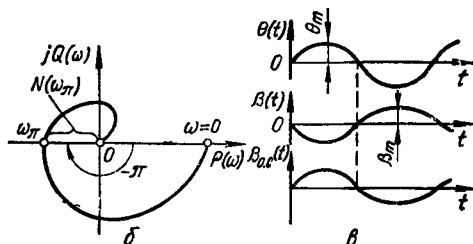
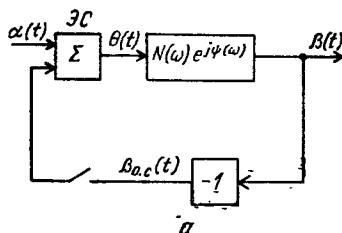


Рис. 3.9. Структурная схема (а), АФЧХ (б) и формы колебаний на входе и выходе разомкнутой системы (в).



денным выражениям, это отставание увеличивается и на определенной частоте ω_π колебания $\beta(t)$ будут отставать от колебаний $\theta(t)$ на 180° (рис. 3.9, б, в). Колебания $\beta_{o.c}(t)$ на выходе отрицательной обратной связи (рис. 3.9, а) на этой частоте будут совпадать по фазе с колебаниями $\theta(t)$ на входе системы (рис. 3.9, в). Благодаря этому на частоте ω_π обратная связь из отрицательной превращается в положительную.

Если на частоте ω_π модуль $N(\omega_\pi)$ КПФ разомкнутой системы равен или больше единицы ($N(\omega_\pi) \geq 1$), т. е. если амплитуда β_m выходных колебаний системы будет равна амплитуде колебаний на входе или больше ее, то при замыкании системы в ней возникнут соответственно либо незатухающие, либо возрастающие колебания, т. е. система будет неустойчива.

Если модуль $N(\omega_\pi) < 1$, т. е. если при прохождении через прямой канал системы сигнал ослабляется и амплитуда β_m колебания на выходе будет меньше, чем на входе θ_m , то колебания в замкнутой системе затухнут, так как на вход системы с выхода обратной связи каждый раз будет поступать колебание все меньшей амплитуды. Система в этом случае будет устойчива.

Запас устойчивости по модулю и по фазе. Система находится на границе устойчивости, если $N_{гр}(\omega_\pi) = \beta_m/\theta_m = 1$. Под *коэффициентом запаса устойчивости по модулю* понимают отношение

$$\sigma = N_{гр}(\omega_\pi)/N(\omega_\pi) = 1/N(\omega_\pi) = 1/OB,$$

где OB — расстояние между началом координат и точкой пересечения АФЧХ с вещественной осью (рис. 3.10, а). Коэффициент σ показывает, во сколько раз можно увеличить модуль $N(\omega_\pi)$ КПФ разомкнутой системы, чтобы замкнутая система пришла к границе устойчивости. При $\sigma > 1$ система устойчива, при $\sigma = 1$ — находится на границе устойчивости, при $\sigma < 1$ — неустойчива.

Иногда коэффициент запаса устойчивости по модулю выражают в децибелах:

$$\sigma = 20 \lg [1/N(\omega_\pi)] = 20 \lg (1/OB).$$

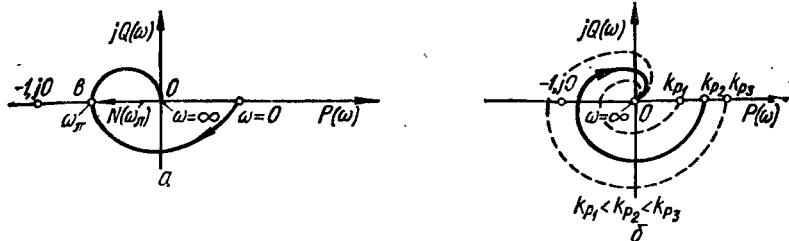


Рис. 3.10. К определению запаса устойчивости по модулю:

a — АФЧХ устойчивой системы; *б* — изменение АФЧХ и запаса устойчивости системы с изменением k_p .

Обычно для нормальной работы требуется, чтобы $\sigma = 10...15$ дБ. При таком запасе устойчивости изменения параметров системы, как правило, не приводят к потере ее устойчивости.

Модуль КПФ $N(\omega)$, как было показано выше, пропорционален коэффициенту усиления разомкнутой системы k_p :

$$N(\omega) = k_p \sqrt{P_0^2(\omega) + Q_0^2(\omega)},$$

а ее аргумент $\psi(\omega) = \text{arctg} [Q_0(\omega)/P_0(\omega)]$ не зависит от k_p . Поэтому АФЧХ системы при увеличении k_p , не изменяя своей формы, пропорционально расширяется, а при уменьшении k_p сжимается, как показано на рис. 3.10, б. Это значит, что при увеличении k_p АФЧХ может измениться так, что будет охватывать критическую точку $(-1, j0)$, т. е. система может перейти в неустойчивый режим.

Для характеристики степени устойчивости недостаточно знать только запас устойчивости по модулю. Например, возможен случай, что АФЧХ (рис. 3.11) пересекает вещественную ось далеко от критической точки, а следовательно, система имеет большой запас устойчивости по модулю σ , но затем АФЧХ проходит близко к этой точке. Последнее свидетельствует о малой степени устойчивости системы. Для более полной характеристики устойчивости системы введено понятие *запаса устойчивости по фазе*.

Для выяснения запаса устойчивости по фазе системы, имеющей АФЧХ 1, показанную на рис. 3.12, проведем окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Частота в точке ее пересечения с АФЧХ 1 называется *частотой среза* ω_c . Проведем вектор $K_p(j\omega_c)$ в эту точку. Модуль $N(\omega_c) = 1$, т. е. на частоте ω_c выполняется условие самовозбуждения системы по амплитуде. Изменим АФЧХ так, чтобы система перешла к границе устойчивости (АФЧХ 2). При этом вектор $K(j\omega_c)$ единичной длины повернется по часовой стрелке на угол γ до совпадения с отрицательной вещественной осью и аргумент КПФ $\psi(\omega_c) = \psi(\omega_\pi) = -180^\circ$, т. е. будет выполняться условие самовозбуждения по фазе. Угол γ между вектором КПФ, модуль которого равен единице, и отрицательной вещественной осью называется *запасом устойчивости по фазе*.

Таким образом, запас устойчивости по фазе характеризует отличие фазового угла $\psi(\omega_c)$ АФХ разомкнутой системы на частоте среза от

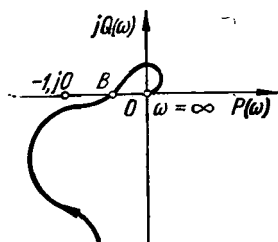


Рис. 3.11. АФЧХ системы, имеющей достаточный запас устойчивости по модулю, но малую степень устойчивости.

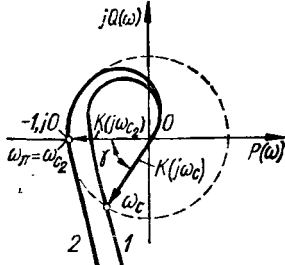


Рис. 3.12. К определению запаса устойчивости по фазе.

критического значения угла $\psi(\omega_{\pi}) = -180^\circ$, при котором удовлетворяется фазовое условие самовозбуждения системы. Обычно обеспечивается запас устойчивости по фазе $\gamma = 30 \dots 45^\circ$. При таком значении γ возможные изменения параметров системы, как правило, не приводят к потере ее устойчивости.

Для определения того, устойчива система или нет, не обязательно строить всю АФЧХ, а достаточно найти точку пересечения АФЧХ с вещественной осью. Для этого необходимо из уравнения $Q(\omega) = 0$ определить частоту, при которой АФЧХ пересекает вещественную ось, и подставить ее в выражение для $P(\omega)$ (здесь $Q(\omega)$ и $P(\omega)$ — мнимая и вещественная частотные характеристики разомкнутой системы).

Логарифмический частотный критерий устойчивости

Построение АФЧХ сложных систем с целью исследования их устойчивости требует большой затраты времени. Этот процесс существенно упрощается при применении логарифмических частотных характеристик (ЛЧХ). Простота и наглядность метода ЛЧХ объясняются простотой построения логарифмических частотных характеристик и очевидной связью параметров системы с видом этих характеристик. Применение метода ЛЧХ дает возможность наглядно видеть влияние того или иного параметра системы на ее устойчивость и переходный процесс, а также позволяет сравнительно просто определить характеристику корректирующего устройства, обеспечивающего требуемые показатели качества системы. Логарифмический частотный критерий устойчивости основывается на амплитудно-фазовом критерии устойчивости и представляет по существу более удобную его формулировку.

Рассмотрим только случай, когда САУ в разомкнутом состоянии устойчива. Вначале выясним критерий устойчивости для САУ первого рода, имеющих наиболее простые по своей форме частотные характеристики.

На рис. 3.13, а изображены АФЧХ разомкнутых систем, отличающихся лишь коэффициентами усиления k_p ($k_{p2} > k_{p1}$). Из них АФЧХ 1, согласно амплитудно-фазовому критерию устойчивости, соответствует устойчивой, АФЧХ 2 — неустойчивой системе в замкнутом состоянии.

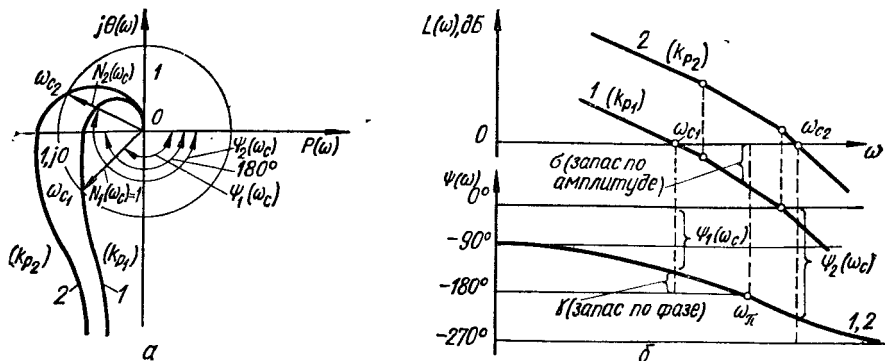


Рис. 3.13. Частотные характеристики систем, отличающихся коэффициентом усиления:

а — АФЧХ; б — ЛЧХ.

На рис. 3.13, б приведены ЛЧХ, соответствующие АФЧХ, изображенным на рис. 3.13, а. Поскольку системы отличаются лишь коэффициентом усиления k_p , то их ЛФЧХ совпадают, а ЛАЧХ 2 системы с k_{p2} располагается выше, чем ЛАЧХ 1 системы с k_{p1} . Из рис. 3.13, а следует, что устойчивость системы обеспечивается, если аргумент $\psi(\omega_c)$ комплексной передаточной функции системы при частоте среза ω_c по абсолютной величине меньше 180° . Применительно к ЛЧХ это условие устойчивости можно сформулировать следующим образом: *система автоматического управления, устойчивая в разомкнутом состоянии, будет устойчива и в замкнутом состоянии, если ордината логарифмической фазочастотной характеристики (аргумент комплексной передаточной функции) на частоте среза ω_c системы по абсолютной величине меньше, чем 180° , т. е. если $|\psi(\omega_c)| < 180^\circ$.*

Система с ЛАЧХ 1 (рис. 3.13, б) устойчива, поскольку $|\psi_1(\omega_c)| < 180^\circ$, а система с ЛАЧХ 2 неустойчива, так как $|\psi_2(\omega_c)| > 180^\circ$.

Система находится на границе устойчивости, если ее АФЧХ в разомкнутом состоянии проходит через точку с координатами $-1, j0$, т. е. если на частоте ω_π , на которой система вносит запаздывание $\psi(\omega_\pi) = -180^\circ$, модуль $N(\omega_\pi)$ КПФ равен 1. Поскольку $20 \lg 1 = 0$, то система будет находиться на границе устойчивости, если на частоте ω_π ЛАЧХ будет пересекать ось 0 дБ, т. е. если $\omega_c = \omega_\pi$. ЛЧХ системы, находящейся на границе устойчивости, изображены на рис. 3.14.

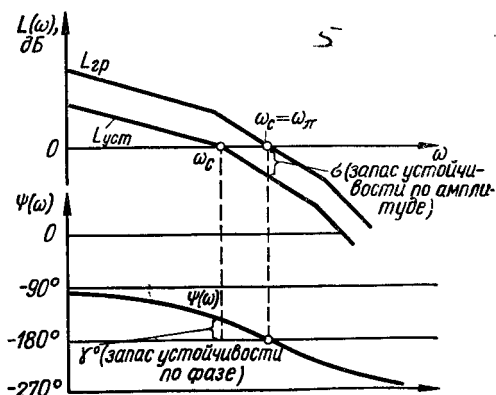


Рис. 3.14. К определению запаса устойчивости по амплитуде и фазе.

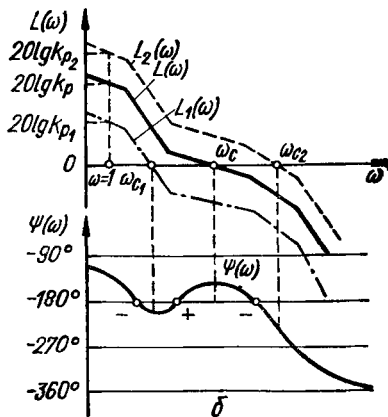
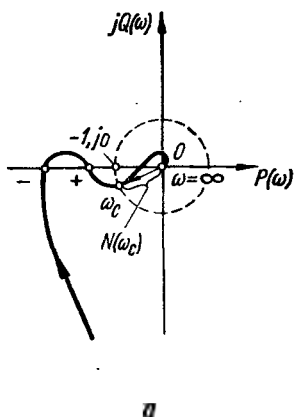


Рис. 3.15. Частотные характеристики условно устойчивой системы: а — АФЧХ; б — ЛЧХ; $L(\omega)$, $L_1(\omega)$, $L_2(\omega)$ — ЛАЧХ при различных коэффициентах усиления ($k_{p1} < k_{p2} < k_{p3}$); $\psi(\omega)$ — ЛФЧХ системы.

Запас устойчивости по амплитуде σ определяется как число децибел, на которое нужно увеличить усиление системы, чтобы система достигла границы устойчивости. **Запас устойчивости по фазе γ** определяется как разность между 180° и абсолютным значением аргумента КПФ при частоте среза ω_c , т. е. $\gamma = 180^\circ - |\psi(\omega_c)|$. Определение запаса устойчивости по амплитуде и по фазе показано на рис. 3.14,

Для систем с клювообразными и более сложными по форме АФЧХ практически удобнее пользоваться формулировкой логарифмического частотного критерия устойчивости, вытекающей из правила о числе переходов. На рис. 3.15, а изображена АФЧХ условно устойчивой системы, а на рис. 3.15, б — логарифмическая амплитудная $L(\omega)$ и логарифмическая фазочастотная $\psi(\omega)$ характеристики, соответствующие этой АФЧХ. Отрицательным переходам АФЧХ через отрицательную вещественную ось снизу вверх будут соответствовать переходы логарифмической ФЧХ через линию -180° сверху вниз, которые будем считать также отрицательными. Положительным переходам АФЧХ через отрицательную вещественную ось сверху вниз будут соответствовать переходы ЛФЧХ через линию -180° снизу вверх.

Принимая во внимание, что при $N(\omega) > 1$ ЛАЧХ положительна, логарифмический критерий устойчивости на основании правила о числе переходов можно сформулировать следующим образом: *система, устойчивая в разомкнутом состоянии, будет устойчива в замкнутом состоянии, если разность между числами положительных и отрицательных переходов фазочастотной характеристики через прямую -180° равна нулю в диапазоне частот, в котором логарифмическая амплитудно-частотная характеристика положительна.*

Логарифмические амплитудно- и фазочастотные характеристики $L(\omega)$, $\psi(\omega)$, изображенные на рис. 3.15, б, соответствуют устойчивой системе. На том же рисунке ЛАЧХ $L_1(\omega)$ и $L_2(\omega)$ той же системы, но с меньшим (k_{p1}) и большим (k_{p2}) коэффициентом усиления соответствующим неустойчивому режиму системы.

С помощью критериев устойчивости можно определить, устойчива ли система при заданных ее параметрах (постоянных времени, коэффициентах усиления). Однако при проектировании САУ часто ставится вопрос по-иному: заданы все параметры системы, за исключением одного или двух, которые могут изменяться в широких пределах; требуется определить, при каких значениях этих параметров система устойчива. Некоторые параметры системы могут изменяться также в процессе эксплуатации. Поэтому важно знать, сохранит ли система устойчивость при возможных изменениях этих параметров.

Поставленные задачи могут быть решены, если установить область возможных изменений тех или иных параметров (или коэффициентов характеристического уравнения) системы, при которых еще не нарушается ее устойчивая работа. Для построения областей устойчивости разработаны специальные методы: метод диаграмм Вышнеградского и метод D -разбиений.

ГЛАВА 4

Качество систем автоматического управления

4.1. Показатели качества систем автоматического управления

Как было выяснено в предыдущей главе, система автоматического управления должна быть устойчивой. Однако требование устойчивости является для САУ еще недостаточным. Система может быть устойчивой, т. е. ее переходный процесс носит затухающий характер, но время затухания настолько велико или ошибка в установившемся режиме настолько большая, что практически данная система не может быть использована. Поэтому система должна быть не только устойчивой, но и иметь определенный переходный процесс, а ее ошибки в установившихся режимах не должны превышать допустимых.

Характер переходного процесса линейной системы в отличие от устойчивости зависит не только от параметров системы, но и от вида возмущающего (задающего) воздействия и начальных условий. Чтобы сравнивать системы по характеру переходного процесса, из возможных воздействий выбирают типовые или наиболее неблагоприятные и определяют кривую переходного процесса при нулевых начальных условиях. В качестве типовых воздействий обычно принимают единичное ступенчатое воздействие, единичный импульс, линейно возрастающее воздействие, синусоидальное воздействие и др. Для большинства систем типовым и наиболее неблагоприятным является воздействие вида единичной ступенчатой функции $\alpha(t) = 1(t)$ (см. рис. 2.2, б). Реакция системы на единичное ступенчатое воздействие при нулевых начальных условиях, как известно, называется переходной функцией системы. Для следящих систем обычно рассматривают переходную функцию

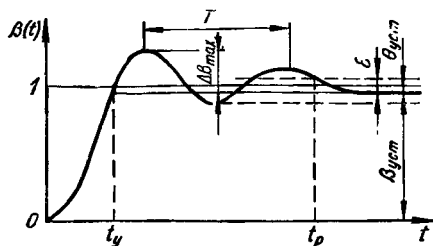


Рис. 4.1. Определение показателей качества системы по кривой переходного процесса.

$h(t)$, вызванную изменением задающего воздействия $\alpha(t)$, а для систем стабилизации — переходную функцию $h_L(t)$, вызванную изменением возмущающего воздействия $L(t)$.

Переходная функция системы оценивается с помощью совокупности характеристик, называемых *показателями качества переходного процесса*. Обычно различают следующие показатели качества переходного процесса системы.

Время регулирования, или *время переходного процесса*, t_p — время, по истечении которого отклонение управляемой величины $\beta(t)$ относительно установившегося значения $\beta_{уст}$ становится и остается по абсолютному значению меньше наперед заданной величины ε (рис. 4.1). Обычно принимается $\varepsilon = 0,05\beta_{уст}$. Время регулирования характеризует быстроту затухания переходного процесса.

Время установления t_y — промежуток времени, за который управляемая величина в первый раз достигает своего установившегося значения; t_y характеризует скорость процесса управления.

Перерегулирование σ — выраженное в процентах отношение максимального отклонения управляемой величины $\Delta\beta_{max}$ от своего установившегося значения $\beta_{уст}$ к $\beta_{уст}$:

$$\sigma = (\Delta\beta_{max}/\beta_{уст}) 100.$$

Число n и частота f колебаний управляемой величины в течение времени переходного процесса.

Показатели качества переходного процесса дают представление о поведении системы только в переходном режиме, т. е. об изменении переходной составляющей ошибки. Точность же системы в установившихся режимах оценивается с помощью статических и динамических ошибок, т. е. ошибок системы в установившихся режимах. Эти установившиеся ошибки по аналогии можно назвать *показателем качества системы в установившихся режимах*. Совокупность показателей качества переходного процесса и установившихся режимов называется *показателями качества системы*.

Рассмотренные показатели называются *прямыми показателями качества системы*. Считается, что система обладает требуемым качеством, если ее показатели качества не превышают заданных значений, определенных назначением системы. Одной из основных задач рационального выбора схемы системы и ее параметров является обеспечение того, чтобы время регулирования, перерегулирование и установившаяся ошибка не превосходили заданных величин.

Если известно уравнение замкнутой системы (см., например, выражение (3.1)), то переходную функцию $\beta(t)$ можно найти путем решения этого уравнения. Более простой метод определения переходной функции основан на использовании операционного исчисления — метод разложения изображения переходной функции (или ошибки) системы на элементарные дроби.

Наряду с прямыми методами определения переходной функции разработаны косвенные методы оценки (критерии) качества, позволяющие сравнительно просто без решения уравнения системы приближенно судить о показателях качества системы. Основные косвенные методы можно разбить на следующие группы: частотный метод; методы, основанные на изучении распределения нулей и полюсов передаточной функции; интегральные методы.

4.2. Определение переходной и установившейся составляющих ошибки методом разложения ее изображения на элементарные дроби

О показателях качества системы в переходном и установившемся режимах можно судить не только по изменению управляемой величины $\beta(t)$, но и по изменению ошибки $\theta(t)$, так как $\theta(t) = \alpha(t) - \beta(t)$, а в частном случае при $\alpha(t) = 1(t)$ $\theta(t) = 1 - \beta(t)$. Анализ ошибки дает непосредственный ответ о точности системы в переходном и установившемся режимах и позволяет определить пути уменьшения $\theta(t)$. В случае необходимости кривая переходного процесса $\beta(t)$ может быть построена на основании формулы $\beta(t) = 1 - \theta(t)$ или в общем случае — формулы $\beta(t) = \alpha(t) - \theta(t)$.

Рассмотрим один из методов определения $\theta(t)$ — метод разложения изображения ошибки системы на элементарные дроби. В соответствии с формулой (2.61) изображение ошибки $\theta(p) = K_\theta(p) \alpha(p)$. Обычно передаточная функция системы по ошибке

$$K_\theta(p) = \frac{a_0 p^m + a_1 p^{m-1} + \dots + a_{m-\nu-1} p^{\nu+1} + a_{m-\nu} p^\nu}{c_0 p^m + c_1 p^{m-1} + \dots + c_{m-1} p + c_m} = \frac{D_\theta(p)}{F_\theta(p)}, \quad (4.1)$$

где ν — порядок астатизма системы; $D_\theta(p)$ и $F_\theta(p)$ — сокращенные обозначения полиномов числителя и знаменателя $K_\theta(p)$, и изображение по Лапласу задающего воздействия

$$\alpha(p) = \frac{\alpha_0 p^h + \alpha_1 p^{h-1} + \dots + \alpha_{h-1} p + \alpha_h}{e_0 p^\mu + e_1 p^{\mu-1} + \dots + e_{\mu-1} p + e_\mu} = \frac{D_\alpha(p)}{F_\alpha(p)}, \quad \mu \geq h \quad (4.2)$$

представляют собой дробно-рациональные функции.

Изображение ошибки

$$\theta(p) = K_\theta(p) \alpha(p) = D_\theta(p) D_\alpha(p) / F_\theta(p) F_\alpha(p) \quad (4.3)$$

в этом случае также является дробно-рациональной функцией. Разлагая дробно-рациональную функцию на простые дроби, получим для простых (некратных) полюсов $K_\theta(p)$ и $\alpha(p)$:

$$\theta(p) = \sum_{k=1}^{\mu} \frac{B_k}{p - q_k} + \sum_{l=1}^m \frac{A_l}{p - p_l}, \quad (4.4)$$

где q_k — полюсы изображения задающего воздействия $\alpha(p)$; p_l — полюсы передаточной функции системы по ошибке $K_\theta(p)$. При простых

полюсах q_k и p_i

$$B_k = \frac{D_\theta(q_k) D_\alpha(q_k)}{F_\theta(q_k) F_\alpha(q_k)}; \quad A_i = \frac{D_\theta(p_i) D_\alpha(p_i)}{F_\theta(p_i) F_\alpha(p_i)}, \quad (4.5)$$

где

$$F'_\alpha(q_k) = dF_\alpha(p)/dp|_{p=q_k}, \quad F'_\theta(p_i) = dF_\theta(p)/dp|_{p=p_i}.$$

В соответствии с формулой (4.4) ошибка (функция времени) системы

$$\theta(t) = \sum_{k=1}^{\mu} B_k e^{q_k t} + \sum_{i=1}^m A_i e^{p_i t} = \theta_b(t) + \theta_n(t), \quad (4.6)$$

т. е. ошибка состоит из двух составляющих

$$\theta_b(t) = \sum_{k=1}^{\mu} B_k e^{q_k t} \quad \text{и} \quad \theta_n(t) = \sum_{i=1}^m A_i e^{p_i t}. \quad (4.7)$$

Составляющая $\theta_b(t)$ при аналитическом решении уравнения есть частное решение и представляет вынужденную (установившуюся) составляющую ошибки. Она, как видно из формул (4.5) и (4.7), определяется полюсами q_k изображения задающего воздействия (корнями уравнения $F_\alpha(p) = 0$), а также передаточной функцией системы по ошибке $K_\theta(p)$ и изображением задающего воздействия $\alpha(p)$.

Величина $\theta_n(t)$ представляет собой переходную составляющую ошибки, вызванную изменением $\alpha(t)$, при нулевых начальных условиях (при $t = -0$, т. е. до момента изменения $\alpha(t)$). Она определяется полюсами p_i передаточной функции системы по ошибке $K_\theta(p)$ (корнями характеристического уравнения $F_\theta(p) = 0$) и начальными значениями A_i ее компонент. Корни характеристического уравнения определяются известными методами (при необходимости с помощью ЭВМ), а начальные значения компонент — с помощью формулы (4.5).

Пример 1. Передаточные функции элементов системы (рис. 4.2, а):

$$K_1(p) = k_1 = D_1(p)/F_1(p), \quad K_2(p) = k_2/(T_1 p + 1) p = D_2(p)/F_2(p);$$

$$k_1 = 0,1, \quad k_2 = 20, \quad T_1 = 0,1 \text{ с},$$

$$D_1(p) = k_1, \quad F_1(p) = 1, \quad D_2(p) = k_2, \quad F_2(p) = (T_1 p + 1) p.$$

Определить переходную $\theta_n(t)$ и вынужденную $\theta_b(t)$ составляющие ошибки $\theta(t)$ системы при $\alpha(t) = 1(t)$, т. е. $\alpha(p) = 1/p = D_\alpha(p)/F_\alpha(p)$, где $D_\alpha(p) = 1$, $F_\alpha(p) = p$. Построить переходную функцию системы $\beta(t)$.

1. Определяем передаточную функцию системы в разомкнутом состоянии:

$$K_p(p) = K_1(p) K_2(p) = k_1 k_2 / (T_1 p + 1) p = D(p)/F(p).$$

2. Находим передаточную функцию системы по ошибке:

$$K_\theta(p) = \frac{1}{1 + K_p(p)} = \frac{F(p)}{F(p) + D(p)} = \frac{(T_1 p + 1) p}{T_1 p^2 + p + k_1 k_2} = \frac{D_\theta(p)}{F_\theta(p)}.$$

3. Записываем характеристическое уравнение замкнутой системы:

$$F_\theta(p) = T_1 p^2 + p + k_1 k_2 = 0,$$

или после подстановки коэффициентов:

$$F_{\theta}(p) = 0,1p^2 + p + 2 = 0$$

и определяем его корни: $p_1 = -7,235$, $p_2 = -2,765$.

4. Начальное значение i -й компоненты переходной составляющей ошибки при $\alpha(p) = 1/p = D_{\alpha}(p)/F_{\alpha}(p)$ в соответствии с формулой (4.5):

$$A_i = \frac{D_{\theta}(p_i) D_{\alpha}(p_i)}{F'_{\theta}(p_i) F_{\alpha}(p_i)} = \frac{(T_1 p_i + 1) p_i}{(2T_1 p_i + 1) p_i} = \frac{T_1 p_i + 1}{2T_1 p_i + 1} \quad (4.8)$$

Подставив в формулу (4.8) соответствующие значения коэффициентов и корней $p_1 = -7,235$, $p_2 = -2,765$, получим:

$$A_1 = [0,1(-7,235) + 1]/[2 \cdot 0,1(-7,235) + 1] = -0,635;$$

$$A_2 = [0,1(-2,765) + 1]/[2 \cdot 0,1(-2,765) + 1] = 1,635.$$

Проверяем правильность вычисленных значений A_1 и A_2 :

$$A_1 + A_2 = -0,635 + 1,635 = 1.$$

5. Переходная составляющая ошибки системы:

$$\theta_{\Pi}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} = -0,635 e^{-7,235t} + 1,635 e^{-2,765t}.$$

Компоненты $-0,635 e^{-7,235t}$ и $1,635 e^{-2,765t}$ переходной составляющей ошибки изображены на рис. 4.2, б кривыми 1 и 2. Кривая $\theta_{\Pi}(t)$, полученная в результате сложения ординат компонент 1 и 2, показана цифрой 3.

6. Определяем $\theta_{\text{в}}(t)$. Записываем уравнение $F_{\alpha}(p) = p = 0$ и находим его корень $q_1 = 0$. В соответствии с формулой (4.5) находим начальное значение k -й компоненты $\theta_{\text{в}}(t)$:

$$B_k = \frac{D_{\theta}(q_k) D_{\alpha}(q_k)}{F_{\theta}(q_k) F'_{\alpha}(q_k)} = \frac{(T_1 q_k + 1) q_k}{T_1 q_k^2 + q_k + k_1 k_2},$$

или после подстановки значения корня $q_1 = 0$:

$$B_1 = (T_1 0 + 1) 0 / (T_1 0 + 0 + k_1 k_2) = 0,$$

т. е. вынужденная составляющая ошибки $\theta_{\text{в}}(t) = B_1 e^{q_1 t} = 0$ и поэтому $\theta(t) = \theta_{\Pi}(t)$. Переходная функция $\beta(t) = 1 - \theta(t) = 1 - \theta_{\Pi}(t)$ изображена на рис. 4.2, б кривой 4.

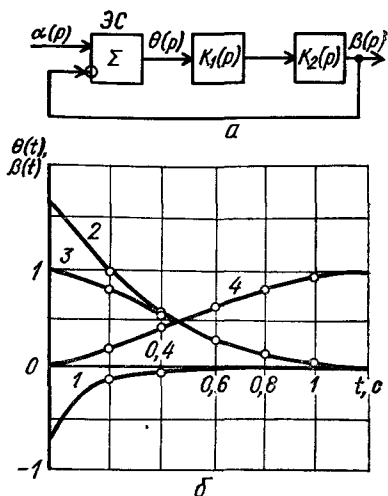


Рис. 4.2. Структурная схема САУ (а) и ее переходная функция (б).

4.3. Частотный метод анализа качества переходных процессов систем автоматического управления

Обоснование возможности использования частотных характеристик САУ для построения кривой переходного процесса

В отличие от анализа устойчивости САУ, когда обычно исходят из ее частотных характеристик в разомкнутом состоянии, при анализе качества переходных процессов пользуются частотными характеристиками замкнутой системы. Зная частотную характеристику замкнутой системы $K_s(j\omega) = N_s(\omega) e^{j\psi_s(\omega)}$, можно определить ее выходную величину при подаче на вход гармонического воздействия. Действительно, если на вход следящей системы подано гармоническое задающее воздействие $\alpha(t) = \alpha_m \sin \omega t$, комплексное изображение которого $\tilde{\alpha} = \alpha_m e^{j\omega t}$, то в установившемся режиме комплексное изображение выходной величины

$$\tilde{\beta} = K_s(j\omega) \alpha_m e^{j\omega t} = N_s(\omega) e^{j\psi_s(\omega)} \alpha_m e^{j\omega t} = \beta_m e^{j[\omega t + \psi_s(\omega)]},$$

где $\beta_m = N_s(\omega) \alpha_m$, $\psi_s(\omega)$ — амплитуда и сдвиг по фазе выходных колебаний соответственно.

С помощью частотной характеристики замкнутой системы можно не только определить выходную величину системы в установившемся режиме при гармоническом входном воздействии, но и найти реакцию системы в переходном процессе на произвольное воздействие $\alpha(t)$. Действительно, представляя это воздействие в зависимости от того, является оно периодической или непериодической функцией, в виде ряда или интеграла Фурье, т. е. в виде бесконечной суммы гармонических колебаний, можно по частотной характеристике определить реакцию системы на каждое из этих элементарных колебаний, а затем, просуммировав все реакции, найти результирующую реакцию в виде суммы или интеграла.

Найдем реакцию системы на единичную ступенчатую функцию (т. е. найдем переходную функцию системы), используя частотную характеристику системы. Как известно, интеграл Фурье для единичной ступенчатой функции имеет вид:

$$1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega,$$

т. е. единичная ступенчатая функция может быть представлена как бесконечная сумма элементарных колебаний вида $d\omega e^{j\omega t}/2\pi j\omega$. Каждому из этих колебаний соответствует выходное колебание $K_s(j\omega) d\omega e^{j\omega t}/2\pi j\omega$, а реакция системы на единичную ступенчатую функцию выражается суммой

$$\beta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_s(j\omega) \frac{e^{j\omega t}}{j\omega} d\omega. \quad (4.9)$$

Представляя $K_s(j\omega)$ в алгебраической форме $K_s(j\omega) = P_s(\omega) + jQ_s(\omega)$ и преобразуя выражение (4.9), получаем следующую формулу для переходной функции:

$$\beta(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P_s(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega, \quad (4.10)$$

где $P_s(\omega)$ — вещественная частотная характеристика (ВЧХ) замкнутой системы. Полученное выражение связывает ВЧХ системы с ее переходной функцией. Таким образом, при частотном методе анализа косвенной характеристикой качества является вещественная частотная характеристика замкнутой системы.

Связь между показателями качества переходного процесса и вещественной частотной характеристикой замкнутой системы

Предварительно дадим некоторые определения, связанные с вещественной частотной характеристикой, возможный вид которой показан на рис. 4.3. Интервал частот $0 < \omega \leq \omega_n$, в котором $P_s(\omega) \geq 0$, называется интервалом положительности; частота ω_n , при которой ВЧХ $P_s(\omega)$ впервые переходит из положительной области в отрицательную, — частотой положительности. Интервал частот $0 < \omega \leq \omega_{с.ч}$ называется интервалом существенных частот, если при $\omega > \omega_{с.ч}$ величина $|P_s(\omega)| \leq \delta$. Обычно $\delta = (0,1 \dots 0,2) P_s(0)$. Влияние части частотной характеристики, где $\omega > \omega_{с.ч}$, на качество системы несущественно и им можно пренебречь. Отбрасываемый «хвост» влияет на начальную часть переходного процесса. Начало же вещественной характеристики определяет главным образом конечную часть переходного процесса.

Одним из основных вопросов любого косвенного метода анализа качества является установление связи между выбранной косвенной характеристикой качества и показателями качества. На основании анализа выражения (4.10) установлена следующая зависимость показателей качества от вида вещественной частотной характеристики замкнутой системы [64].

1. Чтобы перегулирование не превышало 18 % ($\sigma \leq 18\%$), достаточно иметь положительную невозрастающую вещественную частотную характеристику (рис. 4.4, кривая 1).

2. Для обеспечения монотонности переходного процесса достаточно, чтобы производная $dP_s(\omega)/d\omega$ представляла собой отрицательную убывающую по модулю функцию от ω . ВЧХ, удовлетворяющая этому требованию, изображена на рис. 4.4 кривой 2.

3. Если ВЧХ имеет максимум $P_{s \max}(\omega)$ (рис. 4.4, кривая 3), то перегулирование (%)

$$\sigma \leq \frac{1,18 P_{s \max}(\omega) - P_s(0)}{P_s(0)} 100.$$

4. Если ВЧХ имеет интервал положительности ω_n , то при $\varepsilon = 5\%$ в общем случае время регулирования $t_p > \pi/\omega_n$. Для монотонных процессов $t_p > 4\pi/\omega_n$.

5. Если увеличить (уменьшить) масштаб ВЧХ вдоль оси абсцисс в n раз, то масштаб кривой переходного процесса вдоль той же оси уменьшится (увеличится) в то же число раз. Это свойство иллюстрируется на рис. 4.5, где изображены ВЧХ $P_{s_1}(\omega)$ и в два раза более «широкая» ВЧХ $P_{s_2}(\omega)$, а также соответствующие им кривые переходного процесса $\beta_1(t)$ и $\beta_2(t)$. Из рисунка видно, что переходный процесс $\beta_2(t)$ заканчивается в два раза быстрее, чем $\beta_1(t)$.

6. Если изменить масштаб ВЧХ вдоль оси ординат в n раз, то n масштаб кривой переходного процесса $\beta(t)$ изменится во столько же раз.

7. Конечное значение переходной функции равно начальному значению ВЧХ, т. е. $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta(t) = P_s(0)$ (рис. 4.6). Это положение вытекает из теоремы о конечном

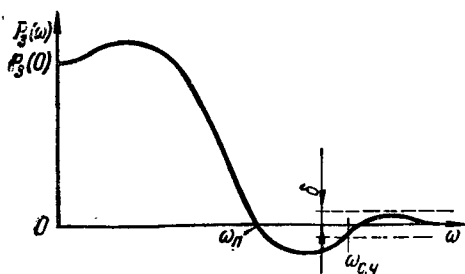


Рис. 4.3. Вещественная частотная характеристика системы (возможный вид)

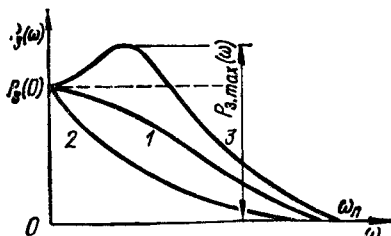


Рис. 4.4. Вещественные частотные характеристики САУ.

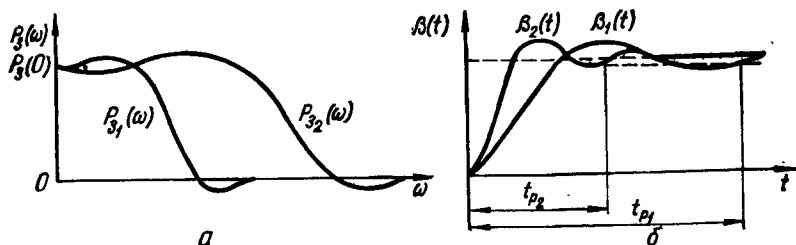


Рис. 4.5. ВЧХ (а) и соответствующие им переходные функции (б).

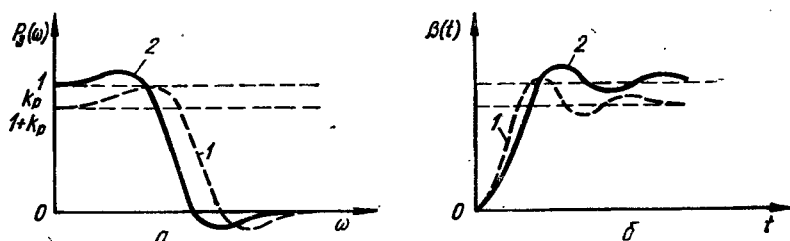


Рис. 4.6. ВЧХ (а) и соответствующие им переходные функции статической (1) и астатической (2) систем (б).

значении функции: $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \beta(p)$. Учитывая, что при единичном ступенчатом воздействии $\beta(p) = K_s(p) L[1(t)] = K_s(p)/p$, получаем $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta(t) = \beta(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p K_s(p)/p = \lim_{p \rightarrow 0} K_s(p)$, или, заменяя p через $j\omega$: $\beta(\infty) = \lim_{\omega \rightarrow 0} K_s(j\omega)$. Так как $\lim_{\omega \rightarrow 0} K_s(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} [P_s(\omega) + jQ_s(\omega)]$ и $Q_s(\omega)$ содержит ω в качестве множителя, а следовательно, при $\omega = 0$ обращается в нуль, то $\lim_{\omega \rightarrow 0} K_s(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} P_s(\omega)$, т. е. $\beta(\infty) = P_s(0)$.

Значения $P_s(0)$ и $\beta(\infty)$ для статической и астатической систем соответственно равны $\beta(\infty) = P_s(0) = k_p/(1 + k_p)$ и $\beta(\infty) = P_s(0) = 1$.

8. Начальное значение переходной функции $\beta(0)$ равно конечному значению $P_s(\infty)$ ВЧХ, т. е. $\lim_{t \rightarrow 0} \beta(t) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} P_s(\omega)$. Это положение вытекает из теоремы о начальном значении функции. Во всех случаях, когда порядок числителя $K_p(j\omega)$ меньше порядка знаменателя, $P_s(\infty) = 0$, а следовательно, переходный процесс начинается из точки, соответствующей началу координат (см. рис. 4.6).

На основании рассмотренных простых признаков можно грубо оценить качество переходного процесса в замкнутой САУ по виду ВЧХ.

Приближенный метод построения переходной функции с помощью вещественных трапециoidalных частотных характеристик

В основе метода косвенного анализа лежит приведенное выше выражение $\beta(t) = (2/\pi) \int_0^{\infty} [P_s(\omega)/\omega] \sin \omega t d\omega$, связывающее вещественную частотную характеристику системы $P_s(\omega)$ с ее переходной функцией

Рис. 4.7. ВЧХ (а) и ее разложение на трапецидальные составляющие (б).

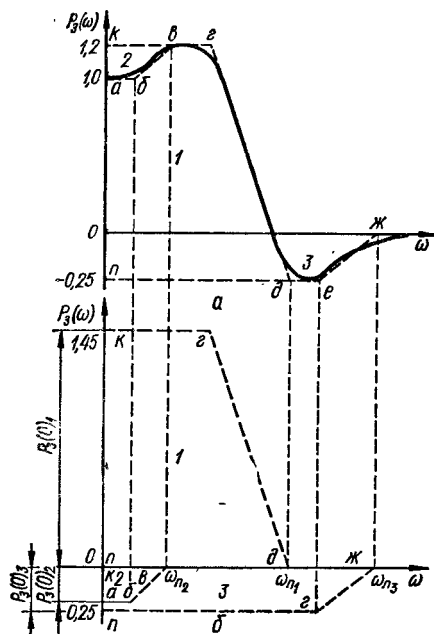
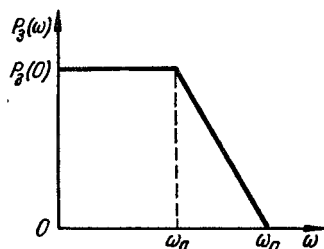


Рис. 4.8. Типовая прямоугольная ВЧХ.



$\beta(t)$. Приближенность метода состоит в том, что точная вещественная частотная характеристика заменяется ломаной.

Пусть дана вещественная частотная характеристика, изображенная на рис. 4.7, а. Заменяем кривую достаточно близкой к ней ломаной *абвгдеж*. Такая замена позволяет представить ВЧХ в виде суммы нескольких прямоугольных трапеций. При разложении ВЧХ на прямоугольные трапеции должно соблюдаться правило: алгебраическая сумма ординат трапеций при любой частоте должна быть близка к ординате ВЧХ при той же частоте. Разложение ВЧХ на прямоугольные трапеции показано на рис. 4.7, б. Каждой трапеции соответствует переходная функция $\beta_i(t)$. Результирующая переходная функция может быть найдена как сумма переходных функций составляющих $\beta(t) = \sum_{i=1}^n \beta_i(t)$, где n — число трапеций.

Таким образом, задача определения переходной функции в системе, обладающей вещественной частотной характеристикой любой формы, сводится к определению переходной функции, соответствующей типовой характеристике, имеющей форму прямоугольной трапеции (рис. 4.8). Прямоугольная трапеция характеризуется следующими параметрами: начальной ординатой $P_s(0)$, частотой положительности ω_n , коэффициентом наклона $\chi = \omega_a/\omega_n$, где ω_a — частота, определяющая длину горизонтального участка характеристики.

Для упрощения построения находят сперва переходный процесс, соответствующий не данной, а единичной прямоугольной трапеции. Последняя имеет параметры $P_s(0) = 1$, $\omega_n = 1$, а коэффициент наклона

Таблица 4.1. Таблица h -функций x

$t_{\text{таб}}$	0,0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45
0,00	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,5	0,138	0,165	0,176	0,184	0,192	0,199	0,207	0,215	0,223	0,231
1,0	0,310	0,301	0,340	0,356	0,371	0,386	0,401	0,415	0,432	0,447
1,5	0,449	0,469	0,494	0,516	0,538	0,560	0,594	0,603	0,617	0,646
2,0	0,572	0,597	0,628	0,655	0,683	0,709	0,681	0,761	0,786	0,810
2,5	0,674	0,705	0,797	0,833	0,867	0,833	0,839	0,891	0,938	0,943
3,0	0,755	0,790	0,828	0,863	0,896	0,928	0,958	0,987	1,013	1,038
3,5	0,783	0,853	0,892	0,928	0,963	0,994	1,024	1,050	1,074	1,095
4,0	0,857	0,896	0,938	0,974	1,008	1,038	1,060	1,090	1,107	1,124
4,5	0,883	0,923	0,960	0,997	1,029	1,057	1,080	1,100	1,115	1,129
5,0	0,896	0,936	0,978	1,012	1,042	1,067	1,087	1,103	1,112	1,117
5,5	0,900	0,940	0,986	1,019	1,046	1,067	1,070	1,093	1,095	1,097
6,0	0,904	0,942	0,982	1,013	1,037	1,054	1,065	1,070	1,068	1,062
6,5	0,904	0,943	0,980	1,009	1,030	1,043	1,050	1,049	1,043	1,033
7,0	0,904	0,944	0,979	1,006	1,024	1,035	1,037	1,033	1,023	1,009
7,5	0,907	0,945	0,980	1,006	1,019	1,025	1,025	1,017	1,005	0,989
8,0	0,910	0,951	0,985	1,008	1,020	1,024	1,021	1,012	0,995	0,981
8,5	0,918	0,956	0,989	1,010	1,021	1,022	1,018	1,007	0,992	0,977
9,0	0,924	0,965	0,997	1,016	1,026	1,025	1,018	1,006	0,992	0,978
9,5	0,932	0,972	1,004	1,022	1,029	1,027	1,019	1,006	0,993	0,982
10,0	0,939	0,978	1,009	1,025	1,031	1,027	1,019	1,006	0,993	0,987
10,5	0,946	0,985	1,013	1,028	1,033	1,028	1,017	1,005	0,993	0,991
11,0	0,947	0,988	1,015	1,029	1,031	1,025	1,014	1,002	0,993	0,991
11,5	0,949	0,988	1,016	1,027	1,028	1,021	1,010	0,999	0,991	0,989
12,0	0,950	0,988	1,015	1,025	1,024	1,015	1,004	0,994	0,988	0,987
12,5	0,950	0,989	1,013	1,022	1,019	1,010	0,999	0,990	0,986	0,986
13,0	0,950	0,989	1,012	1,019	1,015	1,005	0,994	0,986	0,985	0,987
13,5	0,950	0,990	1,011	1,017	1,011	1,000	0,990	0,983	0,984	0,988
14,0	0,952	0,989	1,011	1,016	1,009	0,997	0,988	0,983	0,985	0,991
14,5	0,954	0,990	1,012	1,015	1,008	0,966	0,987	0,985	0,988	0,993
15,0	0,956	0,993	1,012	1,014	1,007	0,997	0,988	0,987	0,991	1,000
15,5	0,959	0,995	1,014	1,014	1,006	0,995	0,989	0,988	0,996	1,004
16,0	0,961	0,997	1,015	1,014	1,006	0,995	0,991	0,992	0,998	1,007
16,5	0,964	0,999	1,016	1,014	1,005	0,995	0,993	0,995	1,002	1,009
17,0	0,965	1,001	1,016	1,013	1,005	0,995	0,994	0,997	1,005	1,010
17,5	0,966	1,002	1,015	1,012	1,003	0,995	0,994	0,998	1,006	1,010
18,0	0,966	1,002	1,015	1,011	1,002	0,995	0,995	1,001	1,008	1,010
18,5	0,966	1,001	1,015	1,009	1,002	0,994	0,995	1,001	1,007	1,009
19,0	0,967	1,000	1,015	1,008	1,008	0,992	0,995	1,001	1,006	1,006
19,5	0,967	1,000	1,014	1,006	1,002	0,991	0,995	1,001	1,005	1,004
20,0	0,967	1,000	1,013	1,005	0,995	0,991	0,995	1,001	1,005	1,002
20,5	0,968	1,002	1,012	1,004	0,991	0,991	0,996	1,002	1,004	1,001
21,0	0,968	1,002	1,011	1,003	0,994	0,992	0,997	1,003	1,004	1,001
21,5	0,969	1,002	1,011	1,003	0,995	0,992	0,999	1,004	1,004	1,000
22,0	0,971	1,002	1,011	1,002	0,995	0,993	1,000	1,005	1,004	0,999
22,5	0,973	1,002	1,011	1,002	0,996	0,995	1,002	1,006	1,004	0,999
23,0	0,974	1,005	1,011	1,002	0,996	0,996	1,004	1,007	1,003	0,998
23,5	0,975	1,005	1,010	1,002	0,996	0,998	1,004	1,008	1,003	0,998
24,0	0,975	1,005	1,010	1,001	0,996	0,999	1,005	1,007	1,002	0,997
24,5	0,975	1,005	1,009	1,000	0,996	0,999	1,005	1,004	1,001	0,997
25,0	0,975	1,005	1,009	0,999	0,995	0,999	1,004	1,003	1,000	0,996
25,5	0,975	1,005	1,009	1,000	0,996	0,999	1,005	1,003	0,998	0,997
26,0	0,975	1,005	1,007	0,999	0,995	0,999	1,004	1,002	0,997	0,996

0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,240	0,248	0,255	0,259	0,267	0,275	0,282	0,290	0,297	0,304	0,314
0,461	0,467	0,490	0,505	0,519	0,534	0,547	0,562	0,575	0,593	0,603
0,665	0,685	0,706	0,722	0,740	0,758	0,776	0,794	0,813	0,832	0,844
0,833	0,856	0,878	0,899	0,919	0,938	0,956	0,974	0,986	1,003	1,020
0,967	0,985	1,010	1,031	1,042	1,060	1,078	1,098	1,113	1,125	1,133
1,061	1,082	1,100	1,117	1,130	1,142	1,154	1,164	1,172	1,176	1,178
1,115	1,132	1,145	1,158	1,161	1,161	1,171	1,174	1,175	1,175	1,175
1,142	1,152	1,158	1,159	1,160	1,161	1,156	1,149	1,141	1,131	1,118
1,138	1,134	1,134	1,138	1,132	1,127	1,111	1,099	1,085	1,071	1,052
1,118	1,115	1,107	1,098	1,084	1,069	1,053	1,037	1,019	1,001	0,986
1,092	1,083	1,070	1,050	1,032	1,016	0,994	0,979	0,962	0,951	0,932
1,051	1,057	1,021	1,003	0,984	0,956	0,991	0,934	0,922	0,920	0,906
1,018	1,001	0,982	0,945	0,948	0,936	0,920	0,910	0,903	0,903	0,905
0,993	0,975	0,957	0,941	0,927	0,917	0,911	0,908	0,909	0,915	0,925
0,974	0,958	0,944	0,926	0,922	0,911	0,920	0,927	0,934	0,946	0,958
0,966	0,951	0,941	0,935	0,932	0,936	0,944	0,955	0,970	0,986	1,004
0,966	0,949	0,944	0,948	0,951	0,958	0,974	0,990	1,006	1,023	1,041
0,970	0,960	0,961	0,966	0,976	0,990	1,006	1,023	1,039	1,053	1,061
0,975	0,972	0,980	0,987	1,000	1,015	1,033	1,048	1,059	1,066	1,066
0,982	0,985	0,993	1,006	1,020	1,036	1,049	1,059	1,063	1,062	1,056
0,987	0,996	1,007	1,017	1,033	1,046	1,054	1,058	1,055	1,048	1,033
0,993	1,002	1,014	1,027	1,039	1,047	1,048	1,044	1,034	1,021	1,005
0,997	1,006	1,017	1,029	1,037	1,043	1,034	1,024	1,010	0,994	0,977
0,997	1,006	1,019	1,026	1,027	1,025	1,015	1,000	0,984	0,969	0,958
0,997	1,006	1,018	1,019	1,017	1,010	0,995	0,979	0,965	0,954	0,949
0,997	1,006	1,014	1,012	1,005	0,993	0,980	0,964	0,955	0,950	0,955
0,998	1,006	1,010	1,005	0,995	0,982	0,968	0,958	0,954	0,958	0,970
1,000	1,006	1,008	0,999	0,987	0,974	0,965	0,961	0,965	0,976	0,990
1,002	1,006	1,005	0,994	0,983	0,970	0,969	0,971	0,981	0,997	1,010
1,005	1,007	1,002	0,993	0,983	0,976	0,978	0,987	1,001	1,017	1,030
1,008	1,007	1,002	0,993	0,985	0,984	0,991	1,003	1,019	1,032	1,040
1,011	1,008	1,000	0,994	0,990	0,993	1,003	1,018	1,031	1,039	1,039
1,011	1,008	1,001	0,996	0,995	1,001	1,014	1,027	1,036	1,038	1,028
1,012	1,007	0,999	0,997	0,999	1,008	1,000	1,030	1,032	1,027	1,012
1,009	1,005	0,997	0,998	1,002	1,012	1,023	1,027	1,023	1,013	0,988
1,008	1,002	0,997	0,998	1,004	1,014	1,020	1,018	1,038	0,933	0,979
1,006	0,999	0,995	0,998	1,003	1,012	1,014	1,007	0,993	0,978	0,969
1,001	0,995	0,993	0,997	1,004	1,009	1,006	1,007	0,981	0,969	0,956
0,998	0,992	0,992	0,996	1,003	1,005	0,998	0,985	0,973	0,967	0,973
0,996	0,991	0,992	0,995	1,003	1,001	0,991	0,979	0,972	0,974	0,985
0,995	0,991	0,994	0,996	1,001	0,996	0,986	0,976	0,974	0,990	1,001
0,995	0,993	0,997	0,996	0,999	0,993	0,983	0,975	0,981	1,002	1,016
0,996	0,995	1,000	0,995	0,998	0,992	0,986	0,988	0,997	1,013	1,024
0,996	0,996	1,000	0,997	0,997	0,991	0,991	0,997	1,012	1,024	1,029
0,997	1,000	1,004	1,000	0,996	0,992	0,998	1,008	1,022	1,028	1,026
0,998	1,001	1,005	1,001	0,997	0,994	1,002	1,015	1,025	1,027	1,016
0,999	1,002	1,007	1,002	0,998	0,997	1,007	1,017	1,023	1,023	1,002
1,000	1,002	1,008	1,003	0,999	1,000	1,008	1,017	1,015	1,012	0,988
1,000	1,002	1,006	1,003	1,000	1,002	1,008	1,014	1,005	0,995	0,979
1,000	1,002	1,004	1,003	1,001	1,003	1,005	1,008	0,991	0,985	0,975
1,000	1,002	1,002	1,002	1,002	1,004	1,004	1,001	0,986	0,978	0,977
1,000	1,002	1,000	1,001	1,002	1,004	1,002	0,997	0,984	0,977	0,983

χ может быть любым в пределах от 0 до 1. Переходная функция $h(t)$, соответствующая единичной трапецеидальной характеристике, называется h -функцией. Значения h -функций для различных коэффициентов χ трапеции сведены в табл. 4.1.

Для построения кривой переходного процесса $\beta_i(t)$, соответствующего i -й прямоугольной трапецеидальной характеристике с начальной ординатой $P_s(0)_i$, частотой положительности $\omega_{\text{пл}}$ и коэффициентом наклона χ_i , необходимо: 1) из таблицы выписать данные для h -функции, соответствующей единичной трапецеидальной характеристике с коэффициентом наклона χ_i ; 2) согласно свойствам (пп.5, 6) каждый из интервалов времени $t_{\text{таб}}$, определенный по таблице h -функций, разделить на $\omega_{\text{пл}}$, а каждую ординату h -функции умножить на $P_s(0)_i$.

Пересчет масштабов по осям абсцисс и ординатам удобнее всего выполнить, записывая данные в таблицу следующего вида:

$t_{\text{таб}}$	h	$t_i = t_{\text{таб}}/\omega_{\text{пл}}$	$\beta_i(t) = hP_s(0)_i$

Для получения переходной функции системы $\beta(t)$ на общем графике строятся кривые $\beta_i(t)$ переходных процессов, соответствующих всем прямоугольным трапециям, на которые была разбита вещественная частотная характеристика системы, и суммируются ординаты всех кривых. Кривые $\beta_i(t)$ строятся с учетом знака начальных ординат $P_s(0)_i$.

Пример 2. Построить переходную функцию следящей системы, ВЧХ которой имеет вид, изображенный на рис. 4.9, а.

Заменяем кривую ВЧХ ломаной *аbвгде* и в соответствии с последней разбиваем ВЧХ на четыре прямоугольные трапеции (рис. 4.9, б). Для каждой трапеции из рисунка определяем параметры.

Трапеция 1:

$$P_s(0)_1 = 1,58; \quad \omega_{a1} = 1,2 \text{ 1/с}; \quad \omega_{\text{пл}} = 2,18 \text{ 1/с}; \quad \chi_1 = \omega_{a1}/\omega_{\text{пл}} = 0,55.$$

Трапеция 2:

$$P_s(0)_2 = -0,16; \quad \omega_{a2} = 3,5 \text{ 1/с}; \quad \omega_{\text{п2}} = 4,66 \text{ 1/с}; \quad \chi_2 = \omega_{a2}/\omega_{\text{п2}} = 0,75.$$

Таблица 4.2. Данные для построения переходной функции, соответствующей прямоугольной трапеции 1

Трапеция 1	$P_s(O)_1 = 1,58$			$\omega_{\text{пл}} = 2,18 \text{ 1/с}$				$\chi_1 = 0,55$		
$t_{\text{таб}}$	0,5	1,0	2,0	3,5	6,0	8,0	10,5	15,5	20	25
h	0,248	0,476	0,856	1,152	1,001	0,949	1,002	1,007	0,993	1,002
$t_1 = t_{\text{таб}}/\omega_{\text{пл}}$	0,23	0,46	0,92	1,6	2,75	3,67	4,8	7,1	9,2	11,5
$\beta_1(t) = hP_s(O)_1$	0,39	0,75	1,35	1,82	1,58	1,5	1,58	1,59	1,56	1,58

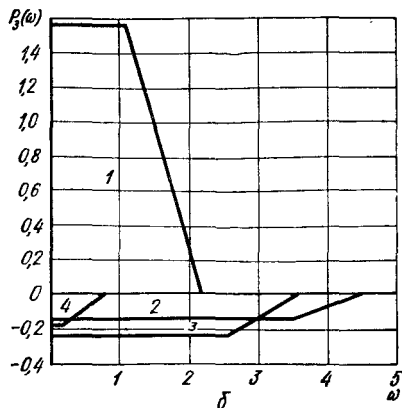
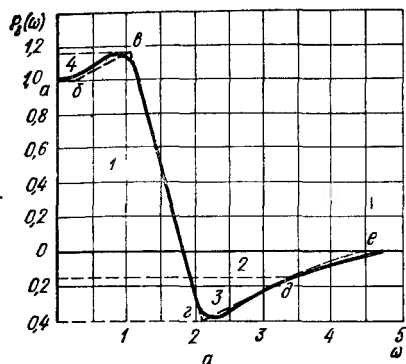


Рис. 4.9. К построению переходной функции следящей системы:

а — ВЧХ системы; б — разложение ВЧХ на прямоугольные трапецидальные характеристики.

Рис. 4.10. Переходная функция следящей системы и ее составляющие.

Трапеция 3:

$$P_3(0)_3 = -0,24; \omega_{a3} = 2,6 \text{ 1/с};$$

$$\omega_{п3} = 3,7 \text{ 1/с}; \chi_3 = 0,7.$$

Трапеция 4:

$$P_4(0)_4 = -0,18; \omega_{a4} = 0,24 \text{ 1/с};$$

$$\omega_{п4} = 0,8 \text{ 1/с}; \chi_4 = 0,3.$$

Из табл. 4.1 выписываем в табл. 4.2 данные для h -функции единичной трапецидальной характеристики с коэффициентом наклона χ , равным коэффициенту наклона первой трапеции ($\chi_1 = 0,55$). Данные пересчета масштабов по осям абсцисс и ординат также записываем в эту таблицу. По данным табл. 4.2 строим кривую $\beta_1(t)$ (рис. 4.10). Аналогичным образом записываются в таблицы данные для трапеций 2—4 и строятся соответствующие кривые $\beta_2(t) — \beta_4(t)$. Просуммировав ординаты всех кривых с учетом знаков ординат, получим результирующую кривую $\beta(t)$ переходного процесса системы.

Построение вещественной частотной характеристики замкнутой системы

ВЧХ замкнутой системы может быть построена на основании выражения для $P_s(\omega)$, которое находится разложением $K_s(j\omega)$ на вещественную и мнимую части: $K_s(j\omega) = P_s(\omega) + jQ_s(\omega)$.

Если же в нашем распоряжении имеются ЛЧХ разомкнутой системы, то ВЧХ замкнутой системы проще построить по этим характеристикам с помощью номограммы (рис. 4.11) [64]. Исходным при

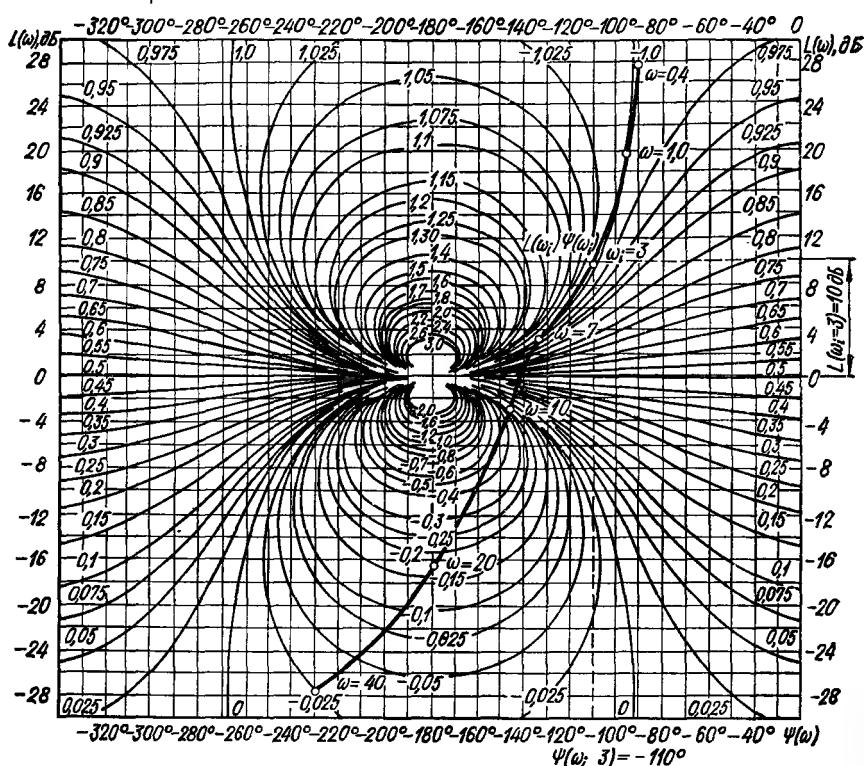


Рис. 4.11. Номограмма для определения ВЧХ по логарифмическим частотным характеристикам разомкнутой системы.

построении номограммы является выражение $K_s(j\omega) = K_p(j\omega) / [1 + K_p(j\omega)]$. Подставляя в это выражение $K_s(j\omega) = P_s(\omega) + jQ_s(\omega)$ и $K_p(j\omega) = N(\omega) e^{j\psi(\omega)}$, получаем $P_s(\omega) + jQ_s(\omega) = N(\omega) e^{j\psi(\omega)} / [1 + N(\omega) e^{j\psi(\omega)}]$, откуда видно, что ординаты $P_s(\omega)$ ВЧХ замкнутой системы связаны с координатами $N(\omega)$ и $\psi(\omega)$ частотной характеристики разомкнутой системы. Одному и тому же значению P_s соответствуют различные координаты $N(\omega)$ и $\psi(\omega)$. Геометрическое место точек на плоскости, где по оси ординат откладываются значения $L(\omega) = 20 \lg N(\omega)$, а по оси абсцисс — значения $\psi(\omega)$, соответствующие постоянному значению ординаты ВЧХ P_s , представляет собой определенную кривую. Семейство таких кривых, соответствующих различным значениям P_s , образуют номограмму, с помощью которой можно определить ВЧХ замкнутой системы по ее логарифмическим частотным характеристикам в разомкнутом состоянии.

Для определения ВЧХ замкнутой системы предварительно на номограмме в координатных осях $L(\omega)$, $\psi(\omega)$ строят логарифмическую амплитудно-фазовую частотную характеристику (ЛАФЧХ) разомкнутой системы на основании известных логарифмической амплитудной

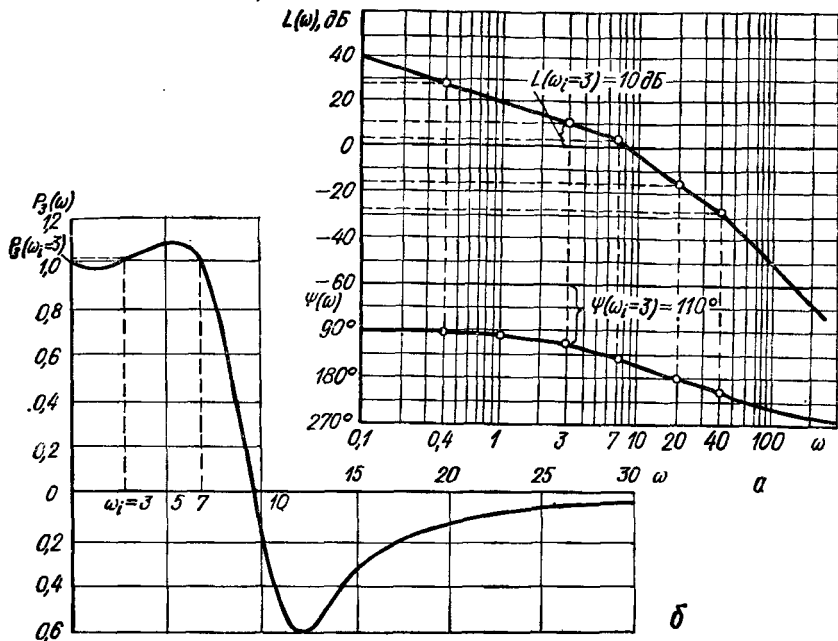


Рис. 4.12. К построению ВЧХ замкнутой системы по ЛЧХ разомкнутой системы:

а — ЛЧХ; б — ВЧХ.

и фазочастотной характеристик разомкнутой системы. Пусть, например, требуется построить ЛАФЧХ системы по ЛАЧХ и ЛФЧХ, изображенным на рис. 4.12, а. Для построения точки логарифмической АФЧХ, соответствующей какой-либо частоте ω_i , из ЛАЧХ определяется значение $L(\omega_i) = 20 \lg N(\omega_i)$, а из ЛФЧХ — значение $\psi(\omega_i)$ при этой частоте. Например, на частоте $\omega_i = 3$ $L(\omega_i) = 10$ дБ, $\psi(\omega_i) = -110^\circ$. Найденные значения $L(\omega_i)$ и $\psi(\omega_i)$ откладываются соответственно по оси ординат и оси абсцисс плоскости номограммы (рис. 4.11). Точка с координатами $L(\omega_i)$, $\psi(\omega_i)$ и будет являться искомой точкой логарифмической АФЧХ на частоте ω_i . На рисунке частота ω_i указывается при построенной точке. Аналогично определяются другие точки и затем через них проводится кривая — логарифмическая АФЧХ разомкнутой системы.

Построенная ЛАФЧХ пересекает кривые $P_3 = \text{const}$. Значения индексов пересекаемых кривых P_3 являются значениями ординат ВЧХ замкнутой системы $P_3(\omega)$ при частотах, соответствующих точкам пересечения. Выписывая эти значения P_3 с номограммы и откладывая их по оси ординат $P_3(\omega)$ при соответствующих частотах, получаем ВЧХ замкнутой системы (рис. 4.12, б).

4.4. Интегральные оценки качества переходного процесса САУ

Если переходный процесс системы имеет монотонный затухающий характер (рис. 4.13, а), то переходная составляющая $\theta_{\Pi}(t)$ ошибки системы $\theta(t)$ не изменяет своего знака (рис. 4.13, б) и стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. В этом случае для косвенной оценки качества системы может служить интеграл

$$I_1 = \int_0^{\infty} \theta_{\Pi}(t) dt, \quad (4.11)$$

называемый *линейной интегральной оценкой качества*. Очевидно, чем меньше интеграл (4.11), тем лучше качество переходного процесса. Интеграл I_1 может быть легко вычислен. Изображение по Лапласу ошибки

$$\theta_{\Pi}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \theta_{\Pi}(t) dt. \quad (4.12)$$

Из выражений (4.11) и (4.12) следует, что

$$I_1 = \int_0^{\infty} \theta_{\Pi}(t) dt = \{\theta_{\Pi}(p)\}_{p=0}, \quad (4.13)$$

т. е. для определения интеграла I_1 нужно вычислить лишь изображение по Лапласу ошибки при $p = 0$, не решая дифференциального уравнения.

Если кривая переходного процесса имеет перерегулирование (рис. 4.13, в), когда ошибка изменяет свой знак (рис. 4.13, г), то с помощью линейной интегральной оценки нельзя судить о качестве системы. Действительно, интеграл I_1 может быть близок к нулю, когда система имеет слабозатухающий колебательный переходный процесс и практически непригодна к работе. Для косвенной оценки качества переходного процесса системы при колебательном переходном процес-

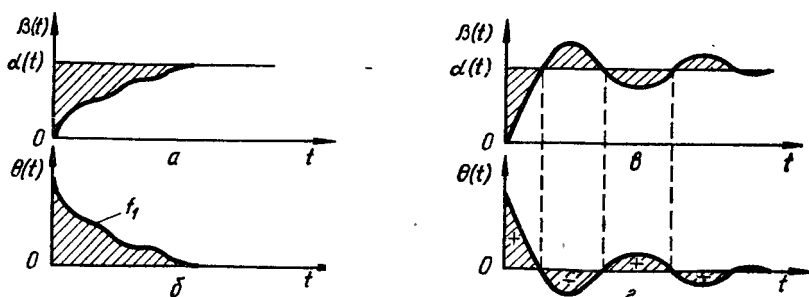


Рис. 4.13. Переходные процессы системы и соответствующие изменения $\theta_{\Pi}(t)$:

а — монотонный; б — изменение $\theta_{\Pi}(t)$; в — колебательный; г — изменение $\theta_{\Pi}(t)$.

се применяют квадратичные интегральные оценки, не зависящие от знаков ошибки. Интеграл

$$I_2 = \int_0^{\infty} [\theta_n(t)]^2 dt \quad (4.14)$$

является *квадратичной интегральной оценкой*. Он пригоден для оценки качества как аperiodических, так и колебательных процессов.

Интеграл I_2 также можно вычислять, не решая дифференциального уравнения системы. Как известно, изображение по Лапласу ошибки системы $\theta(p) = K_\theta(p) \alpha(p)$. Изображение переходной составляющей ошибки $\theta_n(t) = K_\theta(p) \alpha(p) - \theta_b(p)$, где $\theta_b(p)$ — изображение вынужденной составляющей ошибки. Если порядок астатизма системы ν больше порядка высшей производной r задающего воздействия ($\nu > r$), то в соответствии с формулой (2.73) $\theta_b(t) = 0$ и тогда

$$\theta_n(p) = K_\theta(p) \alpha(p). \quad (4.15)$$

Поскольку $\theta_n(t) = 0$ при $t \rightarrow \infty$ и $t < 0$, то для $\theta_n(t)$ существует изображение Фурье (частотный спектр), определяемое формулой

$$\theta_n(j\omega) = \int_0^{\infty} \theta_n(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (4.16)$$

Сравнивая выражения (4.16) и (4.12), замечаем, что

$$\theta_n(j\omega) = \{\theta_n(p)\}_{p=j\omega}, \quad (4.17)$$

т. е. $\theta_n(j\omega)$ можно найти путем подстановки $p = j\omega$ в изображение ошибки по Лапласу (4.15).

Функцию ошибки $\theta_n(t)$ можно представить в виде интеграла Фурье

$$\theta_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \theta_n(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (4.18)$$

Исходя из равенства (4.18), можно записать

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} [\theta_n(t)]^2 dt &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \theta_n(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} \theta_n(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \theta_n(j\omega) d\omega \int_0^{\infty} \theta_n(t) e^{j\omega t} dt. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Учитывая, что $\int_0^{\infty} \theta_n(t) e^{j\omega t} dt$ есть величина, сопряженная с $\theta_n(j\omega)$

(см. (4.16)), т. е. $\int_0^{\infty} \theta_n(t) e^{j\omega t} dt = \theta_n^*(j\omega)$, выражение (4.19) можно переписать в виде

$$\int_0^{\infty} [\theta_n(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \theta_n(j\omega) \theta_n^*(j\omega) d\omega,$$

или, если учесть, что аргумент произведения двух сопряженных комплексных чисел равен нулю, то

$$I_2 = \int_0^{\infty} [\theta_n(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\theta_n(j\omega)|^2 d\omega. \quad (4.20)$$

Полученная формула называется формулой Рэлли.

Таким образом, для определения интеграла I_2 необходимо построить характеристику $|\theta_n(j\omega)|^2$ в функции ω и найти площадь под этой характеристикой.

Квадратичная интегральная оценка I_2 может быть вычислена и другими методами. При определении I_2 по формуле, предложенной А. А. Красовским [32], наименьшее значение квадратичного интеграла соответствует наибольшему значению главного определителя Гурвица, составленного из коэффициентов характеристического уравнения замкнутой системы.

Если наряду с изменением ошибки системы учитывать и изменение ее производных, то о качестве системы можно судить по интегральной оценке

$$I_5 = \int_0^{\infty} \{[\theta_n(t)]^2 + T^2 [\theta_n'(t)]^2\} dt, \quad (4.21)$$

где T — постоянная времени.

Качество переходного процесса системы будет тем выше, чем меньше величина интеграла, определяющего интегральную оценку. Так как интегральная оценка зависит от параметров системы, то возникает задача синтеза оптимальных параметров системы, при которых достигается минимальное значение интегральной оценки качества. Методика синтеза таких параметров аналогична методике синтеза оптимальных параметров, минимизирующих среднее значение квадрата ошибки (см. гл. 7). Недостатком интегральных оценок качества является то, что они не позволяют определять прямые показатели качества системы. Добиваясь путем выбора параметров системы минимума интегральной оценки, можно иногда получить переходный процесс с большим перерегулированием и большим временем регулирования. Данный недостаток относится главным образом к интегральным оценкам, не учитывающим изменения производных ошибки.

4.5. Анализ точности САУ в установившихся режимах с помощью коэффициентов ошибок

Как отмечалось, ошибка САУ в установившемся режиме является одним из показателей качества системы. В случае медленно изменяющихся задающего или возмущающего воздействий ошибку системы в установившемся режиме удобно определять с помощью коэффициентов ошибок.

Ошибка следящей системы $\theta(p)$, вызываемая изменением задающего воздействия $\alpha(p)$ в соответствии с (2.61), может быть определена

с помощью передаточной функции системы по ошибке $K_{\theta\alpha}(p)$:

$$\theta(p) = K_{\theta\alpha}(p) \alpha(p). \quad (4.22)$$

Предположим, что $K_{\theta\alpha}(p)$ можно разложить в степенной ряд относительно p , сходящийся, по крайней мере, при малых значениях p :

$$K_{\theta\alpha}(p) = D_0 + D_1 p + (1/2!) D_2 p^2 + (1/3!) D_3 p^3 + \dots \quad (4.23)$$

Тогда, согласно (4.22), можно записать

$$\theta(p) = D_0 \alpha(p) + D_1 p \alpha(p) + (1/2!) D_2 p^2 \alpha(p) + \dots \quad (4.24)$$

Этот ряд сходится в окрестности точки $p = 0$. Поэтому будет сходиться и оригинал ряда (4.24) при $t \rightarrow \infty$, т. е. ряд, в который можно разложить ошибку системы в установившемся режиме:

$$\theta_{\text{уст}}(t) = D_0 \alpha(t) + D_1 \frac{d\alpha(t)}{dt} + \frac{1}{2!} D_2 \frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} + \dots \quad (4.25)$$

Отсюда видно, что в общем случае ошибка системы в установившемся режиме состоит из ряда слагаемых, пропорциональных как входному сигналу $\alpha(t)$, так и его производным. Слагаемые, входящие в ряд ошибок, обычно называют так: $D_0 \alpha(t)$ — ошибкой по положению (по сигналу); $D_1 d\alpha(t)/dt$ — ошибкой, вызываемой скоростью; $(D_2/2!) d^2\alpha(t)/dt^2$ — ошибкой, вызываемой ускорением задающего воздействия и т.д., а постоянные $D_0, D_1, \dots, D_i$ — коэффициентами ошибок. Ошибки в установившихся режимах, вызываемые изменяющимся задающим воздействием, называются динамическими. Зная коэффициенты ошибок и закон изменения задающего воздействия $\alpha(t)$, с помощью формулы (4.25) можно определить ошибку системы в установившемся режиме.

Коэффициенты ошибок выразим через параметры системы. Передаточная функция системы по ошибке связана с передаточной функцией $K_p(p)$ разомкнутой системы выражением

$$K_{\theta\alpha}(p) = 1/[1 + K_p(p)]. \quad (4.26)$$

Учитывая, что передаточная функция системы с астатизмом ν -го порядка в разомкнутом состоянии имеет вид

$$K_p(p) = \frac{k_p(b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m)}{p^\nu(a_0 p^k + a_1 p^{k-1} + \dots + a_{k-1} p + a_k)} = \frac{D(p)}{F(p)},$$

где $b_m = 1$; $a_k = 1$, передаточная функция по ошибке в соответствии с выражением (4.26) будет равна:

$$\begin{aligned} K_{\theta\alpha}(p) &= \frac{F(p)}{F(p) + D(p)} = \\ &= \frac{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{k-1} p^{\nu+1} + a_k p^\nu}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_k p^\nu + b_0' p^m + b_1' p^{m-1} + \dots + b_{m-1}' p + b_m'} = \\ &= \frac{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{k-1} p^{\nu+1} + a_k p^\nu}{c_0 p^n + c_1 p^{n-1} + \dots + c_{n-1} p + c_n}, \end{aligned} \quad (4.27)$$

где $n = k + v$; $b'_i = b_i k_p$; $a_k = 1$; $b'_m = k_p$; коэффициенты c равны сумме коэффициентов a и b' при одинаковых степенях p .

При $v = 0$ (статическая система):

$$\left. \begin{aligned} c_n &= b'_m + a_k = k_p + 1; \\ c_{n-1} &= b'_{m-1} + a_{k-1} = k_p b_{m-1} + a_{k-1} \text{ и т. д.} \end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

При $v = 1$ (астатическая система с астатизмом 1-го порядка):

$$\left. \begin{aligned} c_n &= b'_m = k_p; \\ c_{n-1} &= b'_{m-1} + a_k = k_p b_{m-1} + a_k; \\ c_{n-2} &= b'_{m-2} + a_{k-1} = k_p b_{m-2} + a_{k-1} \text{ и т. д.} \end{aligned} \right\} \quad (4.29)$$

На основании (4.23) и (4.27) можно записать

$$\begin{aligned} D_0 + D_1 p + (1/2!) D_2 p^2 + (1/3!) D_3 p^3 + \dots \\ \dots = \frac{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{k-1} p^{v+1} + a_k p^v}{c_0 p^n + c_1 p^{n-1} + \dots + c_{n-1} p + c_n}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

откуда

$$\begin{aligned} a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{k-1} p^{v+1} + a_k p^v = \\ = [D_0 + D_1 p + (D_2/2!) p^2 + (D_3/3!) p^3 + \dots] (c_0 p^n + c_1 p^{n-1} + \dots \\ \dots + c_{n-1} p + c_n). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Раскрывая скобки в правой части полученного выражения и приравнивая коэффициенты правой и левой частей при одинаковых степенях p , можно получить систему уравнений, из которой затем можно определить коэффициенты ошибок через коэффициенты c и a уравнения САУ. Значения коэффициентов ошибок будут различными для систем с различными порядками астатизма. Найдем сначала коэффициенты ошибок для статической системы ($v = 0$).

Приравнивая члены левой и правой частей выражения (4.31) при одинаковых степенях p и учитывая, что $v = 0$, получаем следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } p^0 \quad a_k &= c_n D_0; \\ \text{при } p \quad a_{k-1} &= c_{n-1} D_0 + c_n D_1 \text{ и т. д.,} \end{aligned} \right\} \quad (4.32)$$

из которой можно определить коэффициенты ошибок для статической системы. Из первого уравнения находим $D_0 = a_k/c_n$ или, если принять во внимание, что $a_k = 1$, а также, что для случая $v = 0$ в соответствии с формулой (4.28) $c_n = k_p + 1$, то $D_0 = 1/(1 + k_p)$.

Из второго уравнения находим

$$D_1 = \frac{-D_0 c_{n-1} + a_{k-1}}{c_n} = \frac{(a_{k-1} - b_{m-1}) k_p}{(k_p + 1)^2}.$$

Аналогично можно определить и другие коэффициенты ошибок.

Таблица 4.3. Коэффициенты ошибок статической и астатических систем

Тип системы	Коэффициент	Формула
Статическая	D_0	$1/(1 + k_p)$
	D_1	$\frac{(a_{k-1} - b_{m-1}) k_p}{(1 + k_p)^2}$
Астатическая 1-го порядка астатизма	D_0	0
	D_1	$1/k_p$
	D_2	$2 \frac{a_{k-1} - b_{m-1}}{k_p} - \frac{2}{k_p^2}$
Астатическая 2-го порядка астатизма	D_0	0
	D_1	0
	D_2	$2/k_p$
	D_3	$6 (a_{k-1} - b_{m-1})/k_p$

Коэффициенты ошибок астатической системы с астатизмом первого порядка могут быть найдены из системы уравнений, полученной из выражения (4.31) приравниванием коэффициентов его левой и правой частей при одинаковых степенях p при учете, что $v = 1$:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } p^0 \quad 0 &= c_n D_0; \\ \text{при } p \quad a_k &= c_{n-1} D_0 + c_n D_1; \\ \text{при } p^2 \quad a_{k-1} &= c_{n-2} D_0 + c_{n-1} D_1 + (c_n/2!) D_2 \text{ и т. д.} \end{aligned} \right\} \quad (4.33)$$

Из первого уравнения $D_0 = 0$, из второго уравнения с учетом (4.29):

$$D_1 = \frac{a_k - c_{n-1} D_0}{c_n} = \frac{a_k}{c_n} = \frac{1}{k_p}.$$

Аналогично определяются остальные коэффициенты ошибок.

В табл. 4.3 приводятся несколько первых коэффициентов ошибок для статической и астатических систем первого и второго порядков астатизма. В качестве примера определим установившиеся ошибки САУ, обладающих различными порядками астатизма при разных задающих воздействиях.

Пример 3. Задающее воздействие изменяется по закону ступенчатой функции $\alpha(t) = \alpha_0 1(t)$ (табл. 4.4). Определить установившиеся ошибки в следящих системах, имеющих порядок астатизма $v = 0$; $v = 1$; $v = 2$.

1. Определяем производные $\alpha(t)$:

$$d\alpha(t)/dt = d^2\alpha(t)/dt^2 = \dots = 0, \quad (4.34)$$

Таблица 4.4. Характер реакций систем на различные задающие воздействия

Вид воздействия $\alpha(t)$	Статистическая система ($\nu=0$)	Астатические системы	
		$\nu=1$	$\nu=2$

2. С учетом (4.34) выражение (4.25) для ошибки принимает вид

$$\theta_{уст}(t) = D_0 \alpha(t) = D_0 \alpha_0, \quad (4.35)$$

т. е. при ступенчатом воздействии появляется только ошибка по положению.

3. Для определения $\theta_{уст}(t)$ в статической системе ($\nu=0$) подставляем из табл. 4.3 значение $D_0 = 1/(1+k_p)$ в формулу (4.35): $\theta_{уст}(t) = \alpha_0/(1+k_p)$, т. е. при ступенчатом задающем воздействии в статической системе возникает постоянная ошибка по положению. Эта ошибка при данном α_0 будет тем меньше, чем больше k_p системы.

4. Установившиеся ошибки в астатических системах с астатизмом 1-го порядка ($\nu=1, D_0=0$) и с астатизмом 2-го порядка ($\nu=2, D_0=0$): $\theta_{уст}(t) = 0$, т. е. ошибка по положению, а следовательно, и вся установившаяся ошибка в астатических системах при ступенчатом задающем воздействии равна нулю.

Реакции следящих систем с порядками астатизма $\nu=0, \nu=1$ и $\nu=2$ на ступенчатое задающее воздействие изображены в табл. 4.4.

Пример 4. Задающее воздействие изменяется по закону $\alpha(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t$ (см. табл. 4.4). Определить $\theta_{уст}(t)$ в следящих системах с порядком астатизма $\nu=0, \nu=1, \nu=2$.

1. Определяем производные от $\alpha(t)$:

$$d\alpha(t)/dt = \alpha_1; \quad d^2\alpha(t)/dt^2 = d^3\alpha(t)/dt^3 = \dots = 0.$$

2. Учитывая, что вторая и более высокие производные от $\alpha(t)$ равны нулю, формула (4.25) примет вид

$$\theta_{уст}(t) = D_0 \alpha(t) + D_1 d\alpha(t)/dt = D_0 (\alpha_0 + \alpha_1 t) + D_1 \alpha_1, \quad (4.36)$$

т. е. при линейно возрастающем задающем воздействии возможно появление в системе динамических ошибок по положению и по скорости.

3. Для определения $\theta_{уст}(t)$ в статической системе ($\nu=0$) подставляем из табл. 4.3 значения D_0 и D_1 в формулу (4.36):

$$\theta_{уст}(t) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 t}{1+k_p} + \frac{(a_{k-1} + b_{m-1}) k_p}{(1+k_p)^2} \alpha_1 = \infty,$$

т. е. в статической системе имеются ошибки по положению и по скорости. Ошибка

по положению при изменении задающего воздействия с постоянной скоростью α_1 возрастает во времени и поэтому $\theta_{уст}(t)$ системы стремится к бесконечности.

4. Установившаяся ошибка астатической системы с астатизмом 1-го порядка ($v = 1$; $D_0 = 0$; $D_1 = 1/k_p$):

$$\theta_{уст}(t) = \alpha_1/k_p, \quad (4.37)$$

т. е. в системе с астатизмом 1-го порядка ошибка по положению равна нулю (так как $D_0 = 0$). Скоростная ошибка постоянна. Она пропорциональна скорости α_1 изменения задающего воздействия и обратно пропорциональна коэффициенту усиления системы в разомкнутом состоянии k_p . Выражение (4.37) для скоростной ошибки, полученное с помощью коэффициентов ошибок, совпадает с ранее полученной формулой (2.75).

5. Установившаяся ошибка астатической системы с астатизмом 2-го порядка ($v = 2$; $D_0 = D_1 = 0$): $\theta_{уст}(t) = 0$, т. е. в системе с астатизмом 2-го порядка $\theta_{уст}(t)$ при изменении $\alpha(t)$ с постоянной скоростью равна нулю. Это объясняется тем, что коэффициенты ошибок $D_0 = 0$ и $D_1 = 0$, и, следовательно, ошибка по положению и по скорости в этой системе равны нулю.

Реакции следящих систем на задающее воздействие $\alpha(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t$ изображены в табл. 4.4.

Пример 5. Задающее воздействие $\alpha(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + (1/2) \alpha_2 t^2$, где α_0 — начальное значение $\alpha(t)$, α_1 — начальное значение скорости изменения $\alpha(t)$, α_2 — ускорение $\alpha(t)$. Определить $\theta_{уст}(t)$ в следящих системах с порядками астатизма $v = 0$, $v = 1$, $v = 2$.

1. Определяем производные от $\alpha(t)$:

$$d\alpha(t)/dt = \alpha_1 + \alpha_2 t; \quad d^2\alpha(t)/dt^2 = \alpha_2; \quad d^3\alpha(t)/dt^3 = \dots = 0. \quad (4.38)$$

2. С учетом (4.38) выражение (4.25) принимает вид

$$\theta_{уст}(t) = D_0[\alpha_0 + \alpha_1 t + (1/2) \alpha_2 t^2] + D_1(\alpha_1 + \alpha_2 t) + (1/2!) D_2 \alpha_2, \quad (4.39)$$

т. е. при равноускоренном изменении задающего воздействия возможно появление в системе динамических ошибок по положению, скоростной ошибки и ошибки по ускорению.

3. Установившиеся динамические ошибки:

в статической системе ($v = 0$)

$$\theta_{уст}(t) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 t + (1/2) \alpha_2 t^2}{1 + k_p} + D_1(\alpha_1 + \alpha_2 t) + \frac{1}{2!} D_2 \alpha_2 = \infty;$$

в астатической системе с астатизмом 1-го порядка ($v = 1$)

$\theta_{уст}(t) = (\alpha_1 + \alpha_2 t)/k_p + D_2 \alpha_2 = \infty$, т. е. при равноускоренном изменении задающего воздействия в системе с астатизмом 1-го порядка $\theta_{уст}(t)$ растет во времени до бесконечности;

в астатической системе с астатизмом 2-го порядка ($v = 2$) $\theta_{уст}(t) = (1/2) D_2 \alpha_2 = \alpha_2/k_p$, т. е. $\theta_{уст}(t)$ постоянна. Она пропорциональна ускорению α_2 и обратно пропорциональна k_p системы.

Реакции систем на задающее воздействие $\alpha(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + (1/2) \alpha_2 t^2$ изображены в табл. 4.4.

Коррекция систем автоматического управления

5.1. Необходимость коррекции САУ. Понятие о коррекции

Противоречие между условиями повышения точности системы в установившемся и переходном режимах.

Необходимость и пути коррекции САУ

В системах автоматического управления, состоящих только из функционально необходимых элементов, служащих для реализации того или иного принципа управления, хотя и уменьшаются ошибки по сравнению со случаем отсутствия автоматического управляющего устройства, обычно не удается получить требуемых показателей качества. Для замкнутых систем это объясняется тем, что условия достижения высокой точности в установившемся и переходном режимах носят противоречивый характер. Действительно, в этих системах для уменьшения ошибки в установившемся динамическом режиме необходимо повышать коэффициент усиления системы в разомкнутом состоянии k_p . Это, например, видно из выражения (2.75) для скоростной ошибки $\theta_{\text{ауст}}(t)$ следящей системы с астатизмом 1-го порядка $\theta_{\text{ауст}}(t) = \alpha_1/k_p$, где α_1 — скорость изменения задающего воздействия. С увеличением k_p , как видно из рис. 3.13, уменьшается запас устойчивости системы, а следовательно, ухудшается переходный процесс. Возможно и так, что система станет раньше неустойчивой, чем удастся получить требуемый коэффициент усиления k_p .

Пусть, например, комплексная передаточная функция следящей системы в разомкнутом состоянии имеет вид

$$K_p(j\omega) = k_p/[j\omega(T_1j\omega + 1)(T_2j\omega + 1)], \quad T_2/T_1 < 1. \quad (5.1)$$

Построим ЛАЧХ и ЛФЧХ системы, у которой минимально допустимый запас устойчивости по фазе $\gamma = \gamma_1$ (следовательно, еще удовлетворительный переходный процесс), и из ЛАЧХ определим максимально возможный коэффициент усиления системы k_p , при котором еще обеспечивается этот запас устойчивости. Чтобы построить ЛАЧХ системы с запасом устойчивости по фазе γ_1 , сначала необходимо найти частоту среза ω_c , при которой обеспечивается этот запас. Частота среза ω_c может быть найдена несколькими способами:

графически, с помощью предварительно построенной ЛФЧХ (рис. 5.1) как частота в точке пересечения ЛФЧХ с прямой, параллельной оси абсцисс, проведенной на уровне заданного запаса устойчивости по фазе $\gamma = \gamma_1$;

из выражения для запаса устойчивости системы по фазе

$$\gamma = 180^\circ - |\psi(\omega_c)| = 180^\circ - 90^\circ - \arctg \omega_c T_1 - \arctg \omega_c T_2; \quad (5.2)$$

Рис. 5.1. Построение ЛАЧХ системы с необходимым запасом устойчивости γ_1 .

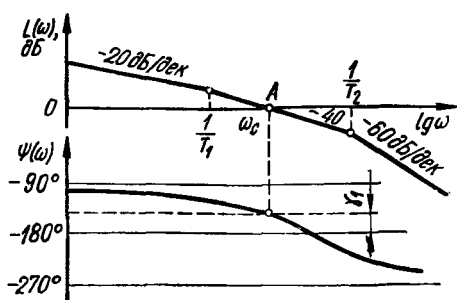
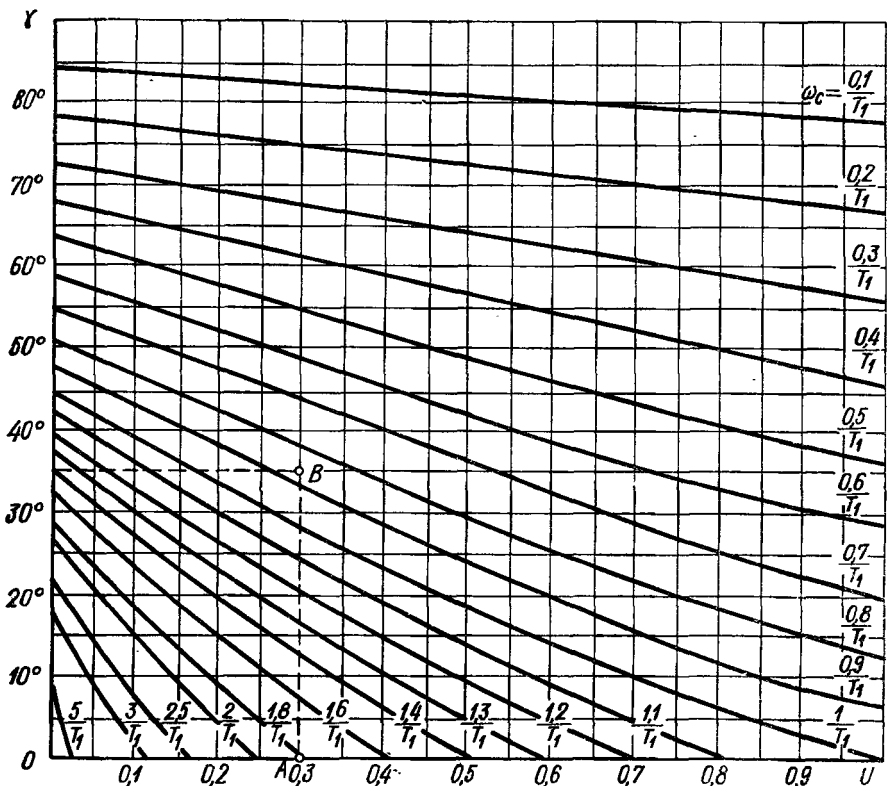


Рис. 5.2. Графики зависимости запаса устойчивости по фазе γ от отношения постоянных времени $V = T_2/T_1$ для системы с передаточной функцией $K_p(j\omega) = k_p/j\omega (T_1j\omega + 1)(T_2j\omega + 1)$.



с помощью графиков зависимости $\gamma = f(V)$ (где $V = T_2/T_1$, в общем случае V — отношение меньшей постоянной времени к большей), построенных в соответствии с формулой (5.2) для различных значений частоты среза ω_c (рис. 5.2).

Для определения ω_c на оси абсцисс отмечается точка, соответствующая значению отношения V (например, при $V = 0,3$ точка А); эта точка сносится по вертикали до уровня заданного запаса устойчивости $\gamma = \gamma_1$ (при $\gamma_1 = 35^\circ$ в точку В). Частота ω_c определяется интерполяцией между значениями частот среза, соответствующих кривым, проходящим выше и ниже точки В ($\omega_c = 0,85/T_1$).

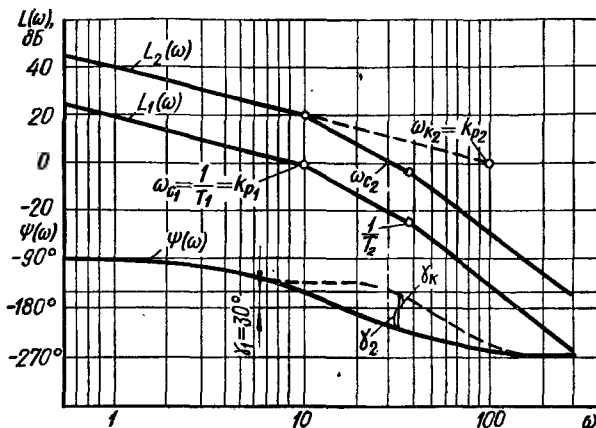


Рис. 5.3. ЛЧХ следящей системы.

Найдем максимально возможные значения частоты среза ω_c и коэффициента усиления k_p системы, описываемой передаточной функцией вида (5.1), при которых обеспечивается минимально допустимый запас устойчивости по фазе γ_1 . Пусть, например, $V = 0,27$, а $\gamma_1 = 30^\circ$. В соответствии с рис. 5.2 значение запаса устойчивости $\gamma_1 = 30^\circ$ для $V = 0,27$ обеспечивается при частоте среза $\omega_c = 1/T_1$. ЛАЧХ системы с найденной частотой среза построена на рис. 5.3. Из рисунка видно, что максимально возможное значение коэффициента усиления, при котором обеспечивается $\gamma_1 = 30^\circ$, равно $k_{p1} = 1/T_1$, т. е. оно ограничено и обычно является недостаточным. Поэтому в системе возникает большая динамическая, в частности, скоростная ошибка $\theta_{\text{уст}}(t) = \alpha_1/k_p$. Пусть для уменьшения динамической ошибки системы в примере рис. 5.3 необходимо увеличить k_p от значения $k_{p1} = 1/T_1$ до k_{p2} . ЛАЧХ $L_2(\omega)$, соответствующая этому коэффициенту, располагается выше, чем $L_1(\omega)$. Как видно из ЛЧХ, система при k_{p2} стала неустойчивой ($\gamma_2 < 0$). Чтобы при увеличении k_p сохранить устойчивость, т. е. стабилизировать систему и улучшить показатели качества переходного процесса, необходимо соответствующим образом изменить частотные характеристики системы — осуществить коррекцию системы.

Под коррекцией САУ понимается изменение их динамических свойств (характеристик) с целью обеспечения требуемого запаса устойчивости, повышения динамической точности и показателей качества переходного процесса. Коррекция осуществляется включением в систему дополнительных элементов — корректирующих устройств. Выясним, в каком направлении корректирующие устройства должны изменить частотные характеристики, чтобы стабилизировать систему и повысить ее показатели качества. Как видно из рис. 5.3, с увеличением коэффициента усиления системы k_p увеличивается частота среза ω_c системы ($\omega_{c2} > \omega_{c1}$). Большим значениям ω_c будут соответствовать меньшие или даже отрицательные значения запаса устойчивости

по фазе γ . Причиной этому является вносимое инерционными звеньями системы запаздывание колебаний по фазе, которое, как видно из выражения для ЛФЧХ, $\psi(\omega) = -\pi/2 - \arctg \omega T_1 - \arctg \omega T_2$ и самой характеристики $\psi(\omega)$ возрастает с увеличением частоты. На некоторой частоте ω_{π} запаздывание колебаний на выходе системы относительно колебаний на его входе становится равным 180° , когда отрицательная обратная связь превращается в положительную и удовлетворяется условие самовозбуждения системы по фазе.

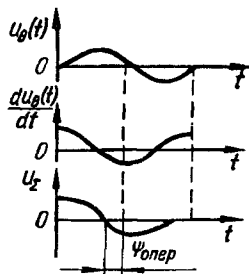


Рис. 5.4. Получение опережения по фазе.

Таким образом, ухудшение переходного процесса и потеря устойчивости при увеличении k_p системы связаны с наличием запаздывания в системе колебаний по фазе. Отсюда нетрудно ответить на поставленный выше вопрос: чтобы при увеличении k_p система осталась устойчивой и обеспечивался требуемый запас устойчивости по фазе γ и амплитуде σ , необходимо частично скомпенсировать запаздывание в некоторой полосе частот, расположенной около частоты среза $\omega_{с2}$, соответствующей повышенному коэффициенту усиления k_{p2} системы, и тем самым деформировать ЛФЧХ системы, приподняв ее верх, как, например, показано пунктирной кривой на рис. 5.3. Такую деформацию ЛФЧХ можно осуществить включением последовательно элементам системы устройства, которое бы в отличие от других элементов системы вносило не запаздывание, а опережение по фазе синусоидальных колебаний в указанной выше полосе частот. Опережение по фазе $\psi_{\text{опер}}$ может быть достигнуто в результате сложения напряжения сигнала рассогласования $u_0(t)$ с производной от него $du_0(t)/dt$ (рис. 5.4). Такое сложение осуществляется с помощью дифференцирующего фазоопережающего устройства, которое будет рассмотрено ниже.

Таким образом, одним из способов улучшения показателей качества системы является введение производной от сигнала рассогласования в алгоритм управления.

Возможность коррекции с помощью производной от сигнала рассогласования была рассмотрена с помощью частотных характеристик. Выясним теперь физический смысл введения производной от сигнала рассогласования в алгоритм управления во временной области.

Физический смысл введения производных от сигнала рассогласования в алгоритм управления

Предположим, что сигнал рассогласования системы $u_0(t)$ изменяется по кривой 1 (рис. 5.5). Изменение производной от сигнала рассогласования изображено кривой 2. Если система реагирует только на сигнал рассогласования $u_0(t)$, то вследствие того, что сигнал при прохождении через инерционные элементы запаздывает и чувствительность исполнительного элемента, например двигателя, конечно, система начинает обрабатывать ошибку рассогласования не сразу, а через некоторое время после ее появления. Если же на исполнительный

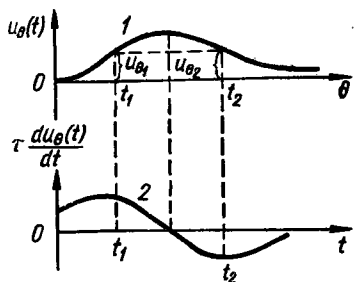


Рис. 5.5. К физическому смыслу введения производной от сигнала ошибки в алгоритм управления.

Если система реагирует на сигнал рассогласования $u_0(t)$, то вращающий момент двигателя системы одинаков как в момент времени t_1 , когда сигнал рассогласования растет, так и в момент t_2 , когда он убывает. Между тем, было бы желательно, чтобы в момент t_1 двигатель развивал больший вращающий момент $M_{вр}$ для более эффективного противодействия нежелательному возрастанию ошибки, а в момент t_2 — меньший $M_{вр}$ для предупреждения перерегулирования, т. е. возможного перехода системы по инерции через равновесное состояние. Такое изменение $M_{вр}$ достигается введением производной в алгоритм управления. В этом случае $M_{вр}$ двигателя в момент времени t_1 увеличивается, поскольку воздействия от $u_0(t)$ и $\tau du_0(t)/dt$ совпадают по знаку, а в момент t_2 уменьшается или даже изменяет свое направление, так как воздействия от $u_0(t)$ и $\tau du_0(t)/dt$ противоположны по знаку.

В результате такого изменения вращающего момента двигателя за счет введения производной в алгоритм управления уменьшается максимальное значение ошибки, уменьшается или даже устраняется перерегулирование, переходный процесс системы затухает быстрее. Реагируя на производную, система как бы чувствует не только ошибку, но и тенденцию ее дальнейшего изменения. На этом основании управление по производной иногда называют управлением с предварением или опережением.

Показанная на рис. 5.3 деформация ЛФЧХ, соответствующая введению в алгоритм управления производной от сигнала рассогласования с помощью фазопережающего устройства, является не единственной возможной. Как будет показано ниже, улучшение показателей качества системы может быть достигнуто и при отличных от рис. 5.3 деформациях ЛЧХ системы, соответствующих другим изменениям алгоритма управления, реализуемых с помощью иных корректирующих устройств. В общем случае выходной сигнал корректирующего устройства, кроме составляющей, пропорциональной входному сигналу (сигналу рассогласования), может содержать составляющую, пропорциональную некоторой функции от входного сигнала, например производной, интегралу во времени, их сумме.

Необходимое функциональное преобразование сигнала рассогласования системы может быть достигнуто с помощью корректирующих устройств, включаемых либо последовательно элементам системы в главный контур управления, либо в местные обратные связи, охватывающие часть элементов системы. В соответствии с этим корректирующие устройства называются последовательными и параллельными.

На практике встречаются случаи, когда коррекция САУ осуществляется с помощью включения как последовательных, так и параллельных корректирующих устройств одновременно.

5.2. Коррекция САУ с помощью последовательных дифференцирующих фазопережающих устройств постоянного тока

Дифференцирующий фазопережающий RC-контур постоянного тока.

Передаточная функция и частотные характеристики контура

Как уже отмечалось, опережение по фазе синусоидальных колебаний, необходимое при коррекции САУ, достигается с помощью дифференцирующих фазопережающих устройств. Одним из распространенных таких устройств является дифференцирующий RC-контур постоянного тока (рис. 5.6, а). Для определения передаточной функции контура составим уравнения напряжения этого контура в операционной форме:

$$U_{\text{вх}}(p) = I(p) \frac{(1/Cp) R_1}{1/Cp + R_1} + I(p) R_2; \quad U_{\text{вых}}(p) = I(p) R_2.$$

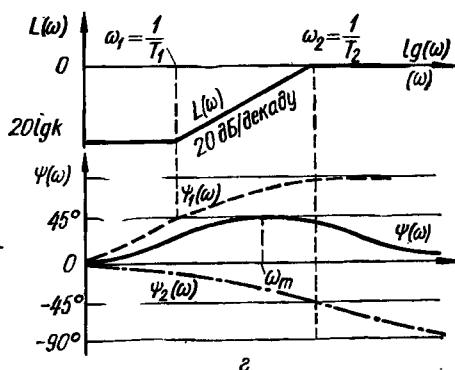
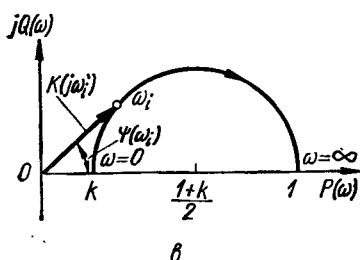
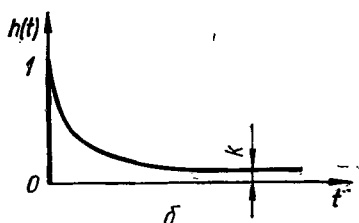
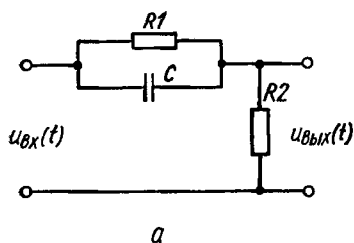


Рис. 5.6. Дифференцирующий фазопережающий RC-контур и его характеристики:

а — схема; б — переходная функция; в — АФЧХ; г — ЛЧХ.

Из второго уравнения находим $I(p) = U_{\text{вых}}(p)/R_2$ и, подставляя в первое уравнение, получаем

$$U_{\text{вх}}(p) = [R_1/(R_2 + CpR_1R_2) + 1]U_{\text{вых}}(p).$$

После преобразования

$$U_{\text{вх}}(p) = \frac{R_1 + R_2 + R_1R_2Cp}{R_2 + R_1R_2Cp} U_{\text{вых}}(p),$$

откуда передаточная функция контура

$$K(p) = \frac{U_{\text{вых}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)} = \frac{R_1R_2Cp + R_2}{R_1R_2Cp + R_1 + R_2}$$

ИЛИ

$$K(p) = U_{\text{вых}}(p)/U_{\text{вх}}(p) = k(T_1p + 1)/(T_2p + 1), \quad (5.3)$$

где $T_1 = R_1C$ — постоянная времени контура по производной; $k = R_2/(R_1 + R_2)$ — коэффициент усиления контура по сигнальной составляющей; $T_2 = kT_1$ — постоянная времени отставания. Поскольку $k < 1$, то $T_2 < T_1$.

Из формулы (5.3) можно определить изображение переходной функции контура $H(p)$, подставив $U_{\text{вх}}(p) = 1/p$:

$$H(p) = k(T_1p + 1)/(T_2p + 1)p.$$

Кривая переходной функции контура $h(t)$ изображена на рис. 5.6, б.

Комплексная передаточная функция контура

$$K(j\omega) = k(T_1j\omega + 1)/(T_2j\omega + 1). \quad (5.4)$$

АФЧХ контура, построенная на основании выражения для $K(j\omega)$, показана на рис. 5.6, в. Из рисунка видно, что АФЧХ контура представляет полуокружность, расположенную в первом квадранте.

ЛЧХ контура изображены на рис. 5.6, г. ЛАЧХ $L(\omega)$ контура построена в соответствии с выражением

$$L(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg \sqrt{T_1^2\omega^2 + 1} - 20 \lg \sqrt{T_2^2\omega^2 + 1}, \quad (5.5)$$

а ЛФЧХ $\psi(\omega)$ контура на основании формулы

$$\psi(\omega) = \text{arctg } \omega T_1 - \text{arctg } \omega T_2. \quad (5.6)$$

Логарифмические ФЧХ, соответствующие первому и второму слагаемым выражения (5.6), изображены на рис. 5.6, г кривыми $\psi_1(\omega)$ и $\psi_2(\omega)$. Как видно из выражений (5.4) и (5.6), а также из ЛФЧХ $\psi_1(\omega)$ и $\psi_2(\omega)$, член $(T_1j\omega + 1)$, стоящий в числителе комплексной передаточной функции (5.4) контура, обуславливает опережение, равное $\text{arctg } \omega T_1$, а член $(T_2j\omega + 1)$, находящийся в знаменателе, определяет запаздывание, равное $\text{arctg } \omega T_2$. Опережение возможно в случае, если постоянная времени производной (опережения) T_1 контура больше, чем постоянная времени отставания T_2 . Поскольку в дифференцирующем контуре это условие выполняется, то, как видно из АФЧХ и ЛЧХ контура (рис. 5.6, в, г), последний создает опережение по фазе синусоидального сигнала в определенной полосе частот.

Физически опережение можно объяснить сложением на резисторе R_2 напряжения $u_1(t) = ku_{\text{вх}}(t)$, пропорционального $u_{\text{вх}}(t)$, выделяющегося на R_2 , как на элементе делителя, образованного резисторами R_1 и R_2 , и напряжения $u_2(t) = \tau du_{\text{вх}}(t)/dt$, приближенно пропорционального производной от $u_{\text{вх}}(t)$, выделяющегося на R_2 , как элементе дифференцирующей цепочки R_2C .

Найдем частоту ω_m , при которой контур создает максимальный угол опережения ψ_{max} . Для этого необходимо взять производную $d\psi(\omega)/d\omega$, приравнять ее нулю и из полученного таким образом уравнения определить ω_m . В соответствии с выражением (5.6)

$$d\psi(\omega)/d\omega = T_1/[1 + (\omega_m T_1)^2] - T_2/[1 + (\omega_m T_2)^2] = 0,$$

откуда

$$\omega_m = 1/\sqrt{T_1 T_2} = \sqrt{\omega_1 \omega_2} = 1/\sqrt{T_1^2 k} = 1/T_1 \sqrt{k}, \quad (5.7)$$

т. е. ω_m равна среднему геометрическому значению частот сопряжения ω_1 и ω_2 . Максимальное значение угла опережения ψ_{max} найдем, подставив значение ω_m и выражение (5.6):

$$\psi_{\text{max}} = \text{arctg} \sqrt{T_1/T_2} - \text{arctg} \sqrt{T_2/T_1},$$

т. е. чтобы получить большее значение максимального угла опережения, необходимо брать постоянные времени опережения T_1 и отставания T_2 , как можно больше отличающимися друг от друга.

Учитывая, что T_1 и T_2 связаны через коэффициент усиления k отношением $T_1/T_2 = 1/k$, выражение для ψ_{max} может быть записано в следующем виде:

$$\psi_{\text{max}} = \text{arctg}(1/\sqrt{k}) - \text{arctg} \sqrt{k}, \quad (5.8)$$

т. е. для получения большого угла опережения следует уменьшить коэффициент усиления контура. Рис. 5.7 иллюстрирует изменение ψ_{max} за счет изменения T_1 и k при $T_2 = \text{const}$, а рис. 5.8 — за счет изменения T_2 и k при $T_1 = \text{const}$. На обоих рисунках соответствующие ЛАЧХ и ЛФЧХ обозначены одинаковыми цифрами. Возможно также одновременное изменение T_1 , T_2 и k .

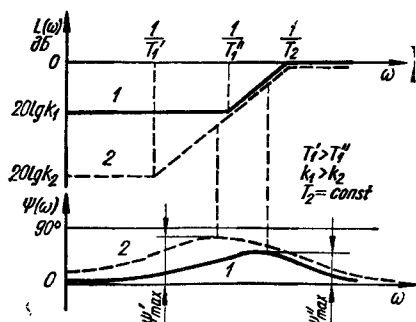


Рис. 5.7. Изменение ψ_{max} за счет T_1 и k при $T_2 = \text{const}$.

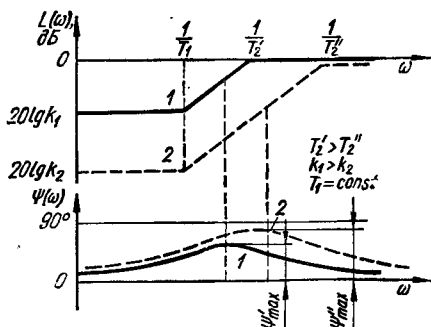


Рис. 5.8. Изменение ψ_{max} контура за счет T_2 и k при $T_1 = \text{const}$.

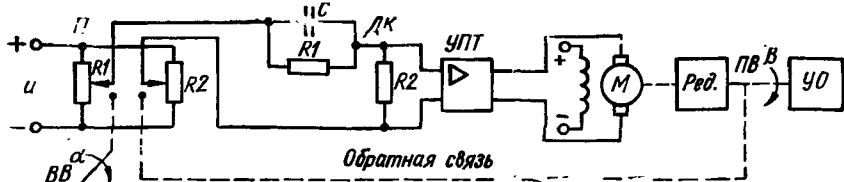


Рис. 5.9. Функциональная схема системы, скорректированной последовательным дифференцирующим фазоопережающим RC -контуром постоянного тока.

Дифференцирующий RC -контур постоянного тока выгодно включать в САУ, у которой элемент сравнения преобразует отклонение управляемой величины от заданного значения в напряжение постоянного тока, а в качестве усилителя используется усилитель с входом на постоянном токе (например, электронный, магнитный, электромашинный). В качестве примера на рис. 5.9 изображена функциональная схема следящей системы, стабилизированной последовательным дифференцирующим RC -контуром постоянного тока ДК. В этой системе элементом сравнения служит потенциометрический мост Π , питаемый постоянным напряжением, в качестве усилителя применен усилитель постоянного тока УПТ, а исполнителем является двигатель постоянного тока M .

Выбор параметров дифференцирующего фазоопережающего RC -контура.

Возможности улучшения показателей качества САУ с помощью контура

Задачу выбора параметров контура, применяемого в качестве последовательного корректирующего устройства САУ, и возможности улучшения показателей качества с помощью этого контура рассмотрим на примере коррекции следящей системы (см. рис. 5.9). Пусть КПФ нескорректированной системы в разомкнутом состоянии

$$K_p(j\omega) = k_p / [(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)j\omega], \quad V = T_2/T_1 = 0,27. \quad (5.9)$$

Примем следующую методику решения задачи. Построим ЛАЧХ нескорректированной системы с заданным запасом устойчивости по фазе $\gamma = \gamma_1$, выберем оптимальные в том или ином смысле параметры корректирующего контура, построим ЛАЧХ скорректированной системы при том же запасе устойчивости γ_1 . Определим, во сколько раз удастся с помощью контура повысить коэффициент усиления k_p , частоту среза ω_c системы, а следовательно, уменьшить динамическую ошибку и время регулирования системы.

Пусть необходимый запас устойчивости по фазе $\gamma = 30^\circ$. С помощью графиков $\gamma = f(V)$ (см. рис. 5.2) находим для $V = 0,27$ частоту среза ω_c системы, при которой обеспечивается $\gamma = 30^\circ$: $\omega_c = 1/T_1$. ЛАЧХ $L(\omega)$ и ЛФЧХ $\psi(\omega)$ нескорректированной системы, КПФ которой определяется выражением (5.9), а частота среза $\omega_c = 1/T_1$, изображены на рис. 5.10. Из рисунка видно, что коэффициент усиления системы

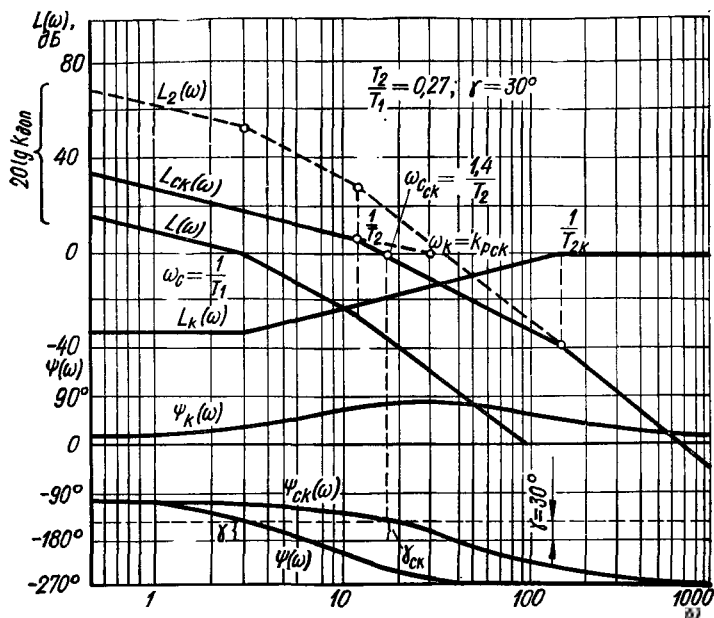


Рис. 5.10. К коррекции следящей системы последовательным фазопережающим контуром.

при выполнении условия $\gamma = 30^\circ$ ограничивается значением $k_p = 1/T_1$. Следовательно, скоростная ошибка системы не может быть сделана меньшей, чем $\theta_{\text{уст}}(t) = \alpha_1/k_p = \alpha_1 T_1$. Например, если $T_1 \approx 0,33$ с, $\alpha_1 = 10^\circ/\text{с}$, то $\theta_{\text{уст}}(t) = 3,3^\circ$. Частота среза системы также ограничена значением $\omega_c = 1/T_1$.

Включение в систему последовательного дифференцирующего фазопережающего контура с КПФ (5.4):

$$K_k(j\omega) = k_k (1 + j\omega T_{1k}) / (1 + j\omega T_{2k}), \quad k_k = T_{2k}/T_{1k}$$

при соответствующем выборе постоянных времени T_{1k} и T_{2k} позволяет увеличить k_p и ω_c системы и сохранить необходимый запас устойчивости. КПФ скорректированной системы с учетом дополнительного повышения коэффициента усиления $k_{\text{доп}}$:

$$K_{p,ск}(j\omega) = K_p(j\omega) K_k(j\omega) k_{\text{доп}} = \frac{k_{p,ск} (1 + j\omega T_{1k})}{(1 + j\omega T_1) (1 + j\omega T_2) (1 + j\omega T_{2k}) j\omega}, \quad (5.10)$$

где $k_{p,ск} = k_p k_k k_{\text{доп}}$.

Выбор значений T_{1k} и T_{2k} контура зависит от условий работы системы. Рассмотрим методику выбора параметров контура для случая, когда на вход системы поступает задающее воздействие без флуктуационной помехи. В этом случае с точки зрения уменьшения времени регулирования t_p желательно увеличивать частоту среза ω_c системы, а с точки зрения уменьшения установившейся динамической ошибки — увеличивать коэффициент усиления k_p . Поэтому следует выбрать

такие значения $T_{1к}$ и $T_{2к}$, при которых достигается максимально возможное увеличение ω_c и k_p системы при сохранении необходимого запаса устойчивости по фазе γ .

Выбор постоянной времени контура $T_{1к}$. Как уже отмечалось (см., например, рис. 5.3), чтобы при увеличении k_p и ω_c сохранялся требуемый запас устойчивости γ , необходимо частично скомпенсировать запаздывание колебаний по фазе. Из формулы для ЛФЧХ скорректированной системы

$$\psi_{ск}(\omega) = -90^\circ + \operatorname{arctg} \omega T_{1к} - \operatorname{arctg} \omega T_1 - \operatorname{arctg} \omega T_2 - \operatorname{arctg} \omega T_{2к} \quad (5.11)$$

видно, что наибольшее запаздывание, равное $\operatorname{arctg} \omega T_1$, вносится наиболее инерционным звеном системы, имеющим наибольшую постоянную времени T_1 . Поэтому в первую очередь желательно скомпенсировать запаздывание этого звена. Такая компенсация возможна при выборе $T_{1к} = T_1$. КПФ (5.10) и выражение (5.11) для $\psi_{ск}(\omega)$ скорректированной системы при этом примут вид:

$$K_{p.ск}(j\omega) = k_{p.ск}/(1 + j\omega T_2)(1 + j\omega T_{2к}); \quad (5.12)$$

$$\psi_{ск}(\omega) = -90^\circ - \operatorname{arctg} \omega T_2 - \operatorname{arctg} \omega T_{2к}. \quad (5.13)$$

Выбор постоянной времени контура $T_{2к}$. Как видно из формулы (5.13), общее запаздывание $\psi_{ск}(\omega)$ при $T_2 = \text{const}$ будет тем меньше (а следовательно, k_p и ω_c могут быть сделаны тем больше), чем меньшее значение $T_{2к}$ будет выбрано. Очевидно, что с этой точки зрения желательно было бы принять $T_{2к} = 0$. Однако при этом коэффициент усиления контура $k_k = T_{2к}/T_{1к} = 0$, что недопустимо из-за бесконечно большого ослабления сигнала контуром (сигнал не будет пропускаться контуром). Поэтому при выборе $T_{2к}$ приходится принимать компромиссное решение, когда достигаются сравнительно большие значения частоты среза ω_c и коэффициента усиления системы $k_{p.ск}$ и в то же время обеспечивается допустимое значение k_k (допустимое ослабление сигнала, вносимое контуром). Как показывает практика, нецелесообразно принимать $k_k < 0,02$, так как для компенсации большого ослабления, вносимого контуром, нужно вводить сложные дополнительные усилители. Кроме того, при малых значениях k_k контуром будут подчеркиваться, хотя и пренебрежимо малые, но всегда наблюдаемые в реальных системах флуктуационные помехи, наложенные на входное напряжение контура.

Таким образом, коэффициент усиления контура должен отвечать условию $k_k \geq k_{кд} = 0,02$. Более строгое решение о значении $k_{кд}$ следует принимать в каждом конкретном случае с учетом практических возможностей повышения коэффициента усиления системы и интенсивности флуктуаций.

Наибольшие значения ω_c и k_p получаются при $k_k = k_{кд}$. В этом случае искомая постоянная времени контура $T_{2к} = k_{кд} T_{1к}$, а максимальный угол опережения, создаваемый контуром, $\psi_{\max} = \operatorname{arctg}(1/\sqrt{k_{кд}}) - \operatorname{arctg} \sqrt{k_{кд}}$. ЛАЧХ $L_k(\omega)$ и ЛФЧХ $\psi_k(\omega)$ корректирующего контура с выбранными параметрами изображены на рис. 5.10.

Чтобы построить ЛЧХ скорректированной системы, определим частоту среза $\omega_{с.ск}$, при которой запас устойчивости равен требуемому значению. Для определения $\omega_{с.ск}$ можно воспользоваться графиками $\gamma = f(V)$ (см. рис. 5.2), так как КПФ (5.12) скорректированной системы совпадает с КПФ (5.9), применительно к которой построены эти графики. При этом под V следует понимать отношение $V = T_{2к}/T_2$, а $\omega_c = x/T_1$ следует заменить на $\omega_{с.ск} = x/T_2$. Чтобы определить $\omega_{с.ск}$, находим отношение $T_{2к}/T_2$. Если выбрано $T_{1к} = T_1$, то $T_{2к}/T_2 = = k_{кд} T_{1к}/T_2 = k_{кд}/(T_2/T_1)$. Имея в виду, что в рассматриваемом примере $T_2/T_1 = 0,27$ и что $k_{кд} = 0,02$, получим $V = T_{2к}/T_2 = = 0,02/0,27 = 0,074$. В соответствии с графиками рис. 5.2 при $V = = 0,074$ запас устойчивости $\gamma = 30^\circ$ обеспечивается при $\omega_{с.ск} = = 1,4/T_2$. ЛАЧХ $L_{ск}(\omega)$ и ЛФЧХ $\psi_{ск}(\omega)$ скорректированной системы при $\omega_{с.ск} = 1,4/T_2$ изображены на рис. 5.10. Из рис. 5.10 видно, что при рассмотренной методике выбора параметров корректирующего контура максимальное опережение, вносимое контуром, находится в области частоты среза скорректированной системы $\omega_{с.ск}$.

Из ЛАЧХ $L_{ск}(\omega)$ определяем коэффициент усиления системы $k_{р.ск}$, при котором обеспечивается $\gamma = 30^\circ$: $k_{р.ск} = 2/T_2$, т. е. он увеличился по сравнению с коэффициентом усиления системы до коррекции в $k_{р.ск}/k_p = (2/T_2)/(1/T_1) = 2T_1/T_2$ раза. Если, например, $T_1 = = 0,33$ с, $T_2 = 0,09$ с, то $k_{р.ск}/k_p = 7,3$. Скоростная ошибка системы при этом уменьшается во столько же раз. Частота среза скорректированной системы $\omega_{с.ск} = 1,4/T_2$, т. е. она увеличилась в $\omega_{с.ск}/\omega_c = = 1,4T_1/T_2$ раза. Во столько же раз приближенно уменьшается и время регулирования системы t_p .

Согласно рассмотренной методике выбирается $T_{1к} = T_1$. Однако иногда $T_{1к}$ принимается больше или меньше, чем T_1 . В том случае, когда $T_1 \geq 6T_2$, может быть выбрано $T_{1к} < T_1$, а $T_{2к}$ рассчитывается по формуле $T_{2к} = k_{кд} T_{1к}$. Постоянная времени $T_{1к}$ также выбирается меньше, чем T_1 при наличии помех, действующих на систему [17].

Определение дополнительного усиления системы. Как выяснено, корректирующий контур дает возможность увеличить коэффициент усиления системы от k_p до $k_{р.ск}$. Для реализации этой возможности необходимо увеличить коэффициенты усиления элементов системы, либо включить дополнительные усилители. Усиление следует увеличить настолько, чтобы скомпенсировать ослабление $20 \lg k_k$, вносимое контуром, и обеспечить повышение усиления от k_p до $k_{р.ск}$. Отсюда дополнительное усиление, которое должно быть реализовано в системе: $k_{доп} = (1/k_k) k_{р.ск}/k_p$, или

$$20 \lg k_{доп} = -20 \lg k_k + 20 \lg (k_{р.ск}/k_p).$$

ЛАЧХ $L_2(\omega)$ (см. рис. 5.10) нескорректированной системы с повышенным коэффициентом усиления $k_{р2}$ можно построить путем параллельного переноса вверх ЛАЧХ исходной системы $L(\omega)$ на $20 \lg k_{доп}$. ЛАЧХ $L_2(\omega)$ может быть получена также сложением ординат ЛАЧХ $L_{ск}(\omega)$ скорректированной системы и ординат ЛАЧХ $L_k(\omega)$ корректирующего устройства, взятых с обратным знаком.

Достоинства и недостатки коррекции САУ с помощью последовательных дифференцирующих фазопережающих устройств. Из изложенного выше видно, что достоинство коррекции САУ с помощью последовательных дифференцирующих фазопережающих устройств (путем введения производных в алгоритм управления) состоит в том, что одновременно с увеличением коэффициента усиления k_p системы удается увеличить и ее частоту среза ω_c , т. е. наряду с уменьшением ошибки системы в установившемся режиме имеется возможность уменьшить и время переходного процесса.

Можно отметить недостатки коррекции САУ путем включения последовательных дифференцирующих фазопережающих устройств. Последние вносят значительное ослабление в области низких частот, т. е. в области существенных частот спектра полезного сигнала. Это ослабление тем интенсивнее, чем большее опережение должно обеспечить фазопережающее устройство. Для компенсации этого ослабления необходимо увеличивать коэффициент усиления системы за счет других ее элементов.

Высокие частоты фазопережающее устройство пропускает без ослабления. Поэтому, если на полезный сигнал, подлежащий дифференцированию, накладываются быстроизменяющиеся шумы или помехи, спектр которых расположен в области высоких частот, то эти шумы и помехи будут пропускаться устройством без ослабления.

Существенное ослабление полезного сигнала, с одной стороны, и пропускание без изменения помех, с другой, приводят к уменьшению отношения сигнала к шуму, что является причиной увеличения динамических ошибок системы.

5.3. Коррекция САУ с помощью последовательных интегрирующих устройств

При коррекции САУ с помощью последовательных дифференцирующих устройств с увеличением коэффициента усиления системы увеличивается и частота среза ω_c . При отсутствии помех, действующих на вход системы, это способствует улучшению показателей качества системы: с увеличением коэффициента усиления системы уменьшается установившаяся ошибка, а увеличение частоты среза приводит к уменьшению времени регулирования. Однако если вместе с задающим воздействием на систему поступают помехи, то дифференцирующий контур, как правило, не дает желаемых результатов. В этом случае система должна удовлетворительно пропускать сигнал и наиболее эффективно подавлять помехи. Задающее воздействие обычно представляет собой медленно изменяющуюся функцию времени и поэтому его частотный спектр является узким, расположенным в области низких частот. Помехи же изменяются быстрее во времени, поэтому имеют более высокочастотный спектр, чем задающее воздействие. Следовательно, для получения минимальных ошибок при наличии помех система должна иметь узкую полосу пропускания в области низких частот (малую частоту среза) и возможно большой коэффициент усиления.

С точки зрения уменьшения уровня шумовых помех систему целесообразно корректировать не дифференцирующим, а интегрирующим контуром, который, как будет показано ниже, позволяет увеличивать коэффициент усиления системы, не увеличивая ее частоты среза. С помощью интегрирующего контура целесообразно осуществлять коррекцию также тех систем, от которых требуется большой коэффициент усиления (высокая динамическая точность). Выясним физический смысл введения интеграла от сигнала рассогласования в алгоритм управления.

Если на исполнительный двигатель системы поступает напряжение, пропорциональное сигналу ошибки $\theta(t)$ (рис. 5.11, а), то при изменении задающего воздействия с постоянной скоростью, как известно, возникает скоростная ошибка $\theta_{уст}(t)$. Если же напряжение ошибки предварительно подавать на интегрирующее устройство, а затем с его выхода — на исполнительный двигатель, то скоростная ошибка будет уменьшаться. Это можно объяснить тем, что напряжение на выходе

интегратора $\int_0^t \theta(t) dt$ (рис. 5.11, б) будет увеличиваться до тех пор,

пока не достигнет значения, при котором скорость изменения управляемой величины не будет равна скорости изменения задающего воздействия, а скоростная ошибка не станет равной нулю.

Уменьшения до нуля скоростной ошибки можно достичь включением в систему интегрирующего устройства, близкого к идеальному, например, дополнительного двигателя, угол поворота которого приближенно равен интегралу от входного напряжения. Здесь реализуется случай повышения порядка астатизма системы на единицу. Если же в систему включить пассивную интегрирующую цепь, выходное напряжение которой не может расти до бесконечности, то установившаяся ошибка полностью не устраняется, но существенно уменьшается. Порядок астатизма системы при этом остается прежним.

Как видно из рис. 5.11, интегральная кривая запаздывает относительно кривой изменения сигнала ошибки в переходном режиме, что приводит к ухудшению переходного процесса системы.

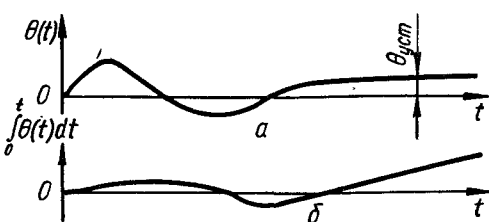


Рис. 5.11. Кривые изменения сигнала ошибки (а) и ее интеграла (б).

Интегрирующий RC -контур постоянного тока.

Передаточная функция и частотные характеристики контура

Наиболее распространенным контуром является интегрирующий RC -контур постоянного тока, схема которого изображена на рис. 5.12, а. Для определения передаточной функции контура запишем уравнения напряжения контура:

$$U_1(p) = (R_1 + 1/Cp + R_2) I(p); \quad U_2(p) = (1/Cp + R_1) I(p).$$

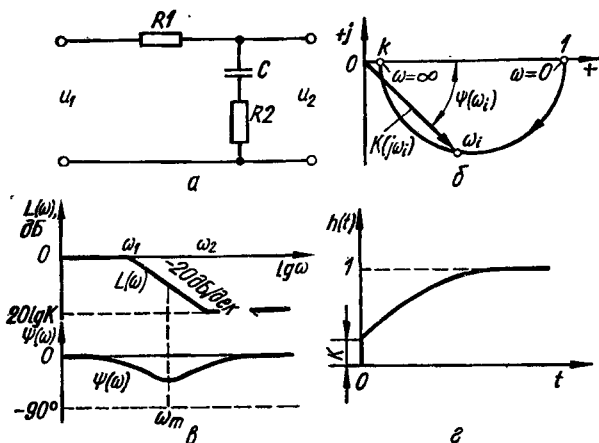


Рис. 5.12. Интегрирующий RC -контур постоянного тока и его характеристики:
 а — схемы контура; б — АФЧХ; в — ЛЧХ; г — переходная функция.

Подставив значение $I(p)$ из второго уравнения в первое, получим

$$U_1(p) = (R_1 + R_2 + 1/Cp) [1/(1/Cp + R_2)] U_2(p),$$

отсюда находим передаточную функцию контура

$$K(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{1/Cp + R_2}{R_1 + R_2 + 1/Cp} = \frac{CR_2p + 1}{(R_1 + R_2)Cp + 1},$$

или

$$K(p) = (T_2p + 1)/(T_1p + 1), \quad (5.14)$$

где $T_2 = CR_2$ — постоянная времени опережения; $T_1 = C(R_1 + R_2)$ — постоянная времени отставания.

Соотношение между T_1 и T_2 таково: $T_2/T_1 = R_2/(R_1 + R_2) = k$, т. е. $T_2 = T_1k$. Поскольку $k < 1$, то $T_1 > T_2$.

Комплексная передаточная функция контура

$$K(j\omega) = (T_2j\omega + 1)/(T_1j\omega + 1). \quad (5.15)$$

АФЧХ контура (рис. 5.12, б), построенная на основании выражения (5.15), представляет собой полуокружность, расположенную в четвертом квадранте.

ЛЧХ контура $L(\omega)$ (рис. 5.12, в) построена в соответствии с выражением

$$L(\omega) = -20 \lg \sqrt{T_1^2\omega^2 + 1} + 20 \lg \sqrt{T_2^2\omega^2 + 1}.$$

В области низких ($\omega \leq \omega_1 = 1/T_1$) и высоких ($\omega \geq \omega_2 = 1/T_2$) частот выражения для ЛЧХ имеют соответственно вид:

$$L_{н.ч}(\omega) = 0; \quad L_{в.ч}(\omega) = -20 \lg \omega T_1 + 20 \lg \omega T_2 = 20 \lg k.$$

ЛФЧХ контура $\psi(\omega)$ (рис. 5.12, в) построена в соответствии с выражением $\psi(\omega) = -\text{arctg } \omega T_1 + \text{arctg } \omega T_2$.

Переходная функция контура изображена на рис. 5.12, з.

Из рассмотрения АФЧХ и ЛАЧХ следует, что контур пропускает низкие частоты без ослабления, а высокие — с ослаблением $20 \lg k$. Благодаря этому интегрирующий контур хорошо пропускает спектр полезного сигнала, расположенный в области низких частот, и подавляет высокочастотные помехи. На основании этого свойства интегрирующий контур и используется обычно для коррекции САУ при наличии помех.

Из ЛФЧХ $\psi(\omega)$ видно, что интегрирующий контур вносит в определенной области частот отставание колебаний по фазе. Частота, соответствующая максимальному углу отставания

$$\omega_m = \sqrt{\omega_1 \omega_2} = \sqrt{(1/T_1)(1/kT_1)} = 1/T_1 \sqrt{k};$$

максимальный угол отставания

$$\psi_{\max}(\omega_m) = -\arctg \omega_m T_1 + \arctg \omega_m T_1 k = -\arctg(1/\sqrt{k}) + \arctg \sqrt{k}. \quad (5.16)$$

Как видно из формулы (5.16), $\psi_{\max}(\omega)$ возрастает с уменьшением k . В области низких и высоких частот контур не вносит отставания. То обстоятельство, что контур вносит отставание, является его недостатком. Однако при соответствующем выборе параметров контура область отставания может быть смещена в диапазон низких частот значительно левее частоты среза системы. Поэтому запас устойчивости системы при включении контура практически не уменьшается. Переходный процесс при этом ухудшается незначительно.

Определение параметров интегрирующего контура. Возможности повышения показателей качества САУ с помощью интегрирующего контура

Вопрос определения параметров контура и возможности изменения показателей качества рассмотрим на примере коррекции следящей системы. Пусть комплексная передаточная функция системы

$$K_p(j\omega) = k_p/j\omega (T_1 j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1); \quad V = T_2/T_1 = 0,27.$$

Построим ЛАЧХ системы с заданным (необходимым) запасом устойчивости по фазе γ . Если $\gamma = 30^\circ$, то в соответствии с графиками $\gamma = f(V)$ для $V = 0,27$ частота среза $\omega_c = 1/T_1 = \omega_3$. ЛАЧХ нескорректированной системы с $\gamma = 30^\circ$ изображена на рис. 5.13 ломаной $L(\omega)$, ЛФЧХ — кривой $\psi(\omega)$.

Обычно частота среза ω_c исходной системы имеет малое значение, поэтому будем считать, что она соответствует требованию получения узкополосной системы. Максимально возможное значение коэффициента усиления исходной системы $k_p = 1/T_1$ обычно не удовлетворительно с точки зрения получения малой скоростной ошибки системы. Пусть с целью уменьшения этой ошибки требуется увеличить коэффициент усиления от значения k_p до $k_{p, \text{ск}}$. ЛАЧХ системы с $k_{p, \text{ск}}$ изображена ломаной $L_2(\omega)$. При увеличении k_p увеличивается частота среза ($\omega_{c2} > \omega_c$), уменьшается запас устойчивости γ системы и в зависимости

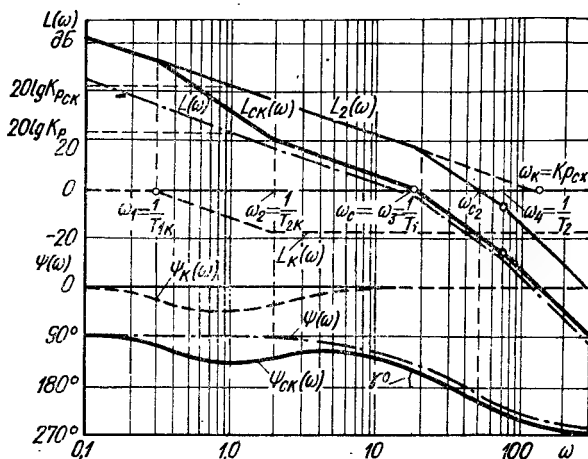


Рис. 5.13. К коррекции следящей системы интегрирующим контуром.

от значения $k_{p,ck}$ система, как показано на рис. 5.13, может потерять устойчивость.

Чтобы система имела прежние значения частоты среза и запаса устойчивости по фазе, необходимо сохранить вид ЛАЧХ и ЛФЧХ системы в области частоты среза ω_c , а усиление увеличить только в области низких частот. Эти требования удастся удовлетворить включением в систему интегрирующего контура с КПФ

$$k_k(j\omega) = (T_{2k}j\omega + 1)/(T_{1k}j\omega + 1), \quad T_{2k} = T_{1k}k; \quad k < 1.$$

Чтобы запаздывание, вносимое контуром в области частоты среза ω_c системы, было равно или близко к нулю, частоты сопряжения контура $\omega_1 = 1/T_{1k}$ и $\omega_2 = 1/T_{2k}$ должны находиться значительно левее частоты ω_c . ЛАЧХ и ЛФЧХ контура, параметры которого выбраны с учетом этого требования, на рис. 5.13 обозначены соответственно $L_k(\omega)$ и $\psi_k(\omega)$. ЛАЧХ $L_{CK}(\omega)$ скорректированной системы находится сложением ординат характеристик $L(\omega)$ и $L_k(\omega)$, а ЛФЧХ $\psi_{CK}(\omega)$ — сложением ординат характеристик $\psi(\omega)$ и $\psi_k(\omega)$.

Передаточная функция скорректированной системы

$$K_{PCK}(j\omega) = k_{p,ck} (T_{1k}j\omega + 1)/[j\omega (T_{2k}j\omega + 1) (T_{1j}j\omega + 1) (T_{2j}j\omega + 1)].$$

Осталось уточнить значения параметров интегрирующего контура.

Определение коэффициента k . Если частота среза системы $\omega_c \leq \omega_3$ (в рассматриваемом примере $\omega_c = \omega_3$), то $k_{p,ck} = \omega_c \omega_2 / \omega_1$ [17] или для нашего случая $k_{p,ck} = \omega_c T_{1k} / T_{2k} = \omega_c / k$. Отсюда, если задан требуемый коэффициент усиления системы $k_{p,ck}$,

$$k = \omega_c / k_{p,ck}. \quad (5.17)$$

Определение постоянных времени T_{1k} и T_{2k} . Значения T_{1k} и T_{2k} выбираются такими, чтобы отставание, создаваемое контуром в об-

ласти частоты среза системы ω_c , было равно нулю или близко к нему:

$$\psi_k(\omega_c) = -\arctg \omega_c T_{1k} + \arctg \omega_c T_{2k} \approx 0,$$

или

$$-\arctg \omega_c T_{1k} + \arctg \omega_c T_{1k} k \approx 0.$$

После подстановки значения k из выражения (5.17) получаем

$$-\arctg \omega_c T_{1k} + \arctg (\omega_c^2 T_{1k} / k_{pck}) \approx 0. \quad (5.18)$$

Это условие легко выполнить, если взять заведомо большое значение T_{1k} , когда оба слагаемых равны 90° при частотах, даже значительно меньших, чем частота среза. Однако при таком произвольном выборе T_{1k} и T_{2k} их значения могут оказаться весьма большими, что нежелательно: увеличение T_{1k} и T_{2k} может привести к излишней инерционности системы, а следовательно, к ухудшению переходного процесса. Кроме того, для реализации больших постоянных времени необходимы конденсаторы с большой емкостью. Значение T_{1k} целесообразно выбирать таким, чтобы угол опережения при частоте ω_c системы, определяемой вторым слагаемым выражения (5.18), был близок к 90° . Можно определить T_{1k} , например, из следующего уравнения:

$$\arctg [\omega_c^2 (T_{1k} / k_{pck})] = 85 \dots 88^\circ,$$

откуда

$$T_{1k} = \operatorname{tg} (85 \dots 88^\circ) (k_{pck} / \omega_c^2).$$

Значение $T_{2k} = T_{1k} k$.

Достоинства и недостатки коррекции САУ с помощью последовательных интегрирующих устройств. Интегрирующий контур позволяет значительно повысить усиление системы в области низких частот, не увеличивая частоты среза системы. Благодаря этому удастся существенно уменьшить установившуюся ошибку системы и снизить уровень ошибок, вызываемых быстро изменяющимися помехами. Недостатком коррекции САУ с помощью интегрирующего контура является то, что наряду с уменьшением установившейся ошибки ухудшается переходный процесс системы.

5.4. Коррекция САУ с помощью последовательного интегро-дифференцирующего контура

Интегро-дифференцирующий RC-контур постоянного тока.

Передаточная функция и частотные характеристики контура

При коррекции САУ с помощью последовательного интегро-дифференцирующего контура проявляются достоинства и в некоторой степени компенсируются недостатки коррекции с помощью дифференцирующего и интегрирующего контуров в отдельности. Интегро-дифференцирующий контур, как выясним ниже, позволяет существенно повысить коэффициент усиления системы и в то же время улучшить переходный процесс за счет увеличения частоты среза системы.

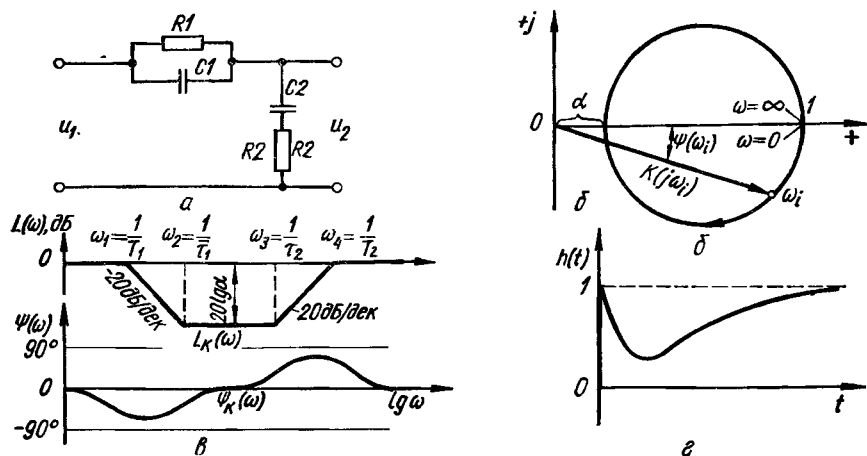


Рис. 5.14. Интегро-дифференцирующий RC -контур постоянного тока и его характеристики:

a — схема контура; b — АФЧХ; c — ЛЧХ; d — переходная функция.

Наиболее распространенная схема интегро-дифференцирующего контура постоянного тока изображена на рис. 5.14, a . Его передаточная функция

$$K(p) = (\tau_1 p + 1)(\tau_2 p + 1) / [\tau_1 \tau_2 p^2 + (\tau_1 + \tau_2 + R_1 C_2) p + 1], \quad (5.19)$$

где $\tau_1 = C_1 R_1$; $\tau_2 = C_2 R_2$.

После разложения знаменателя на множители

$$K(p) = (\tau_1 p + 1)(\tau_2 p + 1) / (T_1 p + 1)(T_2 p + 1), \quad (5.20)$$

где T_1 и T_2 находятся из системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 \tau_2 &= T_1 T_2; \\ \tau_1 + \tau_2 + R_1 C_2 &= T_1 + T_2, \end{aligned} \right\} \quad (5.21)$$

полученной приравнованием коэффициентов при одинаковых степенях знаменателей выражений (5.19) и (5.20).

Иногда удобнее пользоваться следующим выражением для передаточной функции контура:

$$K(p) = (\tau_1 p + 1)(\tau_2 p + 1) / [(\tau_1 / \alpha) p + 1](\alpha \tau_2 p + 1), \quad (5.22)$$

где $\tau_1 / \alpha = T_1$; $\alpha \tau_2 = T_2$; $\alpha < 1$.

В соответствии с выражением (5.20) КПФ контура

$$K(j\omega) = (\tau_1 j\omega + 1)(\tau_2 j\omega + 1) / (T_1 j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1). \quad (5.23)$$

АФЧХ контура (рис. 5.14, b) представляет собой окружность с центром на положительной вещественной оси. Характеристика удалена от мнимой оси на расстояние α .

Логарифмические частотные характеристики контура показаны на рис. 5.14, c . Частоты сопряжения ЛАХ $L_K(\omega)$ контура: $\omega_1 = 1/T_1 = \alpha/T_1$; $\omega_2 = 1/\tau_1$; $\omega_3 = 1/\tau_2$; $\omega_4 = 1/T_2 = 1/\alpha\tau_2$. ЛФЧХ

$\psi_k(\omega)$ контура построена в соответствии с выражением

$$\psi_k(\omega) = -\operatorname{arctg} \omega T_1 + \operatorname{arctg} \omega \tau_1 + \operatorname{arctg} \omega \tau_2 - \operatorname{arctg} \omega T_2.$$

Переходная функция контура изображена на рис. 5.14, з.

Как видно из АФЧХ и ЛАЧХ, интегро-дифференцирующий контур ведет себя в области низких частот как интегрирующий, а в области высоких частот как дифференцирующий контур. В области средних частот контур вносит ослабление, составляющее в децибелах $20 \lg \alpha$.

Выбор параметров интегро-дифференцирующего контура. Возможности повышения показателей качества САУ с помощью контура

На примере коррекции следящей системы выясним, из каких соображений следует выбирать параметры интегро-дифференцирующего контура, а также определим возможности повышения показателей качества системы с помощью этого контура. Пусть КПФ нескорректированной системы

$$K_p(j\omega) = k_p / (T_1 j\omega + 1) (T_2 j\omega + 1) j\omega, \quad T_2/T_1 = 0,06.$$

Построим ЛАЧХ системы с запасом устойчивости по фазе $\gamma = 42^\circ$. Для $V = T_2/T_1 = 0,06$ запас устойчивости по фазе $\gamma = 42^\circ$ в соответствии с рис. 5.2 будет обеспечиваться при частоте среза $\omega_a = 1/T_1$. Откладываем частоты сопряжений $\omega_3 = 1/T_1 = \omega_c$; $\omega_4 = 1/T_2$ и строим ЛАЧХ L (рис. 5.15) нескорректированной системы с $\gamma = 42^\circ$. На том же рисунке кривой $\psi(\omega)$ изображена ЛФЧХ системы.

Из ЛАЧХ видно, что коэффициент усиления системы $k_p = 1/T_1$. Пусть с целью уменьшения скоростной ошибки системы требуется увеличить коэффициент усиления системы от значения k_p до $k_{p,ск}$. ЛАЧХ системы с $k_{p,ск}$ на рис. 5.15 обозначена $L_2(\omega)$. Как видно из рисунка, система при увеличении коэффициента усиления стала неустойчивой.

Включение интегро-дифференцирующего контура с КПФ

$$K_k(j\omega) = (\tau_1 j\omega + 1) (\tau_2 j\omega + 1) / (T_{1k} j\omega + 1) (T_{2k} j\omega + 1)$$

и с соответствующим образом выбранными параметрами позволяет стабилизировать систему и повысить показатели качества переходного процесса относительно исходной системы.

КПФ скорректированной системы

$$K_{p,ск}(j\omega) = \frac{k_{p,ск} (\tau_1 j\omega + 1) (\tau_2 j\omega + 1)}{j\omega (T_{1k} j\omega + 1) (T_{2k} j\omega + 1) (T_1 j\omega + 1) (T_2 j\omega + 1)}.$$

ЛАЧХ скорректированной системы будет располагаться между ЛАЧХ $L(\omega)$ и ЛАЧХ $L_2(\omega)$ (рис. 5.15). Поэтому частота среза скорректированной системы $\omega_{с,ск}$ будет находиться между частотами среза ω_c и ω_{c2} .

Частоты сопряжения контура $1/T_{1k}$ и $1/\tau_1$, как и частоты сопряжения интегрирующего контура, выбираются меньше частоты среза скорректированной системы $\omega_{с,ск}$ (практически меньше, чем ω_c) с тем, чтобы область частот, в которой контур вносит отставание,

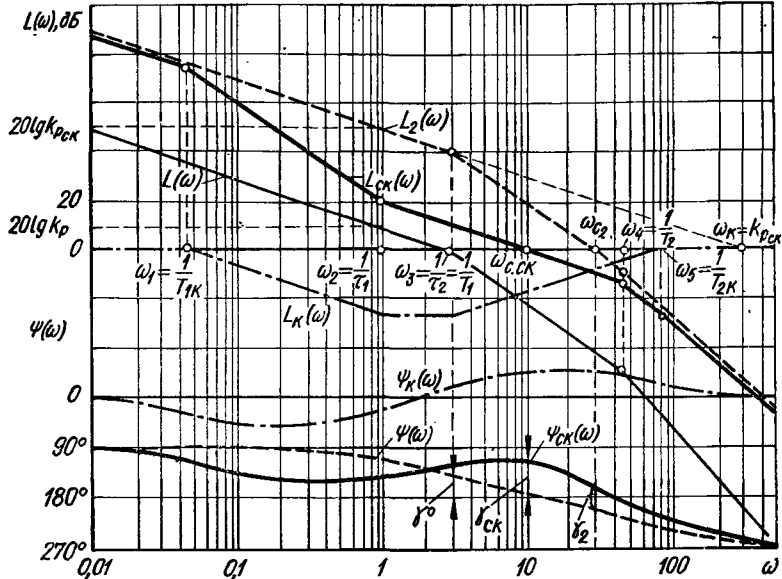


Рис. 5.15. К коррекции следящей системы интегро-дифференцирующим контуром.

находилась левее частоты среза $\omega_{с.ск}$. Частоты сопряжения $1/\tau_2$ и $1/T_{2K}$ выбираются так же, как и частоты сопряжения дифференцирующего фазопережающего контура: $1/\tau_2 = 1/T_1$, $1/T_{2K} > 1/T_2$. При этом частота среза $\omega_{с.ск}$ будет находиться между частотами сопряжения $1/\tau_2$ и $1/T_{2K}$, т. е. в области максимального опережения контура. Благодаря этому достигается наибольший подъем ЛФЧХ системы в области частоты $\omega_{с.ск}$, а следовательно, максимальное увеличение запаса устойчивости по фазе γ и улучшение переходного процесса.

ЛАЧХ и ЛФЧХ контура, постоянные времени которого выбраны в соответствии с изложенными выше соображениями, показаны на рис. 5.15 графиками $L_k(\omega)$ и $\psi_k(\omega)$. ЛАЧХ скорректированной системы, полученная сложением ЛАЧХ $L_2(\omega)$ исходной системы с требуемым коэффициентом усиления $k_{р.ск}$ и ЛАЧХ контура $L_k(\omega)$, изображена ломаной $L_{ск}(\omega)$, ЛФЧХ скорректированной системы — кривой $\psi_{ск}(\omega)$.

Из сравнения ЛЧХ исходной ($L(\omega)$, $\psi(\omega)$) и скорректированной ($L_{ск}(\omega)$, $\psi_{ск}(\omega)$) систем видно, что с помощью последовательного интегро-дифференцирующего контура можно значительно повысить коэффициент усиления системы и увеличить ее частоту среза, а следовательно, повысить точность системы как в установившемся, так и в переходном режимах.

Наметим пути расчета интегро-дифференцирующего контура. Коэффициент усиления скорректированной системы

$$k_{р.ск} = \omega_{с.ск} \omega_2 / \omega_1 = \omega_{с.ск} T_{1K} / \tau_1 = \omega_{с.ск} / \alpha,$$

откуда, если $k_{р.ск}$ задано, $\alpha = \omega_{с.ск} / k_{р.ск}$.

Если задана требуемая ЛАЧХ интегро-дифференцирующего контура, т. е. заданы $T_{1к}, \tau_1, \tau_2$ или τ_1, τ_2 и α , то можно определить параметры элементов контура. При этом можно принять следующий порядок расчета: задаемся значением какого-либо параметра, например C_1 ; определяем $R_1 = \tau_1/C_1$; из второго уравнения системы (5.21) находим $C_2 = [T_{1к} + T_{2к} - (\tau_1 + \tau_2)]/R_1$ или $C_2 = [\tau_1/\alpha + \alpha\tau_2 - (\tau_1 + \tau_2)]/R_1$; определяем $R_2 = \tau_2/C_2$.

При расчете параметров интегро-дифференцирующего контура, как и других корректирующих контуров, необходимо иметь в виду согласование входного и выходного сопротивлений.

В табл. 5.1 приведены наиболее типичные схемы корректирующих устройств постоянного тока, их передаточные функции и частотные характеристики.

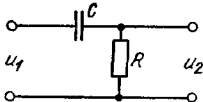
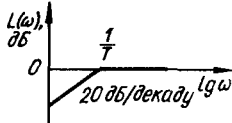
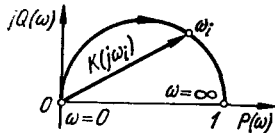
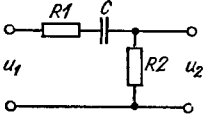
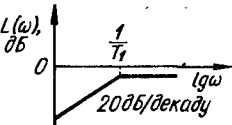
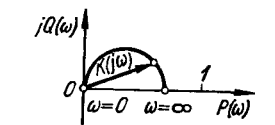
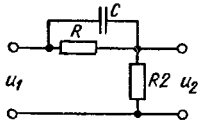
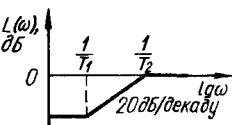
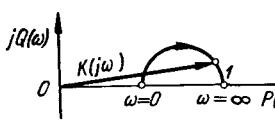
5.5. Коррекция САУ с помощью последовательных корректирующих устройств переменного тока

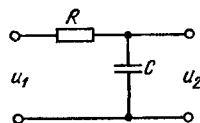
Типы корректирующих устройств переменного тока

В системах автоматического управления переменного тока или в системах, имеющих цепи передачи информации на переменном токе, полезный сигнал (в частности, сигнал рассогласования) выражен либо огибающей амплитудно-модулированного, либо отклонением фазы фазомодулированного напряжения несущей частоты. Поэтому, чтобы осуществить необходимое с точки зрения коррекции САУ преобразование сигнала, нужно выполнить такое же преобразование модулирующей функции. Например, чтобы получить опережение сигнала, надо создать такое же опережение модулирующей функции амплитудно- или фазомодулированного напряжения несущей частоты. Для случая амплитудной модуляции, как отмечалось, сигнал выражен огибающей, поэтому необходимо создать опережение огибающей, как показано на рис. 5.16. Необходимое преобразование модулирующей функции выполняется с помощью корректирующих устройств переменного тока.

Можно выделить три типа корректирующих устройств переменного тока. В устройствах *первого типа* сигнал переменного тока предварительно демодулируется, сглаживается фильтром, пропускается через корректирующий контур постоянного тока, затем снова модулируется и пропускается через выходной фильтр. На рис. 5.17 в качестве примера показана схема следящей системы, стабилизированной дифференцирующим устройством ДУ1 переменного тока первого типа. В этой системе элементом сравнения являются сельсины ВС и ВЕ, работающие в трансформаторном режиме и выполняющие, как известно, кроме измерения угла рассогласования, функцию модулятора. Модулированное углом рассогласования напряжения несущей частоты от сельсин-приемника поступает на дифференцирующее устройство переменного тока первого типа ДУ1, где предварительно демодулируется фазовым дискриминатором ДМ, сглаживается фильтром Ф, проходит через дифференцирующий фазоопережающий контур постоянного

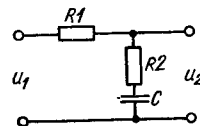
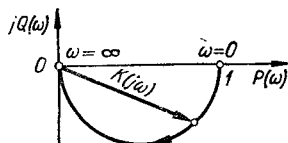
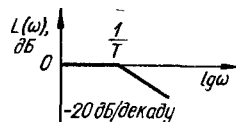
Таблица 5.1. Типовые схемы корректирующих устройств постоянного тока и их характеристики

Схема корректирующего пассивного контура	Передаточная функция	Логарифмическая амплитудная характеристика	Амплитуднофазовая частотная характеристика
Дифференцирующие контуры			
	$K(p) = \frac{Tp}{Tp + 1}; \quad K(0) = 0;$ $K(\infty) = 1; \quad \Psi(\omega) = 90^\circ - \operatorname{arctg} T\omega; \quad T = RC$		
	$K(p) = \frac{T_2 p}{T_1 p + 1}; \quad K(0) = 0;$ $K(\infty) = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2}}; \quad \Psi(\omega) = 90^\circ - \operatorname{arctg} T_1 \omega;$ $T_1 = (R_1 + R_2)C; \quad T_2 = R_1 C$		
	$K(p) = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2}} \cdot \frac{T_1 p + 1}{T_2 p + 1}; \quad K(0) = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2}};$ $K(\infty) = 1; \quad \Psi(\omega) = \operatorname{arctg} T_1 \omega - \operatorname{arctg} T_2 \omega;$ $T_1 = R_1 C; \quad T_2 = \frac{R_2 R_1}{R_1 + R_2} C$		



$$K(p) = \frac{1}{1 + Tp}; \quad K(0) = 1; \quad K(\infty) = 0;$$

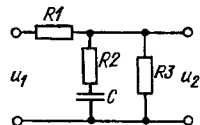
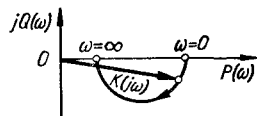
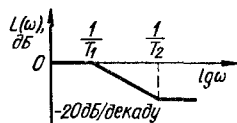
$$\Psi(\omega) = -\arctg T\omega; \quad T = RC$$



$$K(p) = \frac{T_2 p + 1}{T_1 p + 1}; \quad K(0) = 1;$$

$$K(\infty) = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2}}; \quad \Psi(\omega) = \arctg T_2 \omega -$$

$$-\arctg T_1 \omega; \quad T_2 = R_2 C; \quad T_1 = (R_1 + R_2) C$$



$$K(p) = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_3}} \cdot \frac{T_2 p + 1}{T_1 p + 1}; \quad K(0) = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2}};$$

$$K(\infty) = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_3}}; \quad \Psi(\omega) = \arctg T_2 \omega -$$

$$-\arctg T_1 \omega; \quad T_2 = R_2 C; \quad T_1 =$$

$$= \left(R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} \right) C$$

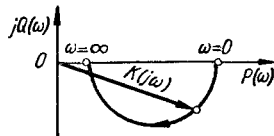
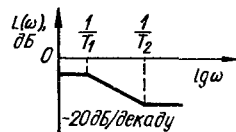
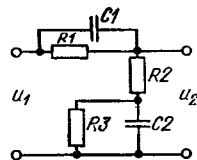


Схема корректирующего пассивного контура	Передаточная функция	Логарифмическая амплитудная характеристика	Амплитуднофазовая частотная характеристика
	$K(p) = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2 + R_3} + \frac{R_1}{R_4}} \cdot \frac{T_2 p + 1}{T_1 p + 1};$ $K(0) = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2 + R_3} + \frac{R_1}{R_4}};$ $K(\infty) = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_4}};$ $\Psi(\omega) = \arctg T_2 \omega - \arctg T_1 \omega;$ $T_2 = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} C; \quad T_1 =$ $= \frac{1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_4}}{1 + \frac{R_1}{R_2 + R_3} + \frac{R_1}{R_4}} T_2$		

Интегро-дифференцирующие контуры

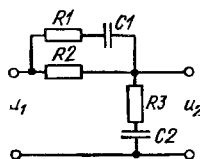
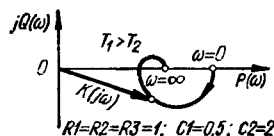
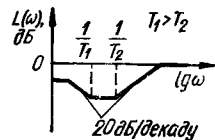
	$K(p) = \frac{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2) p + 1}{T_1 T_2 p^2 + \left[T_1 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) + T_2 \right] p + 1};$ $K(0) = 1; \quad K(\infty) = 1; \quad T_1 = R_2 C_2; \quad T_2 = R_1 C_1$		
--	---	--	--



$$K(p) = \frac{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2) p + 1}{T_1 T_2 p^2 + \left[T_1 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) + T_2 \right] p + \frac{R_2 + R_3 + R_1}{R_2 + R_3}}$$

$$K(0) = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2 + R_3}}; \quad K(\infty) = 1;$$

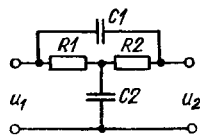
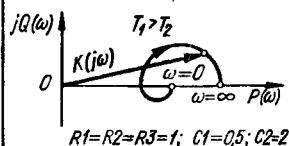
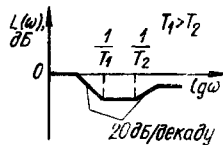
$$T_1 = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} C_2; \quad T_2 = R_1 C_1$$



$$K(p) = \frac{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2) p + 1}{T_1 T_2 \left[1 + \frac{R_1 R_2}{R_3 (R_1 + R_2)} \right] p^2 + \left[T_1 \left(1 + \frac{R_2}{R_3} \right) + T_2 \right] p + 1}$$

$$K(0) = 1; \quad K(\infty) = \frac{1}{1 + \frac{R_1 R_2}{R_3 (R_1 + R_2)}};$$

$$T_1 = R_3 C_2; \quad T_2 = (R_1 + R_2) C_1$$



$$K(p) = \frac{T_1 T_2 p^2 + T_2 p + 1}{T_1 T_2 p^2 + \left[T_1 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) + T_2 \right] p + 1}$$

$$K(0) = 1; \quad K(\infty) = 1;$$

$$T_1 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C_2; \quad T_2 = (R_1 + R_2) C_1$$

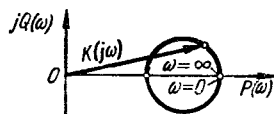
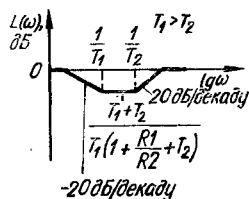


Рис. 5.16. Амплитудно-модулированное напряжение несущей частоты (а) и напряжение с опережающей по фазе огибающей (б).

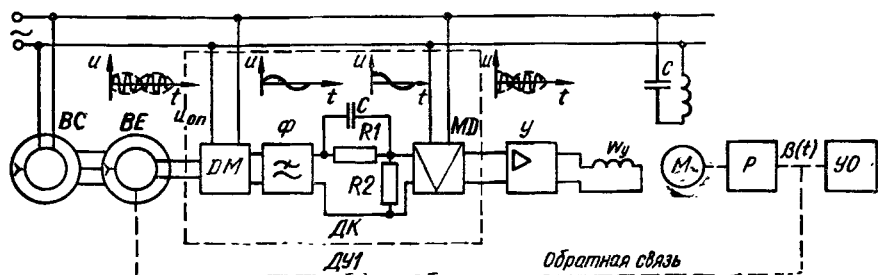
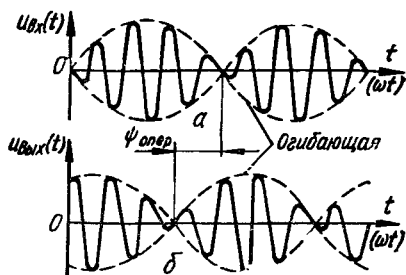


Рис. 5.17. Коррекция следящих систем корректирующим устройством переменного тока первого типа (фазовый дискриминатор — корректирующий контур — модулятор).

тока ДК, затем снова модулируется модулятором MD . Выходное напряжение модулятора усиливается усилителем переменного тока U и подается на асинхронный двигатель M . Последний выполняет функцию фазового демодулятора. При изменении фазы напряжения несущей частоты в обмотке управления W_y асинхронного двигателя на 180° направление его вращающего момента $M_{вр}$ изменяется на противоположное, а величина $M_{вр}$ пропорциональна величине подводимого к обмотке управления напряжения. Следовательно, вращающий момент асинхронного двигателя пропорционален огибающей модулированного по амплитуде напряжения несущей частоты.

Благодаря наличию фазового дискриминатора DM корректирующее устройство первого типа может работать как при амплитудно-модулированном, так и при фазомодулированном напряжении на входе.

Корректирующие устройства переменного тока первого типа применяются для коррекции многих САУ. Однако устройства этого типа имеют недостатки, заключающиеся в том, что демодулятор уменьшает отношение сигнал/шум (на выходе демодулятора имеет место пульсирующее напряжение, содержащее в своем спектре вредные высшие гармоники), а фильтры демодулятора и модулятора вносят существенное запаздывание, чем уменьшают эффект коррекции, создаваемый корректирующим контуром постоянного тока. Кроме того, сама схема устройства первого типа является довольно сложной.

Корректирующие устройства переменного тока *второго типа* — контуры несущей частоты — осуществляют преобразование огибаю-

щей модулированного по амплитуде напряжения несущей частоты без его демодуляции и модуляции.

К *третьему типу* относятся фазочувствительные корректирующие устройства переменного тока [17].

Эквивалентная комплексная передаточная функция цепи переменного тока (контура несущей частоты)

Контуры несущей частоты предназначены для преобразования огибающей напряжения несущей частоты, модулированного по амплитуде, поэтому для анализа их работы уже не могут быть непосредственно использованы обычные передаточные функции или частотные характеристики. Чтобы судить об эффективности работы того или иного контура несущей частоты, необходимо знать его передаточную функцию (частотную характеристику) для огибающей, т. е. так называемую эквивалентную передаточную функцию (частотную характеристику). Найдем выражение для эквивалентной комплексной передаточной функции цепи переменного тока. Под цепью переменного тока будем понимать электрическую цепь, через которую передается информация на несущей частоте. Частным случаем цепи переменного тока являются корректирующие контуры несущей частоты.

Если сигнал рассогласования в системе изменяется по синусоидальному закону $u_c(t) = U_M \sin \Omega t$, а несущая — по косинусоидальному закону $\cos \omega_0 t$, то на вход цепи переменного тока (рис. 5.18) поступает напряжение

$$u_{\text{вх}}(t) = U_M \sin \Omega t \cos \omega_0 t = (1/2) U_M \sin (\omega_0 + \Omega) t - (1/2) U_M \sin (\omega_0 - \Omega) t,$$

где $\omega_0 + \Omega = \omega^+$ — верхняя боковая частота (полоса частот) спектра модулированного напряжения; $\omega_0 - \Omega = \omega^-$ — нижняя боковая частота (полоса частот) спектра модулированного напряжения.

Пусть КПФ цепи переменного тока $K(j\omega) = N(\omega) e^{i\psi(\omega)}$, где $N(\omega)$ и $\psi(\omega)$ являются функциями частоты и для верхней и нижней боковых частот соответственно равны: $N(\omega^+) e^{i\psi(\omega^+)}$ и $N(\omega^-) e^{i\psi(\omega^-)}$. В результате преобразования напряжения на выходе цепи [17]

$$u_{\text{вых}}(t) = U_p(t) \cos \omega_0 t + U_k(t) \sin \omega_0 t, \quad (5.24)$$

где

$U_p(t) = \{N(\omega^+) \sin [\Omega t + \psi(\omega^+)] + N(\omega^-) \sin [\Omega t - \psi(\omega^-)]\} U_M/2$ — огибающая первой составляющей выходного напряжения;

$U_k(t) = \{N(\omega^+) \cos [\Omega t + \psi(\omega^+)] - N(\omega^-) \cos [\Omega t - \psi(\omega^-)]\} U_M/2$ — огибающая второй составляющей выходного напряжения.

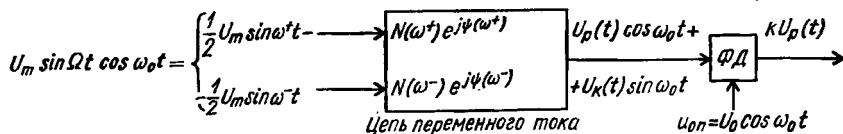


Рис. 5.18. Схема преобразования амплитудно-модулированного напряжения.

рисунке изображена в виде окружности. Первое слагаемое выражения (5.25) — вектор комплексной передаточной функции при верхней боковой частоте $K(j\omega_i^+)$ — определяется непосредственно из АФЧХ. Второе слагаемое находится путём зеркального отображения вектора $K(j\omega_i^-)$ для нижней боковой частоты относительно вещественной оси.

Точка эквивалентной АФЧХ $K_0(j\Omega_i)$, соответствующая частоте Ω_i , определяется вектором, проведенным из начала координат до средней точки отрезка, соединяющего концы векторов $K(j\omega_i^+)$ и $K^*(j\omega_i^-)$. Остальные точки эквивалентной АФЧХ строятся аналогично.

Особенности определения эквивалентной передаточной функции последовательного соединения звеньев переменного тока. Эквивалентная передаточная функция нескольких звеньев переменного тока направленного действия, включенных последовательно, в общем случае не может быть найдена как произведение эквивалентных передаточных функций этих звеньев. Чтобы найти эквивалентную передаточную функцию последовательного соединения звеньев, необходимо прежде всего определить обычную передаточную этого соединения перемножением передаточных функций, входящих в это соединение звеньев, а затем с помощью формулы (5.25) связи между обычной и эквивалентной передаточной функцией найти эквивалентную передаточную функцию последовательного соединения звеньев.

Ниже рассматривается наиболее распространенный корректирующий контур переменного тока — дифференцирующий мостовой Т-образный RC-контур несущей частоты, его обычные и эквивалентные передаточные функции и частотные характеристики.

Корректирующие RC-контуры несущей частоты

Дифференцирующий мостовой Т-образный RC-контур несущей частоты. Схема симметричного мостового RC-контура несущей частоты показана на рис. 5.20, а. КПФ контура в режиме холостого хода

$$K(j\omega) = \frac{m^2 - \omega^2 T_1^2 + j2\omega T_1}{m^2 - \omega^2 T_1^2 + j\omega T_1 (m^2 + 2)}, \quad T_1 = RC; \quad m^2 = R/R_1. \quad (5.26)$$

АФЧХ контура, построенная по выражению (5.26), имеет вид окружности, изображенной на рис. 5.20, б. При $\omega = 0$ $K(j\omega) = P(\omega) = 1$; при частоте $\omega = m/T_1 = \omega_n$ $K(j\omega) = P(\omega) = 2/(m^2 + 2)$. На частоте ω_n , называемой частотой настройки, выходное напряжение совпадает по фазе с входным и имеет минимальное значение. Обычно контур подбором параметров (изменением сопротивления R_1) настраивается на несущую частоту ω_0 : $\omega_n = m/T_1 = \omega_0$. При $\omega = \infty$ $K(j\omega) = 1$.

Точная эквивалентная АФЧХ мостового Т-образного RC-контура, настроенного на частоту $\omega_0 = 314 \text{ с}^{-1}$ и имеющего параметры: $C = 0,1 \text{ мкФ}$; $R = 330 \text{ кОм}$; $R_1 = 3,073 \text{ кОм}$; $m = 10,35$, изображена кривой 1 на рис. 5.21. На том же рисунке обычная АФЧХ контура показана кривой 2.

Точные логарифмические эквивалентные частотные характеристики контура показаны кривыми 1 на рис. 5.22.

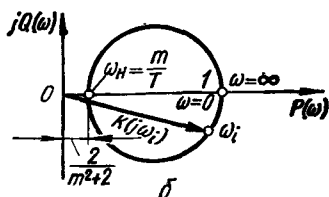
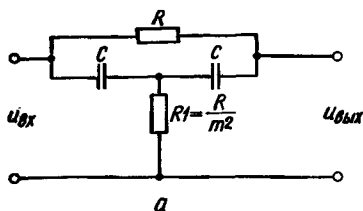


Рис. 5.20. Симметричный мостовой Т-образный RC -контур (а) и его АФЧХ (б).

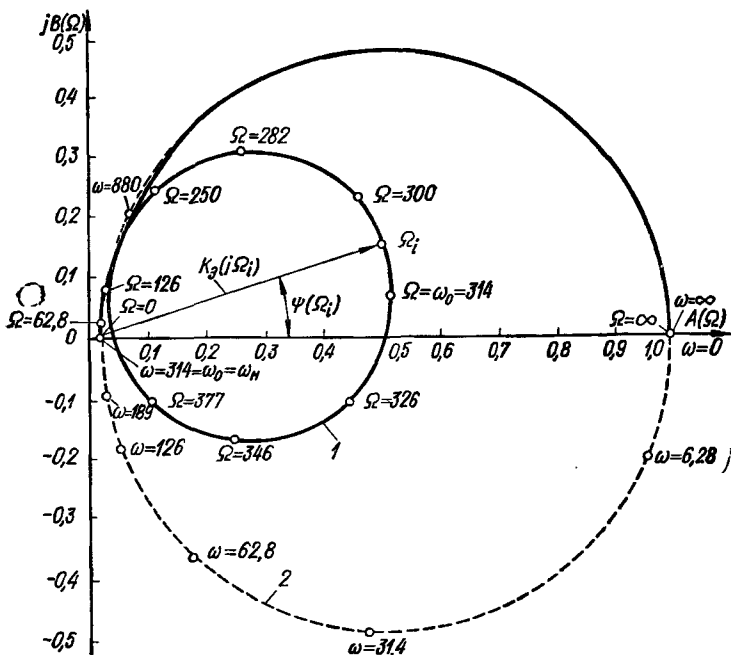


Рис. 5.21. Эквивалентная (1) и обычная (2) амплитудно-фазовые частотные характеристики мостового Т-образного RC -контура, настроенного на частоту $\omega_0 = 314$ 1/с.

Как видно из эквивалентных частотных характеристик контура, последний сдвигает огибающую амплитудно-модулированного напряжения в сторону опережения в области низких частот, т. е. в области существенных частот спектра полезного сигнала САУ. Благодаря этому контур применяется для коррекции САУ.

Приближенные эквивалентные передаточные функции и ЛЧХ мостового Т-образного RC -контура несущей частоты в режиме холостого хода. Эквивалентная КПФ контура может быть получена в результате подстановки в формулу (5.25) значения $K(j\omega)$ из (5.26). После преобразования и упрощения получаем следующее приближенное выражение эквивалентной КПФ контура в режиме холостого хода, справедли-

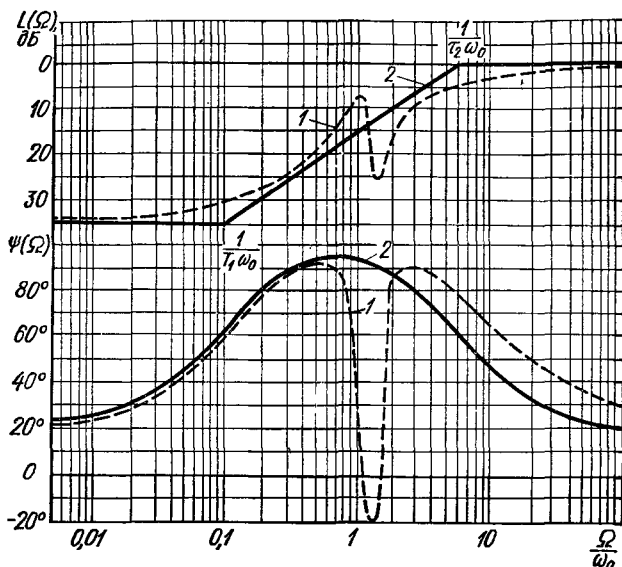


Рис. 5.22. Эквивалентные логарифмические амплитудно-фазочастотные характеристики мостового Т-образного RC-контура:

1 — точные ЛЧХ, 2 — приближенные ЛЧХ.

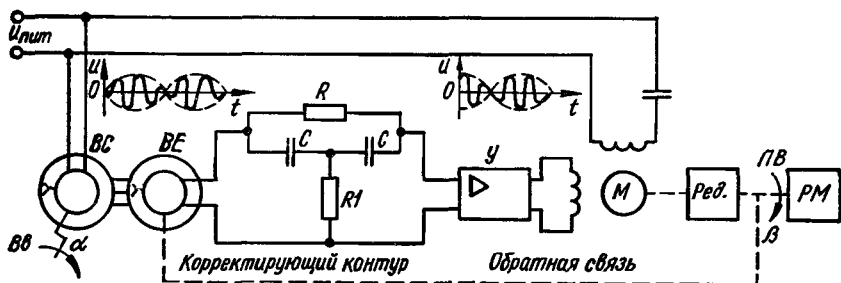


Рис. 5.23. Схема следящей системы, скорректированной с помощью дифференцирующего фазопережающего мостового Т-образного RC-контура.

ное для области низких частот модуляции ($\Omega/\omega_0 \ll 1$) [17]:

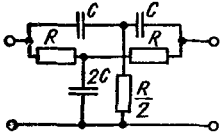
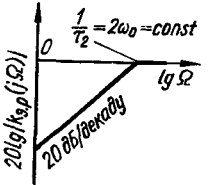
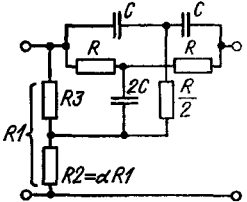
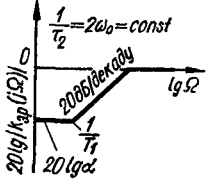
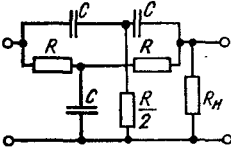
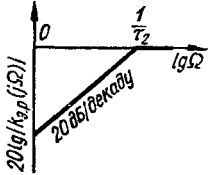
$$K_s(j\Omega) = k(1 + j\Omega T_1)/(1 - j\Omega \tau_2), \quad (5.27)$$

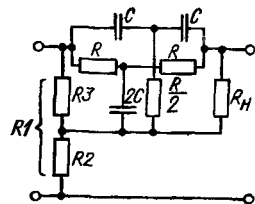
где $T_1 = RC = m/\omega_0$; $\tau_2 = T_1 k$; $k = 2/(m^2 + 2)$; $m = \sqrt{R/R_1}$; ω_0 — частота настройки контура, равная несущей частоте.

Для построения эквивалентной ЛАЧХ контура находим частоты сопряжения: $\Omega_1 = 1/T_1 = \omega_0/m$; $\Omega_2 = 1/\tau_2 = (m^2 + 2)\omega_0/2m$, или в относительном масштабе $\Omega_1/\omega_0 = 1/m$; $\Omega_2/\omega_0 = (m^2 + 2)/2m$.

Приближенные, построенные на основании выражения (5.27), эквивалентные ЛЧХ, настроенного на частоту $\omega_0 = 314 \text{ с}^{-1}$ мостового контура со следующими параметрами: $R = 330 \text{ кОм}$; $C = 0,1 \text{ мкФ}$, $m = RC\omega_0 = 10,35$, изображены на рис. 5.22 кривыми 2. Из рисунка

Таблица 5.2. Контуры несущей частоты и их характеристики

Контур несущей частоты	Приближенная эквивалентная передаточная функция	Вид приближенной эквивалентной ЛАХ	Выражение справедливо в диапазоне частот
	$K_{э.р}(j\Omega) = \frac{j\Omega\tau_2}{1 + j\Omega\tau_2}, \text{ где}$ $\tau_2 = \frac{1}{2\omega_0}; \quad \omega_0 = \frac{1}{RC}$		От $\Omega = 0$ до $\Omega = (0,5 \dots 0,6) \omega_0$
	$K_{э.р}(j\Omega) = \alpha \frac{1 + j\Omega T_1}{1 + j\Omega\tau_2},$ где $T_1 = \frac{\tau_2}{\alpha} = \frac{1}{2\omega_0\alpha};$ $\tau_2 = \frac{1}{2\omega_0}; \quad \alpha = \frac{R_2}{R_2 + R_3};$ $\omega_0 = \frac{1}{RC}$		От $\Omega = 0$ до $\Omega = (0,5 \dots 0,6) \omega_0$
	$K_{э.р}(j\Omega) = \frac{j\Omega\tau_2}{1 + j\Omega\tau_2}, \text{ где}$ $\tau_2 = \frac{2 + \frac{1}{n}}{\left[\frac{1}{n^2} + \left(2 + \frac{1}{n} \right)^2 \right] \omega_0};$ $n = \frac{R_n}{R}; \quad \omega_0 = \frac{1}{RC}$		От $\Omega = 0$ до $\Omega = (0,2 \dots 0,3) \omega_0$ при $n = 1,$ до $\Omega = (0,5 \dots 0,6) \omega_0$ при $n = \infty$



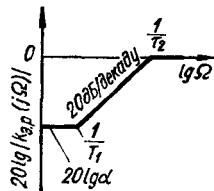
$$V_{\text{э.п}}(j\Omega) = \alpha \frac{1 + j\Omega T_1}{1 + j\Omega \tau_2},$$

$$\text{где } T_1 = \frac{\tau_2}{\alpha};$$

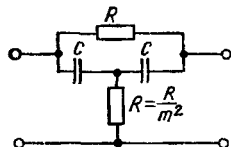
$$\tau_2 = \frac{2 + \frac{1}{n}}{\omega_0 \left[\frac{1}{n^2} + \left(2 + \frac{1}{n} \right)^2 \right]};$$

$$\alpha = \frac{R_2}{R_3 + R_2}; \quad \omega_0 = \frac{1}{RC};$$

$$n = \frac{R_H}{R}$$



От $\Omega = 0$
до $\Omega = (0,2 \dots 0,3) \omega_0$
при $n = 1$,
до $\Omega = (0,5 \dots 0,6) \omega_0$
при $n = \infty$

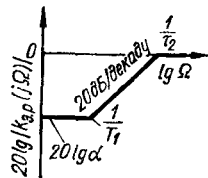


$$K_{\text{э.п}}(j\Omega) = \alpha \frac{1 + j\Omega T_1}{1 + j\Omega \tau_2},$$

$$\text{где } T_1 = RC = \frac{m}{\omega_0};$$

$$\tau_2 = T_1 \alpha; \quad \alpha = \frac{2}{m^2 + 2};$$

$$m = \sqrt{\frac{R}{R_1}}$$



От $\Omega = 0$
до $\Omega = (0,6 \dots 0,7) \omega_0$

видно, что приближенные характеристики с отклонениями, не превышающими 3 дБ по ЛАЧХ и 5° по ЛФЧХ, совпадают с точными до частоты модуляции $\Omega = (0,6 \dots 0,7) \omega_0$.

Из формулы (5.27) следует, что величины T_1 и τ_2 могут изменяться, однако они связаны между собой таким образом, что каждому значению T_1 соответствует строго определенное значение τ_2 , причем большим T_1 соответствуют меньшие значения τ_2 .

В качестве примера на рис. 5.23 показана схема следящей системы переменного тока, в которой для коррекции использован дифференцирующий фазопережающий мостовой Т-образный RC-контур несущей частоты. На рисунке приняты следующие обозначения: *BC* — сельсин-датчик, *BE* — сельсин-приемник, *М* — двухфазный асинхронный двигатель, Ред — редуктор, *ВВ* — ведущий вал, *ПВ* — приемный вал, *РМ* — рабочий механизм.

В этой системе в качестве элемента сравнения использованы сельсины *BC* и *BE* в трансформаторном режиме работы, а функции исполнительного двигателя и фазового дискриминатора, преобразующего амплитудно-модулированное напряжение управления в постоянную величину (момент вращения), изменяющуюся по закону изменения огибающей рабочей составляющей этого напряжения, выполняет двухфазный асинхронный двигатель *М*. Часто вместо асинхронного двигателя для этой же цели применяется универсальный коллекторный двигатель.

Наряду с мостовым Т-образным RC-контуром несущей частоты для коррекции САУ переменного тока применяются и другие RC и RLC-контуры несущей частоты. Из RC-контуров наибольшее распространение получил двойной Т-образный RC-контур несущей частоты. В табл. 5.2 [17] приведены схемы двойного и мостового Т-образных RC-контуров несущей частоты, их приближенные эквивалентные передаточные функции и логарифмические амплитудные характеристики, указан диапазон частот, в котором справедливы приближенные передаточные функции и логарифмические частотные характеристики.

Достоинства и недостатки дифференцирующих фазопережающих контуров несущей частоты. Двойной и мостовой Т-образные RC-контуры благодаря своей простоте нашли широкое применение в качестве корректирующих фазопережающих устройств переменного тока в САУ. Однако этим контурам присущи существенные недостатки, ограничивающие их использование.

1. Контуры несущей частоты, как видно из эквивалентных частотных характеристик (см. рис. 5.21, 5.22), создают не только опережение огибающей, но в некотором диапазоне частот, расположенном сразу же за частотой модуляции Ω , равной несущей частоте ω_0 ($\Omega = \omega_0 = \omega_n$), вносят также отставание. Из-за этого применение контуров несущей частоты ограничивается системами автоматического управления, имеющими довольно низкие значения частоты среза Ω_c ($\Omega_c < \Omega = \omega_0$), поскольку необходимо, чтобы частота среза системы совпадала с областью частот, в которой контур вносит максимальное опережение.

2. Некоторые постоянные времени контуров фиксированы (по-

стоянная времени отставания у двойного контура) либо однозначно связаны между собой (мостовой контур), т. е. контуры имеют сравнительно «жесткие» ЛЧХ. Поэтому не всегда удастся с помощью контуров несущей частоты скорректировать систему, так как требуемые постоянные времени корректирующего устройства могут иметь самые различные значения.

3. Контуры настраиваются на несущую частоту, в связи с этим их эквивалентные частотные характеристики, а следовательно, и характеристики систем, содержащих эти контуры, изменяются в зависимости от ухода несущей частоты; частотные характеристики также чувствительны к изменениям параметров контуров.

4. Кроме рабочей составляющей, на выходе контуров имеет место квадратурная составляющая, которая может вывести элементы системы из зоны линейности и тем самым уменьшить усиление рабочей составляющей.

5. Контуры, максимально ослабляя сигнал, без существенного затухания пропускают гармоники напряжения несущей частоты. Эти гармоники на выходе контуров имеют тем большее значение относительно сигнала, чем большую эквивалентную постоянную времени производной T_1 имеют контуры и чем сильнее напряжение несущей частоты отличается от идеальной синусоиды.

В работе [17] рассмотрены некоторые способы изменения в желаемом направлении эквивалентных частотных характеристик и улучшения показателей качества работы контуров несущей частоты (уменьшения чувствительности к уходу несущей частоты, уменьшения квадратурной составляющей), что позволяет расширить область применения этих простейших по своей схеме контуров, как корректирующих устройств систем управления.

5.6. Коррекция САУ при помощи параллельных корректирующих устройств (коррекция обратными связями)

Возможность коррекции САУ с помощью параллельных корректирующих устройств

Способ последовательной коррекции САУ, рассмотренный выше, широко используется на практике. Однако во многих случаях коррекцию САУ оказывается более целесообразно осуществлять с помощью не последовательных, а параллельных корректирующих устройств, т. е. корректирующих устройств, включаемых в цепи местных обратных связей. Возможность коррекции САУ параллельными корректирующими устройствами вытекает из возможности замены последовательного корректирующего устройства равносильным параллельным. В этом нетрудно убедиться. Пусть, например, часть системы с передаточной функцией $K_o(p)$ охвачена обратной связью, содержащей корректирующее устройство с передаточной функцией $K_{oc}(p)$ (рис. 5.24, а). Пере-

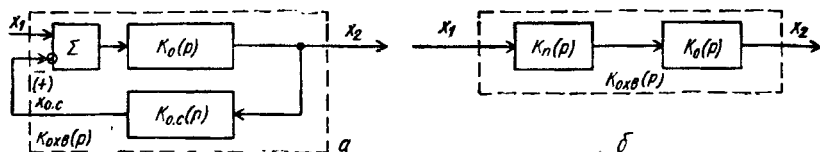


Рис. 5.24. Эквивалентные структурные схемы.

даточноная функция этой части в соответствии с формулой (2.45)

$$K_{\text{оxв}}(p) = X_2(p)/X_1(p) = K_0(p)/[1 \pm K_0(p) K_{\text{о.с}}(p)], \quad (5.28)$$

где знак плюс относится к случаю отрицательной, а знак минус — к случаю положительной обратной связи. Выражение (5.28) можно представить в следующем виде:

$$K_{\text{оxв}}(p) = K_0(p)/[1 \pm K_0(p) K_{\text{о.с}}(p)] = K_0(p) K_{\text{п}}(p), \quad (5.29)$$

где

$$K_{\text{п}}(p) = 1/[1 \pm K_0(p) K_{\text{о.с}}(p)] — \quad (5.30)$$

передаточная функция последовательно включенного звена, эквивалентного по своему действию параллельному корректирующему устройству с передаточной функцией $K_{\text{о.с}}(p)$ (рис. 5.24, б).

Таким образом, введение параллельного корректирующего устройства с передаточной функцией $K_{\text{о.с}}(p)$ равносильно включению последовательного устройства с передаточной функцией (5.30).

Убедиться в возможности коррекции САУ с помощью параллельных корректирующих устройств можно и не прибегая к понятию эквивалентного последовательного корректирующего устройства. В соответствии с формулой (5.28) КДФ части системы

$$K_{\text{оxв}}(j\omega) = K_0(j\omega)/[1 \pm K_0(j\omega) K_{\text{о.с}}(j\omega)]. \quad (5.31)$$

Если в какой-либо области частот

$$|K_0(j\omega) K_{\text{о.с}}(j\omega)| \gg 1, \quad (5.32)$$

то

$$K_{\text{оxв}}(j\omega) \approx 1/[\pm K_{\text{о.с}}(j\omega)]. \quad (5.33)$$

Таким образом, если выполняется условие (5.32) в какой-либо области частот, то передаточная функция части системы, охваченной обратной связью, в этой области частот равна обратному значению передаточной функции параллельного корректирующего устройства, т. е. полностью определяется передаточной функцией последнего. Благодаря этому с помощью параллельных корректирующих устройств можно изменять частотные характеристики систем в желаемом направлении.

В зависимости от корректирующего устройства, включаемого в местную обратную связь, различают жесткие и гибкие обратные связи. *Жесткой обратной связью* называется связь, подающая на вход охваченного ею звена (нескольких звеньев) величину, пропорциональную выходной величине этого звена (последнего из звеньев). *Гибкая обратная связь* подает на вход охваченного ею звена величину, пропорциональную первой производной от выходной величины этого звена, то

есть величину, пропорциональную скорости изменения выходной величины. В более общем случае с помощью гибкой обратной связи на вход звена, кроме первой, подаются вторая и более высокие производные выходной величины. Если жесткая обратная связь действует как в переходном, так и в установившемся режимах, то гибкая обратная связь оказывает на работу системы воздействие только в режиме переходного процесса. Рассмотрим влияние жесткой и гибкой обратной связи на передаточные функции и частотные характеристики некоторых звеньев.

Охват обратной связью апериодического звена

Охват апериодического звена жесткой обратной связью. Структурная схема звена, охваченного жесткой отрицательной обратной связью, изображена на рис. 5.25, а. В цепь обратной связи звена включено пропорциональное звено. Благодаря этому на вход звена подается величина, пропорциональная выходной величине $x_2(t)$ звена.

Апериодическое звено, охваченное жесткой обратной связью, на основании выражения (5.28) можно заменить одним эквивалентным звеном с передаточной функцией

$$\begin{aligned} K_{\text{о.хв}}(p) &= \frac{k/(1+Tp)}{1+k_{\text{о.с}}k/(1+Tp)} = \frac{k}{1+k_{\text{о.с}}k+Tp} = \\ &= \frac{k/(1+k_{\text{о.с}}k)}{1+[T/(1+k_{\text{о.с}}k)]p} = \frac{k_{\text{о.хв}}}{1+T_{\text{о.хв}}p}, \end{aligned} \quad (5.34)$$

где

$$k_{\text{о.хв}} = k/(1+k_{\text{о.с}}k); \quad T_{\text{о.хв}} = T/(1+k_{\text{о.с}}k). \quad (5.35)$$

Как видно из выражения (5.34), эквивалентное звено, соответствующее апериодическому звену с жесткой обратной связью, является также апериодическим, т. е. жесткая обратная связь не изменяет вида звена. Однако, как видно из формулы (5.35), с введением жесткой обратной связи изменяются параметры передаточной функции: в $(1+k_{\text{о.с}}k)$ раз уменьшаются постоянная времени и коэффициент усиления. Уменьшение постоянной времени благоприятно сказывается на показателях качества системы, поскольку уменьшается запаздывание, вносимое этим апериодическим звеном. Однако уменьшение коэффициента уси-

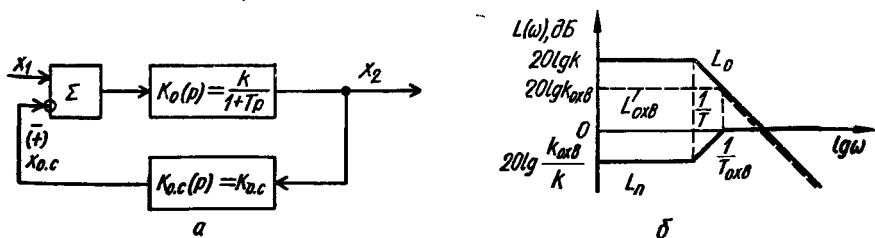


Рис. 5.25. Охват апериодического звена жесткой отрицательной обратной связью: а — структурная схема; б — ЛАЧХ.

ления звена является недостатком коррекции с помощью жесткой отрицательной обратной связи.

На рис. 5.25, б изображены логарифмические амплитудные частотные характеристики апериодического звена без обратной связи $L_0(\omega)$ и с жесткой отрицательной обратной связью $L_{\text{охв}}(\omega)$. ЛАЧХ $L_n(\omega)$ представляет собой разность между $L_{\text{охв}}(\omega)$ и $L_0(\omega)$. Поскольку $L_n(\omega)$ является ЛАЧХ дифференцирующего фазопережающего устройства, то можно сделать вывод, что охват апериодического звена жесткой отрицательной обратной связью равносителен включению последовательно апериодическому звену дифференцирующего фазопережающего контура с передаточной функцией

$$K_n(p) = k_n \frac{Tp + 1}{T_{\text{охв}}p + 1} \quad \left(k_n = \frac{k_{\text{охв}}}{k} = \frac{1}{1 + k_{\text{о.с}}k} \right), \quad (5.36)$$

где постоянная времени T равна постоянной времени апериодического звена; $T_{\text{охв}}$ определяется выражением (5.35).

Если охватить жесткой обратной связью апериодическое звено системы с максимальной постоянной времени T_1 и выбрать $T_{\text{охв}}$ меньше постоянных времени других апериодических звеньев (во всяком случае меньше второй по значению постоянной времени T_2), то тем самым будет скомпенсирована максимальная постоянная времени системы. При этом появляются такие же возможности повышения показателей качества, как и при коррекции системы включением последовательного дифференцирующего контура. Нетрудно убедиться в том, что введение жесткой положительной обратной связи приводит к увеличению постоянной времени и коэффициента усиления звена.

Охват апериодического звена гибкой (скоростной) обратной связью. Условие сохранения значения коэффициента усиления системы. Как было показано, жесткая отрицательная обратная связь наряду с уменьшением постоянной времени уменьшает также коэффициент усиления звена. Чтобы при введении обратной связи не уменьшался коэффициент усиления системы, необходимо, чтобы передаточная функция $K_{\text{охв}}(j\omega)$ эквивалентной схемы в области низких частот определялась передаточной функцией $K_0(j\omega)$ охватываемого звена:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} K_{\text{охв}}(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} K_0(j\omega). \quad (5.37)$$

Как видно из выражения (5.31), равенство (5.37) будет выполняться, если в области низких частот реализуется условие

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |K_0(j\omega) K_{\text{о.с}}(j\omega)| \ll 1. \quad (5.38)$$

Поскольку при охвате апериодического звена жесткой обратной связью условие (5.38) не выполняется

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |K_0(j\omega) K_{\text{о.с}}(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow 0} [kk_{\text{о.с}}/(Tj\omega + 1)] = kk_{\text{о.с}},$$

то, как было показано выше, коэффициент усиления звена уменьшается. Чтобы при охвате обратной связью какого-либо звена коэффициент усиления системы не уменьшался, необходимо в цепь обратной связи

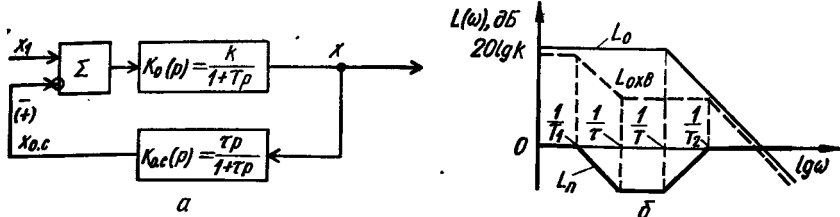


Рис. 5.26. Охват апериодического звена гибкой обратной связью, содержащий дифференцирующий контур с передаточной функцией $K_{o.c}(p) = \tau p / (\tau p + 1)$:
 а — структурная схема; б — ЛАЧХ при отрицательной обратной связи и при $\tau > T$.

вводить дифференцирующие звенья, передаточные функции которых содержали бы в качестве сомножителя $j\omega$. При этом нужно иметь в виду, что если обратной связью охватываются интегрирующие звенья, передаточные функции которых содержат $j\omega$ в качестве сомножителей в знаменателе, то степень n при $j\omega$ звена обратной связи должна быть выше степени ν при $j\omega$ знаменателя передаточной функции охватываемых звеньев:

$$n > \nu. \quad (5.39)$$

В этом случае действительно будет выполняться условие (5.38):

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |K_0(j\omega) K_{o.c}(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left| \frac{K_{o_0}(j\omega)}{(j\omega)^\nu} K_{o.c}(j\omega) (j\omega)^n \right| = 0 \ll 1.$$

Чтобы при охвате апериодического звена не уменьшался его коэффициент усиления, достаточно в цепь обратной связи ввести звено, содержащее $j\omega$ в первой степени. Действительно, в этом случае

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |K_0(j\omega) K_{o.c}(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left| \frac{k}{Tj\omega + 1} K_{o.c}(j\omega) j\omega \right| = 0,$$

т. е. условие (5.37) выполняется и, следовательно, коэффициент усиления звена не уменьшается. Реализовать такую обратную связь можно с помощью дифференцирующего звена. На рис. 5.26, а в цепь обратной связи включено дифференцирующее звено (см. схему 1 табл. 5.1) с передаточной функцией $K_{o.c}(p) = \tau p / (\tau p + 1)$, поэтому на вход апериодического звена подается величина, пропорциональная производной от выходной величины этого звена. В установившемся режиме, когда выходная величина апериодического звена имеет постоянное значение, обратная связь не влияет на работу звена.

Передаточная функция звена, эквивалентного апериодическому звену, охваченному гибкой обратной связью, в соответствии с выражением (5.28) будет иметь вид:

$$K_{охв}(p) = \frac{k(Tp + 1)}{1 \pm \frac{k\tau p}{(Tp + 1)(\tau p + 1)}} = \frac{k(\tau p + 1)}{T\tau p^2 + (T + \tau \pm k\tau)p + 1}, \quad (5.40)$$

или после разложения знаменателя на множители

$$K_{охв}(p) = k(\tau p + 1) / [(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)], \quad (5.41)$$

где T_1 и T_2 находятся из системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} T\tau &= T_1 T_2; \\ T + \tau \pm k\tau &= T_1 + T_2, \end{aligned} \right\} \quad (5.42)$$

полученной приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях p знаменателей формул (5.40) и (5.41). При отрицательной обратной связи:

$$T_{1,2} = [T + \tau + k\tau \pm \sqrt{(T + \tau + k\tau)^2 - 4T\tau}] / 2. \quad (5.43)$$

Как видно из выражения (5.41), эквивалентная схема представляется двумя апериодическими и одним дифференцирующим звеньями, соединенными последовательно. Постоянные времени этих звеньев зависят от вида (положительной или отрицательной) обратной связи и постоянной времени τ (см. формулу (5.43)) дифференцирующего контура в обратной цепи. Благодаря этому возникают широкие возможности изменения частотных характеристик эквивалентного звена в желаемом направлении.

Коэффициент усиления эквивалентной схемы в данном случае не изменяется относительно коэффициента усиления апериодического звена, поскольку выполняется условие (5.39): $n = 1$, $v = 0$, $n > v$.

В качестве примера определим, как изменяется ЛАЧХ апериодического звена в случае его охвата гибкой отрицательной обратной связью, содержащей дифференцирующий контур и постоянная времени которой $\tau > T$. В соответствии с выражением (5.42) $T_1 > \tau > T > T_2$. На рис. 5.26, б показаны ЛАЧХ апериодического звена $L_0(\omega)$, эквивалентного звена $L_{\text{оэв}}(\omega)$ и ЛАЧХ $L_{\pi}(\omega)$, равная разности $L_{\text{оэв}}(\omega)$ и $L_0(\omega)$. Из рисунка видно, что охват апериодического звена гибкой отрицательной обратной связью с дифференцирующим контуром при $\tau > T$ равносильен включению последовательно апериодическому звену интегро-дифференцирующего контура с передаточной функцией

$$K_{\pi}(p) = (\tau p + 1)(Tp + 1) / [(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)], \quad (5.44)$$

где T_1 и T_2 определяются выражением (5.43); T равна постоянной времени апериодического звена, а τ — постоянной времени дифференцирующего контура.

Охват обратной связью интегрирующего звена

Охват интегрирующего звена жесткой обратной связью. Передаточная функция $K_{\text{оэв}}(p)$ звена, эквивалентного интегрирующему звену с жесткой отрицательной обратной связью (рис. 5.27, а):

$$K_{\text{оэв}}(p) = \frac{k/p}{1 + k_{\text{о.с}}k/p} = \frac{k}{p + k_{\text{о.с}}k} = \frac{k_{\text{оэв}}}{T_{\text{оэв}}p + 1}, \quad (5.45)$$

где

$$k_{\text{оэв}} = k/k_{\text{о.с}}k; \quad T_{\text{оэв}} = 1/k_{\text{о.с}}k,$$

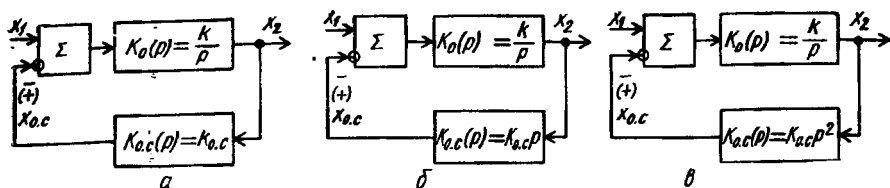


Рис. 5.27. Охват интегрирующего звена обратной связью:
 а — жесткой; б — по первой производной; в — по второй производной.

т. е. охват жесткой отрицательной обратной связью интегрирующего звена превращает последнее в апериодическое звено, что может привести к понижению порядка астатизма системы.

Охват гибкой обратной связью интегрирующего звена. Условие сохранения порядка астатизма системы. Как только что установили, при охвате жесткой обратной связью интегрирующего звена получаем эквивалентное апериодическое звено, т. е. понижается порядок астатизма системы. Это не всегда желательно. Чтобы не уменьшался порядок астатизма системы, знаменатели передаточной функции $K_{\text{о.хв}}(p)$ эквивалентной схемы и передаточной функции $K_0(p)$ охватываемых обратной связью звеньев должны иметь в качестве общего множителя оператор p в одной и той же степени. Выясним, при выполнении каких условий это требование удовлетворяется. Перепишем выражение (5.28) в явном виде относительно p :

$$K_{\text{о.хв}}(p) = \frac{K_0(p)/p^v}{1 \pm [K_0(p)/p^v] K_{\text{о.с.}}(p) p^n} = \frac{K_0(p)}{p^v [1 \pm K_0(p) K_{\text{о.с.}}(p) p^n/p^v]},$$

где $\lim_{p \rightarrow 0} K_0(p) \neq 0$, $\lim_{p \rightarrow 0} K_{\text{о.с.}}(p) \neq 0$, v — число охваченных связью интегрирующих звеньев; n — порядок производной на выходе обратной связи.

Если $n \geq v$, то

$$K_{\text{о.хв}}(p) = \frac{K_0(p)}{p^v [1 \pm K_0(p) K_{\text{о.с.}}(p) p^{n-v}]},$$

т. е. если порядок производной на выходе обратной связи равен числу охваченных обратной связью интегрирующих звеньев или выше его, то порядок астатизма системы не изменяется.

Если $n < v$, то

$$K_{\text{о.хв}}(p) = \frac{K_0(p)}{p^v [1 \pm K_0(p) K_{\text{о.с.}}(p)/p^{v-n}]} = \frac{K_0(p)}{p^n [p^{v-n} \pm K_0(p) K_{\text{о.с.}}(p)]},$$

т. е. порядок астатизма уменьшается и становится равным порядку производной, вырабатываемой дифференцирующим устройством в цепи обратной связи.

Таким образом, чтобы при охвате обратной связи интегрирующих звеньев не понижался порядок астатизма системы, необходимо выпол-

$$n \geq v. \quad (5.46)$$

Если охватить обратной связью интегрирующее звено (или соединение звеньев, содержащее интегрирующее звено), то для сохранения порядка астатизма системы следует в цепь обратной связи включить дифференциатор, дающий производную не ниже первого порядка.

Рассмотрим влияние гибкой обратной связи на передаточную функцию охваченного ею интегрирующего звена.

Передаточная функция $K_{\text{охв}}(p)$ звена, эквивалентного интегрирующему звену, охваченному *гибкой обратной связью по первой производной* (рис. 5.27, б), в соответствии с формулой (5.28), имеет вид

$$K_{\text{охв}}(p) = \frac{k/p}{1 \pm (k/p) k_{\text{о.с}} p} = \frac{k}{(1 \pm k k_{\text{о.с}}) p} = \frac{k_{\text{охв}}}{p}, \quad (5.47)$$

где $k_{\text{охв}} = k/(1 \pm k k_{\text{о.с}})$ — коэффициент усиления эквивалентного звена.

Из выражения (5.47) видно, что при охвате интегрирующего звена ($v = 1$) обратной связью по первой производной ($n = 1$) астатизм системы, как и следовало ожидать, не изменяется, так как выполняется условие (5.46). Коэффициент усиления звена при отрицательной обратной связи уменьшается, а при положительной — увеличивается. Изменение коэффициента усиления с введением обратной связи объясняется тем, что в рассматриваемом случае не выполняется условие (5.39).

Таким образом, охват интегрирующего звена обратной связью по первой производной равносителен включению последовательно интегрирующему звену пропорционального звена с коэффициентом усиления $1/(1 \pm k k_{\text{о.с}})$.

При охвате интегрирующего звена *гибкой обратной связью по второй производной* (рис. 5.27, в) передаточная функция

$$K_{\text{охв}}(p) = \frac{k/p}{1 + (k/p) k_{\text{о.с}} p^2} = \frac{k}{p(1 + k k_{\text{о.с}} p)} = \frac{k}{p(1 + T_{\text{охв}} p)},$$

где $T_{\text{охв}} = k_{\text{о.с}} k$, т. е. порядок астатизма системы и коэффициент усиления звена не изменяется, так как выполняются условия (5.39) и (5.46), но появляются дополнительный множитель $(1 + T_{\text{охв}} p)$ в знаменателе передаточной функции эквивалентного звена. Поэтому охват интегрирующего звена обратной связью по второй производной равносителен включению последовательно интегрирующему звену апериодического звена.

Следовательно, охват интегрирующего звена той или иной обратной связью не дает желаемого корректирующего эффекта. Поэтому, как правило, охватывают не одно интегрирующее звено, а последовательное соединение интегрирующего и какого-либо другого, например апериодического звена, представляющее в конструктивном отношении единый элемент системы. Охват обратной связью последовательного соединения апериодического и интегрирующего звеньев рассмотрим на конкретном примере.

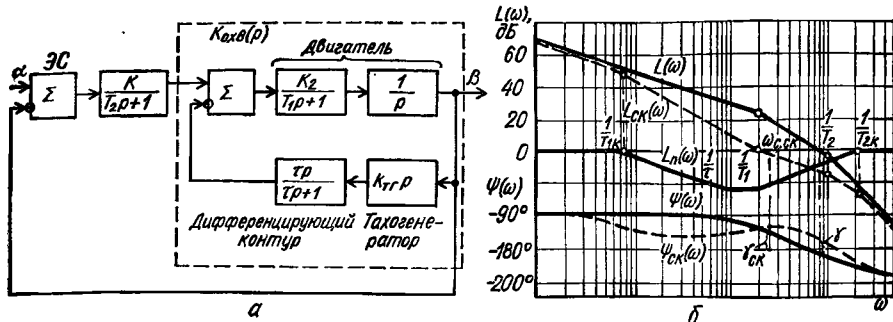


Рис. 5.28. К коррекции следящей системы путем охвата аperiodического и интегрирующего звеньев гибкой обратной связью по второй производной:

а — структурная схема следящей системы; б — ЛЧХ следящей системы.

Пример коррекции следящей системы с помощью обратной связи. Рассмотрим коррекцию с помощью обратной связи следящей системы, состоящей из двух аperiodических и интегрирующего звеньев (рис. 5.28, а) с передаточной функцией

$$K_p(j\omega) = k_1 k_2 / [(T_1 j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1)], \quad T_1 > T_2.$$

ЛАЧХ и ЛФЧХ исходной системы на рис. 5.28, б обозначены $L(\omega)$ и $\psi(\omega)$ соответственно. Как видно из рисунка, система неустойчива.

Предположим, что гибкая отрицательная обратная связь по второй производной $K_{o.c}(j\omega) = \tau_{o.c}(j\omega)^2 / (\tau j\omega + 1)$, ($\tau_{o.c} = k_{\tau\tau}$) охватывает аperiodическое и интегрирующее звенья (двигатель системы), как показано на рис. 5.28, а, причем выбрано $\tau > T_1$. Передаточная функция $K_{o.c}(j\omega)$ участка системы, охваченного обратной связью, в соответствии с формулой (5.28):

$$K_{o.c}(j\omega) = \frac{k_2 / (T_1 j\omega + 1) j\omega}{1 + [k_2 / (T_1 j\omega + 1) j\omega] \tau_{o.c} (j\omega)^2 / (\tau j\omega + 1)} = \\ = k_2 (\tau j\omega + 1) / [\tau T_1 (j\omega)^2 + (T_1 + \tau + k_2 \tau_{o.c}) j\omega + 1], \quad (5.48)$$

или после разложения знаменателя на множители *

$$K_{o.c}(j\omega) = k_2 (\tau j\omega + 1) / [(T_{1k} j\omega + 1)(T_{2k} j\omega + 1) j\omega], \quad (5.49)$$

где T_{1k} и T_{2k} находятся из системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} T_{1k} T_{2k} &= T_1 \tau; \\ T_{1k} + T_{2k} &= T_1 + \tau + k_2 \tau_{o.c}. \end{aligned} \right\} \quad (5.50)$$

полученной путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях $j\omega$ знаменателей выражений (5.48) и (5.49).

В рассматриваемом случае ($\tau > T_1$) выполняется неравенство

$$T_{1k} > \tau > T_1' > T_{2k}. \quad (5.51)$$

Передаточная функция системы с местной обратной связью

$$K_{p.c.k}(j\omega) = \frac{k_1}{T_2 j\omega + 1} K_{o.c}(j\omega) = \frac{k_1 k_2 (\tau j\omega + 1)}{(T_{1k} j\omega + 1)(T_{2k} j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1) j\omega}. \quad (5.52)$$

* Такое разложение возможно при действительных корнях знаменателя. Если знаменатель выражения (5.48) не разлагается на простые сомножители, то построение ЛАЧХ скорректированной системы можно выполнять по коэффициентам передаточной функции (см. п. 2.8).

Коэффициент усиления и порядок астатизма системы при охвате аperiodического и интегрирующего звеньев обратной связью по второй производной, как и следовало ожидать, не изменились, так как выполняются условия (5.39) и (5.46): $n = 2$, $v = 1$, $n > v$.

Постоянная времени $T_{2к}$ путем выбора параметров обратной связи может быть сделана в зависимости от необходимости, меньше, чем постоянная T_2 или несколько больше ее.

ЛЧХ скорректированной системы, построенные на основании выражения (5.52) и при учете (5.51), изображены на рис. 5.28, б графиками $L_{ск}(\omega)$ и $\psi_{ск}(\omega)$. Из рисунка видно, что охват обратной связью по второй производной аperiodического и интегрирующего звеньев сделал систему устойчивой при заданном большом коэффициенте усиления.

Изменения ЛЧХ системы, достигнутые с помощью обратной связи, можно было бы получить и с помощью последовательного интегро-дифференцирующего контура. Действительно, ЛАЧХ $L_{п}(\omega)$, полученная вычитанием $L(\omega)$ из $L_{ск}(\omega)$, является ЛАЧХ интегро-дифференцирующего контура. Постоянные времена $T_{1к}$, τ и $T_{2к}$, входящие в передаточную функцию эквивалентной схемы, выбираются из тех же соображений, что и постоянные времена интегро-дифференцирующего контура при последовательной коррекции.

Если бы в данном примере постоянная времени T_2 аperiodического звена, соответствующего усилителю, была больше постоянной времени T_1 двигателя, то тот же корректирующий эффект можно было бы получить более простым путем — охватом обратной связью только по первой производной одного аperiodического звена усилителя.

Графический метод анализа САУ, скорректированных с помощью параллельных корректирующих устройств

Рассмотренный аналитический метод позволяет просто решать задачу определения передаточной функции и построения ЛАЧХ системы, скорректированной обратной связью, лишь в случаях, когда сравнительно простой обратной связью охватывается одно, в крайнем случае, два звена системы. В более сложных случаях коррекции можно применить графический метод анализа системы с местной обратной связью. Этот метод позволяет строить ЛАЧХ системы непосредственно по ее алгоритмической схеме, затем по ЛАЧХ определяется передаточная функция системы. Ограничением метода является то, что он может быть применен для построения ЛАЧХ систем только с отрицательными местными обратными связями.

Рассмотрим графический метод построения ЛЧХ систем, скорректированных с помощью обратных связей [17]. КДФ системы, участок которой охвачен отрицательной обратной связью (рис. 5.29), определяется выражением

$$K_{р.ск}(j\omega) = \frac{K_n(j\omega) K_o(j\omega)}{1 + K_o(j\omega) K_{о.с}(j\omega)} = K_{н.ск}(j\omega) K_n(j\omega),$$

где $K_{н.ск}(j\omega) = K_n(j\omega) K_o(j\omega)$ — передаточная функция нескорректированной системы;

$$K_n(j\omega) = 1/[1 + K_o(j\omega) K_{о.с}(j\omega)] — \quad (5.53)$$

передаточная функция последовательного звена, эквивалентного по своему влиянию введению обратной связи.

ЛАЧХ скорректированной системы определяется выражением $L_{ск}(\omega) = L_{н.ск}(\omega) + L_n(\omega)$, т. е. ЛАЧХ $L_{ск}(\omega)$ может быть построе-

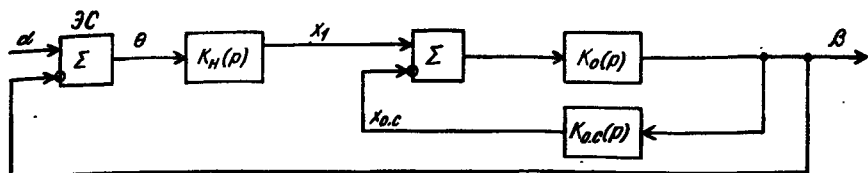


Рис. 5.29. Структурная схема системы, скорректированной с помощью обратной связи.

на сложением ординат ЛАЧХ $L_{н.ск}(\omega)$ нескорректированной системы и ЛАЧХ $L_{п}(\omega)$ эквивалентного последовательного звена. Построение ЛАЧХ $L_{н.ск}(\omega)$ не вызывает затруднений. Поскольку выражение для $K_{п}(j\omega)$ содержит сумму в знаменателе, то построение ЛАЧХ $L_{п}(\omega)$ затруднено, поэтому ее строят по областям частот.

В областях частот, в которых $|K_0(j\omega)K_{o.c}(j\omega)| \ll 1$, или $|K'_{o.c}(j\omega)| = |1/K_0(j\omega)K_{o.c}(j\omega)| \gg 1$, или в логарифмическом масштабе $L'_{o.c}(\omega) = -L_0(\omega) - L_{o.c}(\omega) \gg 0$, выражение (5.53) принимает вид $K_{п}(j\omega) = 1$ или $L_{п}(\omega) = 0$, т. е. в областях частот, в которых вспомогательная ЛАЧХ $L'_{o.c}(\omega) \gg 0$, ЛАЧХ $L_{п}(\omega)$ совпадает с осью 0 дБ.

В областях частот, в которых $|K_0(j\omega)K_{o.c}(j\omega)| \gg 1$, или $|K'_{o.c}(j\omega)| = |1/K_0(j\omega)K_{o.c}(j\omega)| \ll 1$, или в логарифмическом масштабе $L'_{o.c}(\omega) = -L_0(\omega) - L_{o.c}(\omega) \ll 0$, выражение (5.53) примет вид $K_{п}(j\omega) = 1/K_0(j\omega)K_{o.c}(j\omega)$, т. е. в областях частот, в которых $L'_{o.c}(\omega) \ll 0$, ЛАЧХ $L_{п}(\omega)$ совпадает с ЛАЧХ $L'_{o.c}(\omega)$.

Построив ЛАЧХ нескорректированной системы $L_{н.ск}(\omega)$ и сложив ее с ЛАЧХ $L_{п}(\omega)$, получаем ЛАЧХ скорректированной системы $L_{ск}(\omega)$.

Пример 1. Построить ЛАЧХ следящей системы (рис. 5.30, а), скорректированной охватом гибкой отрицательной обратной связью по второй производной двух апериодических и одного интегрирующего звеньев.

Удобно принять следующую методнку построения

1. Определяем КПФ нескорректированной системы

$$K_{н.ск}(j\omega) = K_{н}(j\omega) K_0(j\omega) = k_p / (T_3 j\omega + 1) (T_2 j\omega + 1) (T_1 j\omega + 1) j\omega,$$

где $k_p = k_3 k_2 k_1$; $T_1 > T_2 > T_3$, и в соответствии с этим выражением строим ЛАЧХ $L_{н.ск}(\omega)$ нескорректированной системы (рис. 5.30, б).

2. Определяем

$$K'_{o.c}(j\omega) = \frac{1}{K_0(j\omega) K_{o.c}(j\omega)} = \frac{1}{|k_1 k_2 / (T_2 j\omega + 1) j\omega (T_1 j\omega + 1)| k_{т\tau} \tau (j\omega)^2 / (\tau j\omega + 1)} = \\ = k_{o.c} (T_2 j\omega + 1) (T_1 j\omega + 1) (\tau j\omega + 1) / j\omega,$$

где $k_{o.c} = 1/k_1 k_2 k_{т\tau} \tau$, и строим ЛАЧХ $L'_{o.c}(\omega)$ в соответствии с этим выражением (рис. 5.30, б). Отмечаем частоты пересечения $L'_{o.c}(\omega)$ с осью 0 дБ ω_1 и ω_2 , которые являются частотами сопряжения ЛАЧХ $L_{п}(\omega)$.

3. Строим ЛАЧХ $L_{п}(\omega)$. В областях частот $\omega < \omega_1$ и $\omega > \omega_2$, где $L'_{o.c}(\omega) \gg 0$, $L_{п}(\omega)$ совпадает с осью 0 дБ (рис. 5.30, б, отрезки *аб* и *вж*). В области же частот $\omega_1 < \omega < \omega_2$, где $L'_{o.c}(\omega) \ll 0$, $L_{п}(\omega)$ совпадает с ЛАЧХ $L'_{o.c}(\omega)$ (рис. 5.30, б, ломаная *бвгде*). Полная ЛАЧХ $L_{п}(\omega)$ на рис. 5.30, б изображена пунктирной ломаной.

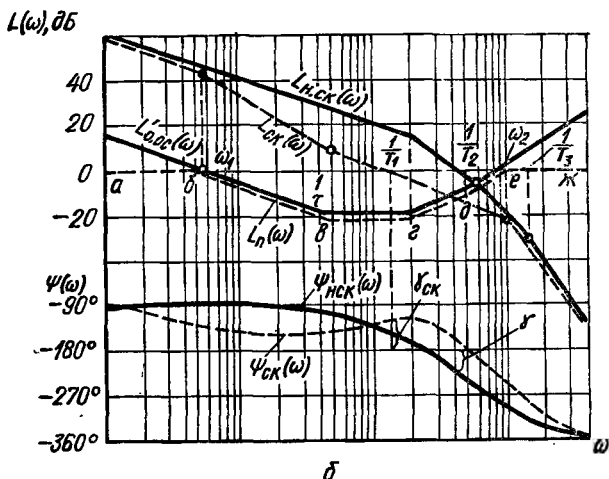
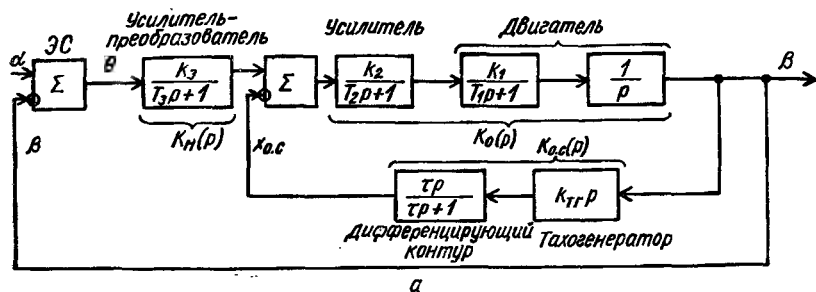


Рис. 5.30. К примеру построения ЛЧХ следящей системы, скорректированной обратной связью:

а — структурная схема системы; б — построение ЛЧХ системы.

4. Сложением $L_{н.ск}(\omega)$ и $L_{п}(\omega)$ получаем ЛАЧХ скорректированной системы $L_{ск}(\omega)$.

5. Из построенной ЛАЧХ $L_{ск}(\omega)$ скорректированной системы определяем ее передаточную функцию

$$K_{р.ск}(j\omega) = \frac{k_{р.ск}(\tau j\omega + 1)}{(T_{1к}j\omega + 1)(T_{2к}j\omega + 1)^2(T_{3к}j\omega + 1)j\omega}, \quad (5.54)$$

где постоянные времени $T_{1к} = 1/\omega_1$ и $T_{2к} = 1/\omega_2$ находятся из ЛАЧХ системы, $k_{р.ск} = k_p = k_1 k_2 k_3$.

6. В соответствии с выражением (5.54) для $K_{р.ск}(j\omega)$ записываем формулу для ФЧХ скорректированной системы:

$$\psi_{ск}(\omega) = -90^\circ - \arctg \omega T_{1к} + \arctg \omega \tau - 2 \arctg \omega T_{2к} - \arctg \omega T_{3к}$$

и по ней строим ее ЛФЧХ $\psi_{ск}(\omega)$. Для сравнения на рис. 5.30, б кривой $\psi(\omega)$ изображена ЛФЧХ нескорректированной системы.

Из сравнения ЛЧХ исходной и скорректированной системы видно, что введение местной отрицательной обратной связи делает систему устойчивой с необходимым запасом устойчивости. Как видно из рис. 5.30, б, охват гибкой обратной связью по второй производной двух апериодических и интегрирующего звеньев равносильно последовательному включению в систему контура интегро-дифференцирующего типа,

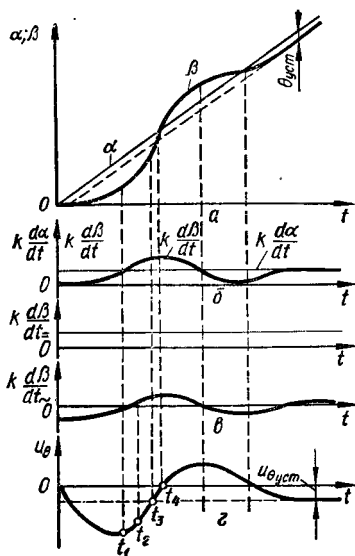


Рис. 5.32. К пояснению физического смысла введения обратной связи по первой производной.

В момент времени t_4 , когда ошибка по положению $\theta = 0$, двигатель, имевший до этого большую частоту вращения, чем заданная, по инерции проходит состояние равновесия. В этот момент времени за счет $k d\beta/dt$ к двигателю подается напряжение противоположного знака, которое создаст тормозящий момент и тем самым уменьшает величину перегулирования. С момента t_4 , когда возникает ошибка по положению противоположного знака, переменная составляющая первой производной, складываясь с u_0 , обеспечивает наиболее эффективное уменьшение этой ошибки. Таким образом, переменная составляющая первой производной управляемой величины, введенной в систему через обратную связь, аналогично первой производной сигнала рассогласования способствует уменьшению перегулирования и более быстрому затуханию переходного процесса.

Постоянная составляющая первой производной выходной величины системы $k d\beta/dt$, пропорциональная установившемуся значению производной, действует как в переходном, так и в установившемся режиме равномерного вращения ведущего вала. Имея противоположную полярность с напряжением сигнала рассогласования, она уменьшает постоянную составляющую (или в установившемся режиме — установившееся значение) напряжения подаваемого на двигатель, и тем самым вызывает увеличение скоростной ошибки системы. Компенсировать уменьшение усиления системы, вызванное этой постоянной составляющей, как и в случае включения последовательного дифференцирующего фазопережающего контура с затуханием, можно путем соответствующего увеличения коэффициента усиления других элементов системы.

Как отмечалось, в рассматриваемой следящей системе для получения напряжения, пропорционального частоте вращения исполнительного двигателя, применяется тахогенератор постоянного тока. Однако у этих тахогенераторов сравнительно высокий момент трения, образуемый за счет давления щеток на коллектор; при маломощных исполнительных двигателях, когда момент трения тахогенератора превышает 5...10 % номинального момента исполнительного двигателя, применение тахогенератора для коррекции нецелесообразно. Тахогенераторы постоянного тока создают высокочастотные помехи. Поэтому в системах, где имеются усилители переменного тока, целесообразно применять тахогенератор переменного тока. В качестве последнего обычно используется двухфазный асинхронный двигатель, работающий в режиме генератора (рис. 5.33): обмотка возбуждения его питается от сети переменного тока, а с

усилителя вычитается из напряжения сигнала ошибки u_0 (являющегося сигналом управления) системы. Напряжение u_0 , пропорциональное отклонению θ управляемой величины β относительно заданного значения α (рис. 5.32, а), изображено на рис. 5.32, г.

Как видно из рис. 5.32, в, г, в начальный промежуток времени (от $t = 0$ до $t = t_1$), когда осуществляется разгон двигателя до заданной частоты, напряжение сигнала ошибки u_0 и переменная составляющая первой производной $k d\beta/dt$ складываются и двигатель набирает требуемую частоту и отрабатывает ошибку рассогласования по углу быстрее, чем без обратной связи. В промежуток времени, когда сигнал рассогласования θ уменьшается (например, от момента времени t_2 до t_4), а двигатель имеет большую частоту вращения, чем заданная, с целью предотвращения большого перегулирования желательнее уменьшение напряжения, подаваемого на двигатель. Такое уменьшение обеспечивается переменной составляющей первой производной управляемой величины $k d\beta/dt$, так как в рассматриваемом промежутке времени эта составляющая имеет противоположную полярность относительно напряжения сигнала рассогласования.

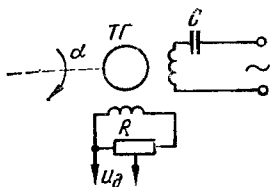


Рис. 5.33. Схема тахогенератора переменного тока.

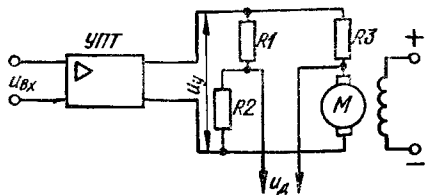


Рис. 5.34. Схема тахометрического моста постоянного тока для выработки напряжения, пропорционального частоте вращения исполнительного двигателя.

обмотки управления снимается напряжение переменного тока частоты сети, огибающая которого пропорциональна частоте вращения ротора. Фаза этого напряжения с изменением направления вращения изменяется на 180° .

Чтобы с выхода тахогенератора получить напряжение, совпадающее или находящееся в противофазе с напряжением сети, в цепь обмотки возбуждения включается емкость C , которая создает сдвиг по фазе на 90° между напряжением сети и напряжением на обмотке возбуждения.

Тахогенератор переменного тока не создает высокочастотных помех и имеет меньший по сравнению с тахогенератором постоянного тока момент трения. Однако фаза выходного напряжения зависит в некоторой степени от частоты вращения. Недостатком применения тахогенераторов как постоянного, так и переменного тока для коррекции, в особенности маломощных САУ, является то, что тахогенератор, будучи соизмерим по своим габаритным размерам с исполнительным двигателем, существенно увеличивает постоянную времени апериодического звена, которым представляют исполнительный двигатель с учетом момента инерции тахогенератора.

Напряжение, пропорциональное первой производной от угла поворота приемного вала, можно получить и без тахогенератора с помощью так называемого тахометрического моста. Схема такого моста для получения напряжения постоянного тока, пропорционального частоте вращения n исполнительного двигателя постоянного тока, изображена на рис. 5.34. Мост образуют резисторы R_1 , R_2 , R_3 и сопротивление якоря двигателя. Когда двигатель неподвижен, мост уравновешен и напряжение U_d , снимаемое с диагонали моста, равно нулю. При вращении двигателя возникает противо-э. д. с., сопротивление двигателя увеличивается, мост разбалансируется. Выходное напряжение моста при соответствующем выборе его параметров пропорционально частоте вращения двигателя.

Схема тахометрического моста для случая применения в системе двухфазного асинхронного двигателя M переменного тока изображена на рис. 5.35, а. Мост состоит из резисторов R_1 , R_2 , R_3 , конденсатора C_2 и полного сопротивления обмотки управления OU двигателя. Выходное напряжение, снимаемое с диагонали моста, пропорционально частоте вращения двигателя. Выходное напряжение моста сдвинуто по фазе относительно выходного напряжения усилителя. Компенсация этого сдвига осуществляется с помощью фазосдвигающей цепочки R_4 , C_4 , причем $R_4 \gg R_2 + R_3$.

Если усилитель имеет трансформаторный выход, для получения напряжения, пропорционального частоте вращения двигателя, удобнее применить схему, изображенную на рис. 5.35, б.

Недостатком коррекции САУ с помощью охвата обратной связью по первой производной участка системы с интегрирующим звеном, как отмечалось, является уменьшение коэффициента усиления системы, а следовательно, увеличение ее скоростной ошибки. С физической точки зрения это объясняется тем, что выходное напряжение тахогенератора (тахометрического моста), которое вычитается из сигнала управления, не равно нулю не только в режиме переходного процесса, но и в установившемся режиме вращения с постоянной частотой (обратная связь действует как в переходном, так и в установившемся режиме).

Один из возможных вариантов схемы коррекции с помощью обратной связи по второй производной, охватывающей участок системы с интегрирующим звеном, где

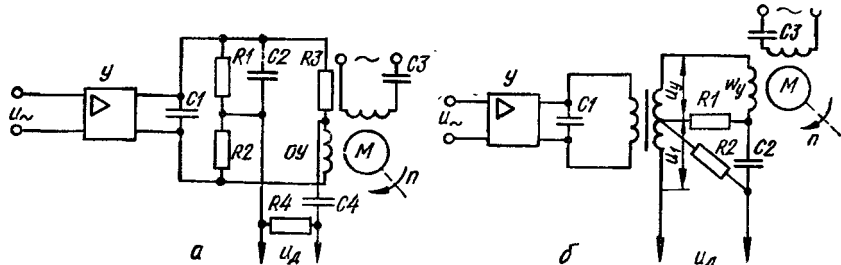
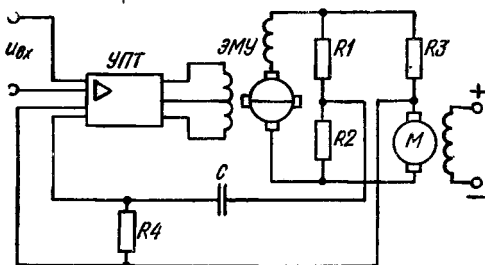


Рис. 5.35. Схемы тахометрических мостов переменного тока.

Рис. 36. Пример коррекции следящей системы с помощью обратной связи по второй производной.



отмеченный недостаток устраняется, изображен на рис. 5.36. Здесь в отличие от схемы рис. 5.31 напряжение u_d , пропорциональное первой производной угла поворота приемного вала (выходное напряжение тахометрического моста), поступает не непосредственно на вход усилителя, а через дифференцирующий RC -контур. Благодаря этому обратная связь оказывает влияние на работу системы только во время переходного процесса. В режиме же установившегося равномерного движения выходное напряжение обратной связи равно нулю. Поэтому обратная связь, улучшая кривую переходного процесса, не увеличивает установившуюся скоростную ошибку системы.

Сравнительная оценка коррекции САУ с помощью последовательных и параллельных корректирующих устройств

Необходимое изменение динамических свойств САУ может быть осуществлено как включением последовательных корректирующих устройств, так и охватом некоторых звеньев системы местной обратной связью (с помощью параллельных корректирующих устройств).

Во многих случаях последовательные корректирующие устройства могут быть осуществлены в виде простых пассивных RC — контуров, реализованы на операционных усилителях или цифровых элементах. В простоте последовательных корректирующих устройств состоит их достоинство.

Недостатком последовательной коррекции является то, что эффект коррекции уменьшается в процессе эксплуатации при изменении параметров (коэффициента усиления, постоянных времени) последовательно соединенных элементов системы. Поэтому при последовательной коррекции к стабильности элементов предъявляются обычно повышенные требования.

Коррекция с помощью обратных связей имеет следующие достоинства:

1) уменьшается зависимость показателей качества системы от изменения параметров ее элементов, поскольку в существенном диапазоне частот передаточная функция участка системы, охваченного обратной связью, определяется обратной величиной передаточной функции параллельного корректирующего устройства $K_{\text{о.с.}}(j\omega) \approx 1/K_{\text{о.с.}}(j\omega)$. Поэтому требования к элементам системы могут быть менее жесткими, чем при последовательной коррекции;

2) нелинейные характеристики элементов, охваченных обратной связью, «линеаризуются», так как передаточные свойства охваченного участка системы определяются параметрами контура в цепи обратной связи;

3) питание параллельного корректирующего устройства даже в том случае, когда оно требует большой мощности, не вызывает затруднений, так как обратные связи обычно начинаются от конечных звеньев системы с мощным выходом;

4) параллельное корректирующее устройство работает при меньшем уровне помех, чем последовательное, так как сигнал, поступающий на него, проходит через всю систему, являющуюся хорошим фильтром нижних частот. Благодаря этому эффективность действия параллельного корректирующего устройства при наложении помех на сигнал ошибки снижается в меньшей степени, чем последовательного.

Коррекции с помощью обратной связи присущи и недостатки: параллельные корректирующие устройства часто представляют собой дорогие или громоздкие элементы (например, тахогенераторы, дифференцирующие трансформаторы); контур, образованный местной обратной связью, может оказаться сам по себе неустойчивым.

Последовательная коррекция в основном применяется в маломощных системах. Это объясняется, с одной стороны, простотой последовательных корректирующих устройств, а с другой, нецелесообразностью применения в этих системах громоздких, соизмеримых с размерами исполнительного двигателя, параллельных корректирующих устройств (например, тахогенератора). Коррекцию более мощных систем чаще всего осуществляют с помощью параллельных корректирующих устройств. Иногда для достижения необходимых показателей качества системы сочетается коррекция как с помощью последовательных, так и параллельных устройств.

Инвариантность комбинированных систем автоматического управления

6.1. Сравнение способов повышения точности систем автоматического управления

Одной из основных проблем современной теории автоматического управления является проблема повышения точности САУ. О точности системы автоматического управления можно судить по решению ее уравнения, составленного относительно ошибки. Уравнение для ошибки $\theta(t)$ системы, к которой приложены задающие $\alpha(t)$ и возмущающее $L(t)$ воздействия (см., например, уравнение (2.57) применительно к системе рис. 2.9) имеет вид

$$F(p)\theta(t) = M(p)\alpha(t) + B(p)L(t), \quad (6.1)$$

где $F(p)$, $M(p)$, $B(p)$ — соответствующие операторные полиномы. Полное решение уравнения (6.1) (ошибку системы) можно представить в виде суммы переходной $\theta_n(t)$ и вынужденной $\theta_b(t)$ составляющих $\theta(t) = \theta_n(t) + \theta_b(t)$. Переходная составляющая представляет собой решение однородного уравнения системы $F(p)\theta_n(t) = 0$. Она имеет место в переходном режиме и зависит от параметров системы и начальных условий. Последние, в свою очередь, зависят от характера изменения воздействий $\alpha(t)$ и $L(t)$. Из-за переходной составляющей ошибки $\theta_n(t)$ управляемая величина системы в переходном процессе может заметно отклоняться от требуемого значения.

Вынужденная составляющая ошибки $\theta_b(t)$ в рассматриваемом случае имеет две компоненты $\theta_b(t) = \theta_{b\alpha}(t) + \theta_{bL}(t)$, которые определяются как частные решения уравнений:

$$F(p)\theta_{b\alpha}(t) = M(p)\alpha(t);$$

$$F(p)\theta_{bL}(t) = B(p)L(t).$$

Вынужденные составляющие $\theta_{b\alpha}(t)$ и $\theta_{bL}(t)$ соответствуют ошибкам системы в установившемся режиме. Составляющая $\theta_{b\alpha}(t)$ возникает при изменении $\alpha(t)$, а $\theta_{bL}(t)$ вызывается возмущающим воздействием $L(t)$.

Основное требование, предъявляемое к САУ, состоит в том, чтобы отклонение управляемой величины от требуемого значения как в переходном, так и в установившемся режимах работы были возможно малы. Чем полнее в системе скомпенсировано влияние возмущающих воздействий и точнее воспроизводится задающее воздействие, тем совершеннее система. В компенсации влияния возмущающих воздействий на управляемую величину, в достижении ее независимости от возмущений и обеспечении возможно точного воспроизведения задающего воздействия и заключается физическая сущность задачи управления.

Напомним уже известные способы уменьшения вынужденной и переходной составляющих ошибки. Вынужденная (установившаяся) со-

ставляющая ошибки в САУ с принципом управления по отклонению может быть уменьшена за счет *увеличения коэффициента усиления системы* в разомкнутом состоянии k_p . Это видно, например, из формулы (2.75) для скоростной ошибки системы. Однако этим методом в замкнутых одноконтурных системах, как правило, не удастся получить значительного уменьшения установившейся ошибки, так как с увеличением k_p уменьшается запас устойчивости системы (см. рис. 5.3), переходный процесс становится слабозатухающим, т. е. увеличивается переходная составляющая ошибки. Таким образом, в системах с управлением по отклонению имеется противоречие между условиями повышения точности в установившемся и переходном режимах. Из-за этого при выборе k_p приходится принимать компромиссное решение, обеспечивающее допустимое значение установившейся ошибки и удовлетворительный переходный процесс [25].

Определенного уменьшения установившейся и переходной составляющих ошибки можно достичь с помощью различных *корректирующих устройств*. Однако последние также не снимают необходимости в компромиссной настройке системы.

В работе [44] предложен *метод достижения больших значений коэффициента усиления k_p системы при сохранении ее устойчивости*. Он состоит в том, что для стабилизации неустойчивой системы, имеющей большой коэффициент усиления, охватывают звено с большим k гибкой отрицательной обратной связью. Этот метод, как показано в работе [18], эквивалентен коррекции системы с помощью разновидности последовательного интегро-дифференцирующего контура. Поэтому повышение k_p при этом связано (см. рис. 5.15) с введением в систему большой постоянной времени, а следовательно, с увеличением инерционности системы и ухудшением ее переходного процесса.

Эффективным средством уменьшения и устранения вынужденных составляющих ошибок является *увеличение порядка астатизма системы*. Например, скоростную ошибку можно сделать равной нулю, если выполнить систему с астатизмом второго порядка. Для устранения установившейся ошибки, вызываемой ускорением задающего воздействия, необходимо построить систему с астатизмом третьего порядка. В замкнутых системах повышение порядка астатизма достигается включением интегрирующих звеньев, каждое из которых вносит запаздывание колебаний по фазе, равное 90° . Поэтому при увеличении порядка астатизма в замкнутых системах уменьшается запас устойчивости, ухудшается переходный процесс и возможна потеря устойчивости системы. Таким образом, и при данном методе повышения точности проявляется противоречие между условиями повышения точности в установившемся и переходном режимах. Другие способы повышения порядка астатизма (например, применение неединичной обратной связи) также обладают определенными недостатками.

Затруднения, встречающиеся при решении задачи повышения точности САУ, устраняются в случае применения принципа комбинированного управления, т. е. сочетания принципа управления по отклонению и принципа управления по возмущению. В комбинированных системах, как показано ниже, отсутствует противоречие между усло-

виями уменьшения вынужденной и переходной составляющих ошибки. Применение управления по возмущению в комбинированных системах позволяет резко уменьшить вынужденную и переходную составляющие ошибки, вызываемые основным возмущающим (задающим) воздействием, а при некоторых условиях эти составляющие ошибки могут быть полностью компенсированы [18, 25, 37, 54]. Математической основой построения высококачественных комбинированных систем автоматического управления и регулирования, в которых может быть достигнута независимость (инвариантность) управляемой величины от возмущающего воздействия и точное воспроизведение задающего воздействия, является *теория инвариантности*.

В комбинированных системах возможно устранение ошибок благодаря полной компенсации факторов, вызывающих ошибки. Условие компенсации этих факторов было впервые сформулировано проф. Г. В. Щипановым [80]. Математические вопросы инвариантности были разработаны Н. Н. Лузиным и П. И. Кузнецовым в 1945—1946 гг. В этих работах были даны общие условия инвариантности с точностью до ϵ . В. С. Кулебакиным, А. Г. Ивахненко, Б. Н. Петровым, А. И. Кухтенко, Г. М. Улановым, А. Ю. Ишлинским и другими советскими учеными показана осуществимость принципов инвариантности в реальных, автоматически действующих системах, в частности в комбинированных системах автоматического управления. Исследованию инвариантности нелинейных систем посвящены работы В. В. Павлова. Многомерные комбинированные системы рассмотрены П. И. Чинаевым, а импульсные комбинированные системы — В. М. Кунцевичем. Анализ и синтезу систем с комбинированным управлением посвящены работы В. И. Костюка, В. Г. Терскова, Н. И. Соколова, Б. М. Менского, В. К. Стеклова и других советских ученых.

6.2. Условие абсолютной инвариантности ошибки относительно возмущающего воздействия и возможность его реализации в комбинированных САУ

Задача компенсации влияния возмущающего воздействия $L(t)$ на управляемую величину $\beta(t)$ или, что то же самое, на ошибку $\theta(t)$ системы (см. рис. 2.9) возникает как в следящих системах, так и в системах стабилизации. Для упрощения анализа влияния $L(t)$ на $\theta(t)$ примем $\alpha(t) = 0$. Тогда уравнение (6.1) будет иметь вид

$$F(p) \theta_L(t) = B(p) L(t). \quad (6.2)$$

Из этого уравнения видно, что если выполняется условие

$$B(p) = 0, \quad (6.3)$$

то $\theta_L(t) = 0$ и не зависит от изменения $L(t)$. Условие (6.3) является *условием абсолютной инвариантности (независимости) ошибки системы относительно возмущающего воздействия $L(t)$* .

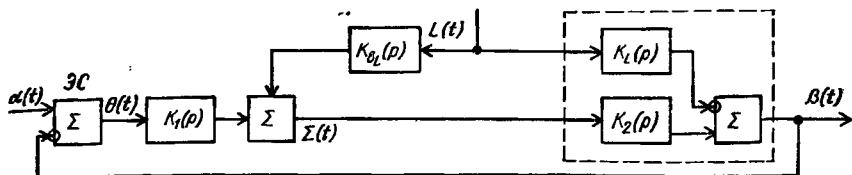


Рис. 6.1. Структурная схема комбинированной САУ со связью по возмущению.

В гл. 1 было показано, что в одноконтурных системах с принципом управления по отклонению, управляющее воздействие в которых формируется из ошибки, абсолютная инвариантность ошибки $\theta_L(t)$ относительно возмущающего воздействия $L(t)$ недостижима. Исследуем относительно абсолютной инвариантности (6.3) в комбинированных системах.

Комбинированная система автоматического управления (см. рис. 1.11, а) отличается наличием связи по возмущению СВ. Передаточная функция этой связи на структурной схеме системы (рис. 6.1) обозначена $K_{\text{вЛ}}(p)$. В соответствии со схемой системы уравнения ее элементов имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \theta(p) &= \alpha(p) - \beta(p); \\ \Sigma(p) &= K_1(p) \theta(p) + K_{\text{вЛ}}(p) L(p); \\ \beta(p) &= K_2(p) \Sigma(p) - K_L(p) L(p). \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

Из этих уравнений исключением промежуточных переменных $\beta(p)$ и $\Sigma(p)$ находим уравнение системы для ошибки

$$\alpha(p) - \theta(p) = K_2(p) [K_1(p) \theta(p) + K_{\text{вЛ}}(p) L(p)] - K_L(p) L(p) \quad (6.5)$$

или

$$[1 + K_1(p) K_2(p)] \theta(p) = \alpha(p) + [K_L(p) - K_2(p) K_{\text{вЛ}}(p)] L(p). \quad (6.6)$$

Принимая $\alpha(p) = 0$, имеем

$$[1 + K_1(p) K_2(p)] \theta_L(p) = [K_L(p) - K_2(p) K_{\text{вЛ}}(p)] L(p), \quad (6.7)$$

или, подставив в формулу (6.7) значения $K_i(p) = D_i(p)/F_i(p)$ ($i = 1, 2, L, \text{вЛ}$), получаем уравнение системы для ошибки в следующей форме:

$$\begin{aligned} [F_1(p) F_2(p) + D_1(p) D_2(p)] F_L(p) F_{\text{вЛ}}(p) \theta_L(p) = \\ = [F_2(p) D_L(p) F_{\text{вЛ}}(p) - D_2(p) D_{\text{вЛ}}(p) F_L(p)] F_1(p) L(p). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Условие абсолютной инвариантности системы

$$K_L(p) - K_2(p) K_{\text{вЛ}}(p) = 0 \quad (6.9)$$

или

$$M(p) = [F_2(p) D_L(p) F_{\text{вЛ}}(p) - D_2(p) F_L(p) D_{\text{вЛ}}(p)] F_1(p) = 0.$$

Если учесть, что $F_1(p) \neq 0$, то условие инвариантности примет вид

$$F_2(p) D_L(p) F_{\text{вЛ}}(p) - D_2(p) F_L(p) D_{\text{вЛ}}(p) = 0. \quad (6.10)$$

Из формулы (6.10) видно, что левая часть условия инвариантности представляет собой разность. Поэтому, если имеется возможность выбора полиномов числителя $D_{\text{вЛ}}(p)$ и знаменателя $F_{\text{вЛ}}(p)$ передаточной функции $K_{\text{вЛ}}(p)$ связи по возмущению, то эту разность можно сделать равной нулю, т. е. добиться абсолютной инвариантности. В соответствии с условием (6.10) передаточная функция $K_{\text{вЛ}}(p)$ связи по возмущению, при которой достигается абсолютная инвариантность, должна иметь вид

$$K_{\text{вЛ}}(p) = \frac{D_{\text{вЛ}}(p)}{F_{\text{вЛ}}(p)} = \frac{F_2(p) D_L(p)}{D_2(p) F_L(p)} = \frac{K_L(p)}{K_2(p)}. \quad (6.11)$$

Исследуем возможность выбора полиномов $D_{\text{вЛ}}(p)$ и $F_{\text{вЛ}}(p)$ в соответствии с условием инвариантности (6.11) с точки зрения устойчивости системы. Из сравнения условия инвариантности (6.10) и характеристического уравнения системы

$$[F_1(p) F_2(p) + D_1(p) D_2(p)] F_L(p) F_{\text{вЛ}}(p) = 0, \quad (6.12)$$

определяющего устойчивость системы, видно, что полином $D_{\text{вЛ}}(p)$ входит только в условие инвариантности. Характеристическое же уравнение (а следовательно, устойчивость) системы не зависит от этого полинома. Поэтому полином $D_{\text{вЛ}}(p)$ можно выбирать из условия инвариантности (6.10), не заботясь при этом об устойчивости системы. Полином $F_{\text{вЛ}}(p)$ входит как в условие инвариантности (6.10), так и в характеристическое уравнение (6.12). Из характеристического полинома комбинированной системы

$$F(p) = [F_1(p) F_2(p) + D_1(p) D_2(p)] F_L(p) F_{\text{вЛ}}(p) = F_3(p) F_L(p) F_{\text{вЛ}}(p)$$

видно, что он представляет собой произведение характеристических полиномов замкнутой системы $F_3(p)$, разомкнутого канала возмущения $F_L(p)$ (как и системы до введения связи по возмущению), а также разомкнутой компенсационной связи по возмущению $F_{\text{вЛ}}(p)$. Поэтому при введении связи по возмущению повышается порядок характеристического уравнения системы. Но так как полином $F_{\text{вЛ}}(p)$ входит в характеристический полином системы в виде сомножителя, связь по возмущению не изменяет корней замкнутой части системы и тем самым не влияет на ее устойчивость, а только вносит новые корни, соответствующие характеристическому уравнению $F_{\text{вЛ}}(p) = 0$. Эти корни определяют устойчивость вводимой разомкнутой связи по возмущению. Отсюда следует, что устойчивость комбинированной системы со связью по возмущению определяется устойчивостью ее замкнутой части, разомкнутого канала возмущения и разомкнутой компенсационной связи по возмущению. Так как проблема устойчивости возникает в замкнутых системах, то с помощью полинома $F_{\text{вЛ}}(p)$, определяющего устойчивость только разомкнутой связи по возмущению, можно добиваться выполнения условия инвариантности (6.10). Таким образом, выбор полиномов $D_{\text{вЛ}}(p)$ и $F_{\text{вЛ}}(p)$ в соответствии с условием инвариантности не связан с потерей устойчивости, т. е. в комбинированной системе отсутствует противоречие между условием инвариантности и условием устойчивости [18, 25, 37, 40].

Возможность достижения инвариантности в комбинированных системах согласуется с критерием реализуемости инвариантности Петрова [53, 54] — принципом двухканальности. Для достижения полной компенсации возмущающего воздействия необходимо, чтобы компенсационный канал был идентичен каналу возмущения управляемого объекта. Этот вывод подтверждается проведенным здесь анализом. Действительно, из формулы (6.11) следует:

$$K_{\text{вЛ}_a}(p) K_2(p) = K_L(p),$$

т. е. абсолютная инвариантность системы (рис. 6.1) будет достигнута, если передаточная функция компенсационного канала $K_{\text{вЛ}_a}(p) K_2(p)$ будет равна передаточной функции канала возмущения $K_L(p)$.

Учет условия физической реализуемости связи по возмущению. В комбинированных системах нет противоречия между условиями инвариантности и устойчивости и благодаря этому в них возможно достижение высокой точности управления. Однако при конструировании инвариантных систем возникают трудности другого характера, связанные с тем, что на передаточную функцию $K_{\text{вЛ}}(p)$ второго канала накладываются ограничения, определяемые условиями физической реализуемости. Передаточная функция связи по возмущению $K_{\text{вЛ}}(p)$ в общем случае может быть записана в виде

$$K_{\text{вЛ}}(p) = \frac{\tau_0 p^n + \tau_1 p^{n-1} + \dots + \tau_n}{d_0 p^m + d_1 p^{m-1} + \dots + d_m} = \frac{D_{\text{вЛ}}(p)}{F_{\text{вЛ}}(p)}. \quad (6.13)$$

Условие физической реализуемости этой передаточной функции имеет вид

$$n \leq m, \quad (6.14)$$

т. е. степень числителя физически реализуемой передаточной функции меньше степени его знаменателя или равна ей. Если передаточная функция связи по возмущению $K_{\text{вЛ}_a}(p)$, найденная в соответствии с формулой (6.11), отвечает условию физической реализуемости (6.14), то в системе возможно достижение абсолютной инвариантности ошибки относительно возмущающего воздействия $L(t)$. В том случае, когда $K_{\text{вЛ}_a}(p)$ оказывается физически нереализуемой, полная компенсация влияния возмущающего воздействия $L(t)$ невозможна.

Пример 1. Дана САУ (рис. 6.1), имеющая передаточные функции:

$$K_1(p) = \frac{k_1 (T_{1\text{к}} p + 1)}{(T_1 p + 1) (T_{2\text{к}} p + 1)}; \quad K_2(p) = \frac{k_2}{(T_2 p + 1) p}; \quad K_L(p) = \frac{k_L}{(T_L p + 1) p}.$$

Найти передаточную функцию $K_{\text{вЛ}_a}(p)$ связи по возмущению, при которой обеспечивается абсолютная инвариантность ошибки системы относительно возмущающего воздействия.

В соответствии с формулой (6.11)

$$K_{\text{вЛ}_a}(p) = \frac{K_L(p)}{K_2(p)} = \frac{k_{\text{вЛ}} (T_2 p + 1)}{T_L p + 1}; \quad \left(k_{\text{вЛ}} = \frac{k_L}{k_2} \right), \quad (6.15)$$

т. е. передаточная функция $K_{\text{вЛ}}(p)$ физически реализуема и связь может быть осуществлена с помощью корректирующего устройства, имеющего передаточную функцию (6.15).

6.3. Условие абсолютной инвариантности ошибки относительно задающего воздействия и возможность его реализации в комбинированных следящих системах

В следящих системах основной причиной, вызывающей ошибку воспроизведения $\theta(t)$, является изменение задающего воздействия $\alpha(t)$. С целью упрощения исследования связи между $\theta(t)$ и $\alpha(t)$ примем $L(t) = 0$. Тогда уравнение (6.1) системы для ошибки будет иметь вид

$$F(p) \theta_{\alpha}(t) = M(p) \alpha(p). \quad (6.16)$$

Из этого уравнения видно, что если будет выполняться условие

$$M(p) = 0, \quad (6.17)$$

то ошибка $\theta_{\alpha}(t) = 0$ при любом законе изменения $\alpha(t)$. Условие (6.17) является *условием абсолютной инвариантности* ошибки следящей системы относительно задающего воздействия.

В одноконтурных системах с принципом управления по отклонению, как показано в первой главе, абсолютная инвариантность ошибки $\theta_{\alpha}(t)$ относительно задающего воздействия недостижима. Исследуем возможность выполнения условия абсолютной инвариантности (6.17) в комбинированных следящих системах.

Комбинированная следящая система (см. рис. 1.11, б) отличается наличием связи СЗВ по задающему воздействию $\alpha(t)$. Передаточная функция этой связи на структурной схеме системы (рис. 6.2) обозначена $K_{\text{в}\alpha}(p)$. В соответствии со схемой уравнения элементов системы имеют вид:

$$\theta_{\alpha}(p) = \alpha(p) - \beta(p); \quad (6.18)$$

$$\Sigma(p) = K_1(p) \theta_{\alpha}(p) + K_{\text{в}\alpha}(p) \alpha(p); \quad (6.19)$$

$$\beta(p) = K_2(p) \Sigma(p). \quad (6.20)$$

Исключив из этих уравнений $\beta(p)$ и $\Sigma(p)$, получим уравнение системы для ошибки

$$[1 + K_1(p) K_2(p)] \theta_{\alpha}(p) = [1 - K_2(p) K_{\text{в}\alpha}(p)] \alpha(p) \quad (6.21)$$

или после подстановки значений $K_i(p) = D_i(p)/F_i(p)$ ($i = 1, 2, \text{в } \alpha$)

$$\begin{aligned} [F_1(p) F_2(p) + D_1(p) D_2(p)] F_{\text{в}\alpha}(p) \theta_{\alpha}(p) = \\ = [F_2(p) F_{\text{в}\alpha}(p) - D_2(p) D_{\text{в}\alpha}(p)] F_1(p) \alpha(p). \end{aligned} \quad (6.22)$$

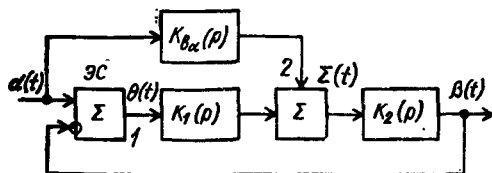


Рис. 6.2. Структурная схема комбинированной следящей системы со связью по задающему воздействию.

Условие абсолютной инвариантности $\theta_\alpha(p)$ относительно $\alpha(p)$:

$$1 - K_2(p) K_{\text{в}\alpha}(p) = 0 \quad (6.23)$$

или

$$M(p) = [F_2(p) F_{\text{в}\alpha}(p) - D_2(p) D_{\text{в}\alpha}(p)] F_1(p) = 0.$$

Если учесть, что $F_1(p) \neq 0$, то условие инвариантности примет вид

$$F_2(p) F_{\text{в}\alpha}(p) - D_2(p) D_{\text{в}\alpha}(p) = 0. \quad (6.24)$$

Поскольку левая часть формулы (6.24) является разностью, то имеется принципиальная возможность выполнения условия инвариантности за счет выбора $D_{\text{в}\alpha}(p)$ и $F_{\text{в}\alpha}(p)$. Передаточная функция связи по задающему воздействию, удовлетворяющая условию абсолютной инвариантности (6.24):

$$K_{\text{в}\alpha}(p) = D_{\text{в}\alpha}(p)/F_{\text{в}\alpha}(p) = F_2(p)/D_2(p) = 1/K_2(p). \quad (6.25)$$

Вясним, возможен ли выбор $K_{\text{в}\alpha}(p)$ из условия инвариантности с точки зрения устойчивости системы. Из сравнения условия инвариантности (6.24) и характеристического уравнения системы

$$[F_1(p) F_2(p) + D_1(p) D_2(p)] F_{\text{в}\alpha}(p) = 0 \quad (6.26)$$

видно, что полином $D_{\text{в}\alpha}(p)$ (числитель функции $K_{\text{в}\alpha}(p)$) входит только в условие инвариантности. Поэтому его выбор из условия инвариантности не влияет на устойчивость системы. Полином $F_{\text{в}\alpha}(p)$ (знаменатель функции $K_{\text{в}\alpha}(p)$) входит как в условие инвариантности (6.24), так и в характеристическое уравнение системы (6.26). Из формулы (6.26) видно, что $F_{\text{в}\alpha}(p)$ входит в характеристический полином системы в виде сомножителя. Поэтому с введением связи по задающему воздействию корни характеристического уравнения (устойчивость) замкнутой части системы не изменяются, а появляются лишь новые корни, определяемые характеристическим уравнением $F_{\text{в}\alpha}(p) = 0$. Эти корни определяют устойчивость разомкнутой части комбинированной системы — связи по задающему воздействию. В разомкнутых системах не возникает проблемы устойчивости, поэтому в комбинированной системе выбор полиномов $D_{\text{в}\alpha}(p)$ и $F_{\text{в}\alpha}(p)$ из условия инвариантности не приводит к потере устойчивости. Отсюда можно сделать вывод, что в комбинированных следящих системах со связью по задающему воздействию нет противоречия между условием инвариантности ($\theta_\alpha(t)$ относительно $\alpha(t)$) и условием устойчивости.

Передаточная функция $K_{\text{в}\alpha}(p)$ связи по задающему воздействию, при которой ошибка системы инвариантна относительно задающего воздействия, как видно из формулы (6.25), представляет собой выражение, обратное передаточной функции $K_2(p)$. Степень f числителя передаточной функции $K_2(p)$ участка следящей системы, обычно содержащего интегрирующий элемент (например, электродвигатель), $K_2(p) = D_2(p)^{(f)}/F_2(p)^{(k)}$ ниже степени ее знаменателя k ($f < k$). У передаточной же функции $K_{\text{в}\alpha}(p) = F_2(p)^{(k)}/D_2(p)^{(f)}$ степень числителя k оказывается больше степени знаменателя f , что находится в противоречии с условием физической реализуемости (6.14). Из этого

следует, что передаточная функция связи по задающему воздействию комбинированной следящей системы, соответствующая абсолютной инвариантности, физически нереализуема, а абсолютная инвариантность недостижима.

Однако отсутствие возможности достижения абсолютной инвариантности не означает, что в комбинированных следящих системах нельзя получить высокую точность воспроизведения. Возможность достижения высокой точности воспроизведения в комбинированных следящих системах объясняется основным свойством этих систем — отсутствием противоречия между условиями инвариантности и устойчивости. То обстоятельство, что передаточная функция $K_{\text{в}\alpha_a}(p)$, соответствующая абсолютной инвариантности, является физически нереализуемой, свидетельствует лишь о том, что невозможно достижение абсолютной инвариантности. Замена физически нереализуемой передаточной функции $K_{\text{в}\alpha_a}(p)$ близкой к ней физически реализуемой передаточной функцией $K_{\text{в}\alpha}(p)$ дает квазиинвариантную систему, т. е. систему с высокой точностью управления, мало отличающуюся от инвариантной.

Пример 2. Передаточные функции элементов комбинированной следящей системы (рис. 6.2): $K_1(p) = k_1/(T_1p + 1)$; $K_2(p) = k_2/(T_2p + 1)$ p . Определить передаточную функцию $K_{\text{в}\alpha_a}(p)$ связи по задающему воздействию, при которой достигается абсолютная инвариантность. Оценить возможность ее физической реализуемости.

В соответствии с условием абсолютной инвариантности (6.25)

$$K_{\text{в}\alpha_a}(p) = 1/K_2(p) = (T_2p + 1)p/k_2 = F_2(p)^{(k=2)}/D_2(p)^{(f=0)}.$$

Так как $k > f$, то $K_{\text{в}\alpha_a}(p)$ физически нереализуема и абсолютная инвариантность ошибки относительно задающего воздействия недостижима. Если $K_{\text{в}\alpha_a}(p)$ заменить близкой к ней физически реализуемой передаточной функцией вида

$$K_{\text{в}\alpha}(p) = \frac{(T_2p + 1)p}{k_2(T_3p + 1)(T_4p + 1)}, \quad T_3 \rightarrow 0, \quad T_4 \rightarrow 0,$$

то получим систему, близкую к инвариантной.

В том случае, когда в связь по задающему воздействию можно включить тахогенератор с приближенной передаточной функцией $K_{\text{тг}}(p) \approx k_{\text{тг}}p$, то физически реализуемая передаточная функция, близкая к $K_{\text{в}\alpha_a}(p)$, будет иметь вид $K_{\text{в}\alpha}(p) = (T_2p + 1)p/k_2(T_3p + 1)$, $T_3 \rightarrow 0$.

6.4. Повышение порядка астатизма комбинированной следящей системы с помощью связи по задающему воздействию

Возможность повышения порядка астатизма следящей системы с помощью связи по задающему воздействию

С помощью связи по задающему воздействию возможно достижение квазиинвариантности. На практике часто возникает задача неполной компенсации ошибки системы. Например, оказывается достаточным устранение основных компонент ее динамической ошибки (скоростной

ошибки и ошибки, вызываемой второй производной задающего воздействия) или требуется уменьшить переходную составляющую ошибки. Эффективным методом устранения и уменьшения установившихся динамических ошибок, как отмечалось, является повышение порядка астатизма системы. Покажем возможность повышения порядка астатизма системы за счет введения связи по задающему воздействию [18, 22]. Передаточная функция по ошибке $K_{\theta_k}(p)$ (для упрощения записи вместо $K_{\theta_{\text{ошк}}}(p)$ принято обозначение $K_{\theta_k}(p)$) комбинированной следящей системы (рис. 6.2) в соответствии с уравнением (6.21)

$$K_{\theta_k}(p) = \frac{\theta_k(p)}{\alpha(p)} = \frac{1 - K_2(p) K_{\text{вс}}(p)}{1 + K_1(p) K_2(p)} \quad (6.27)$$

или после подстановки значений $K_i(p) = D_i(p)/F_i(p)$ ($i = 1, 2, \text{вс}$)

$$\begin{aligned} K_{\theta_k}(p) &= \frac{[F_2(p) F_{\text{вс}}(p) - D_2(p) D_{\text{вс}}(p)] F_1(p)}{[F_1(p) F_2(p) + D_1(p) D_2(p)] F_{\text{вс}}(p)} = \\ &= D_{\theta_k}(p)/F_{\theta_k}(p) = D_{\theta_{k_0}}(p) p / F_{\theta_k}(p) = K_{\theta_{k_0}}(p) p^v, \end{aligned} \quad (6.28)$$

где

$$\lim_{p \rightarrow 0} D_{\theta_{k_0}}(p) \neq 0; \quad \lim_{p \rightarrow 0} K_{\theta_{k_0}}(p) \neq 0.$$

Порядок астатизма системы (гл. 2) определяется степенью v оператора p , являющегося общим множителем передаточной функции системы по ошибке $K_{\theta_k}(p)$. Знаменатель передаточной функции $K_{\theta_k}(p)$ (6.28) не имеет p в качестве общего множителя. Выражение $F_1(p) \times \times F_2(p) + D_1(p) D_2(p)$ всегда содержит член, свободный от p , а полином $F_{\text{вс}}(p)$, учитывающий условия физической реализации дифференцирующих устройств, включаемых в связь по задающему воздействию, также не содержит p в качестве общего множителя. Поэтому порядок астатизма системы определяется степенью оператора v , являющегося общим множителем только числителя $K_{\theta_k}(p)$.

Как видно из выражения (6.28), полиномы $D_{\text{вс}}(p)$ и $F_{\text{вс}}(p)$ входят в числитель выражения для $K_{\theta_k}(p)$. Поэтому можно повысить порядок астатизма системы при соответствующем выборе этих полиномов, имея в виду, что такой выбор не приводит к потере устойчивости системы. Возможность повышения порядка астатизма следящей системы с помощью связи по задающему воздействию проиллюстрируем на конкретном примере.

Пример 3. Передаточные функции элементов следящей системы (рис. 6.2) определяются выражениями:

$$K_1(p) = \frac{k_1}{T_1 p + 1} = \frac{D_1(p)}{F_2(p)}; \quad K_2(p) = \frac{k_2}{(T_2 p + 1) p} = \frac{D_2(p)}{F_2(p)}.$$

Передаточная функция по ошибке системы без связи по задающему воздействию

$$K_{\theta}(p) = \frac{1}{1 + K_1(p) K_2(p)} = \frac{T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + p}{T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + p + k_1 k_2} = K_{\theta_0}(p) p.$$

Из полученного выражения видно, что система без связи по задающему воздействию имеет астатизм первого порядка ($v = 1$).

Связь по задающему воздействию в системе реализована с помощью тахогенератора, связанного с ведущим валом через редуктор и имеющего передаточную функцию $K_{в\alpha}(p) \approx \tau_0 p / 1 = D_{в\alpha}(p) / F_{в\alpha}(p)$.

Подставив значения полиномов $D_i(p)$ и $F_i(p)$ ($i = 1, 2, \text{в}\alpha$) данной системы в формулу (6.28), получим ее передаточную функцию по ошибке

$$K_{\theta_k}(p) = \frac{(T_2 p^2 + p - k_2 \tau_0 p)(T_1 p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)p + k_1 k_2} = \\ = \frac{T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2 - T_1 k_2 \tau_0) p^2 + (1 - k_2 \tau_0) p}{T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + p + k_1 k_2}.$$

Как видно из полученного выражения, введение первой производной от задающего воздействия с произвольным значением τ_0 , вообще говоря, еще не приводит к повышению порядка астатизма системы. Для того чтобы повысить порядок астатизма системы с первого до второго, необходимо коэффициент $(1 - k_2 \tau_0)$ при p сделать равным нулю: $1 - k_2 \tau_0 = 0$. Это выражение является условием повышения порядка астатизма системы с первого до второго. Как видно, в него входит коэффициент τ_0 связи по задающему воздействию. Если значение этого коэффициента выбрать в соответствии с условием повышения порядка астатизма $\tau_0 = 1/k_2$, то астатизм системы повысится на один порядок. Действительно, передаточная функция по ошибке комбинированной системы при выполнении условия повышения порядка астатизма примет вид

$$K_{\theta_k}(p) = \frac{T_1 T_2 p^3 + T_2 p^2}{T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p + p + k_1 k_2} = K_{\theta_{k_0}}(p) p^2,$$

откуда видно, что комбинированная система имеет астатизм второго порядка ($v = 2$).

Таким образом, за счет введения первой производной от задающего воздействия в алгоритм управления возможно повышение астатизма системы с первого до второго. Аналогично можно показать, что с помощью введения первой и второй производной от задающего воздействия [когда передаточная функция связи описывается, например, выражением $K_{в\alpha}(p) = (\tau_0 p^2 + \tau_1 p) / (d_0 p^2 + d_1 p + d_2)$] возможно повысить астатизм системы с первого до третьего порядка и т. д.

В отличие от способа повышения астатизма за счет включения в замкнутую часть системы интегрирующих звеньев, уменьшающих запас устойчивости или даже переводящих систему в неустойчивый режим, при повышении порядка астатизма за счет введения связи по задающему воздействию устойчивость замкнутой части системы, как было выяснено, не изменяется.

Физический смысл введения производной от задающего воздействия в алгоритм управления системы

Дадим физическое объяснение возможности устранения скоростной ошибки (повышения порядка астатизма) системы с помощью введения первой производной от задающего воздействия на примере конкретной следящей системы. В следящей системе с принципом управления по отклонению (см. рис. 1.14, а) при вращении ведущего вала $ВВ$ возникает ошибка $\theta_\alpha(t)$. Эта ошибка используется для формирования напряжения $u_{\theta_\alpha}(t)$, поступающего на двигатель. При вращении $ВВ$ с постоянной скоростью α_1 ($\alpha(t) = \alpha_1 t$) в системе возникает уста-

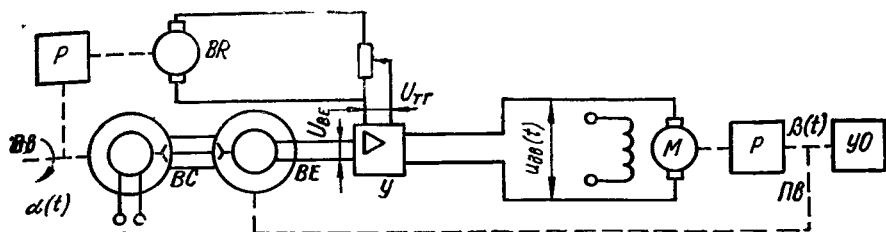


Рис. 6.3. Упрощенная принципиальная схема комбинированной следящей системы, связь по задающему воздействию в которой выполнена с помощью тахогенератора BR .

новившаяся скоростная ошибка $\theta_{\alpha\text{уст}}(t)$. Эта ошибка, как известно, пропорциональна скорости α_1 , т. е. $\theta_{\alpha\text{уст}}(t) = D_1\alpha_1$; $D_1 = 1/k_p$. В этом случае напряжение ошибки на выходе сельсина-приемника BE $u_{\theta\epsilon}(t) = k_{\text{ст}}\theta_{\alpha\text{уст}}(t) = (k_{\text{ст}}/k_p)\alpha_1$, а напряжение, поступающее на двигатель M , $u_{\text{дв}}(t) = u_{\theta\alpha}(t) = k_y u_{\theta\epsilon}(t) = k_{\theta}\alpha_1$ ($k_{\theta} = k_{\text{ст}}k_y/k_p$, $k_{\text{ст}}$, k_y — коэффициенты преобразования сельсинов в трансформаторном режиме и усиления усилителя Y соответственно), т. е. $u_{\text{дв}}(t)$ пропорционально α_1 . Таким образом, для вращения приемного вала со скоростью, равной скорости α_1 вращения ведущего вала, на двигатель должно подаваться напряжение $u_{\text{дв}}(t)$, пропорциональное этой скорости. В рассматриваемой системе с принципом управления по отклонению напряжение $u_{\text{дв}}(t)$ целиком формируется из напряжения ошибки $u_{\theta\alpha}(t)$, т. е. необходимая скорость вращения двигателя достигается только за счет ошибки.

В комбинированной следящей системе (рис. 6.3), в которой связь по задающему воздействию реализована с помощью тахогенератора BR , с напряжением ошибки в усилителе Y складывается напряжение тахогенератора: $u_{\text{тг}}(t) = \tau_0 d\alpha(t)/dt = \tau_0\alpha_1$. Как видим, напряжение $u_{\text{тг}}(t)$, как и напряжение ошибки $u_{\theta\epsilon}(t)$, пропорционально скорости (частоте) вращения α_1 . Напряжение $u_{\text{тг}}(t)$ усиливается и вместе с напряжением ошибки подается на двигатель:

$$u_{\text{дв}}(t) = u_{\theta\alpha}(t) + k_y u_{\text{тг}}(t),$$

т. е. необходимое напряжение на входе двигателя $u_{\text{дв}}(t) = k_{\theta}\alpha_1$ формируется из напряжения ошибки $u_{\theta\alpha}(t)$ и напряжения тахогенератора $k_y u_{\text{тг}}(t)$. Благодаря этому при введении связи по задающему воздействию напряжение ошибки $u_{\theta\alpha}(t)$ уменьшается. Перемещая движок потенциометра R , можно изменять τ_0 и увеличивать составляющую напряжения $k_y u_{\text{тг}}(t)$ на входе двигателя. В частности, если обеспечить выполнение условия $k_y\tau_0 = k_{\theta}$, то $u_{\text{дв}}(t) = k_{\theta}\alpha_1 = K_y\tau_0\alpha_1 = k_y u_{\text{тг}}(t)$, т. е. напряжение тахогенератора $k_y u_{\text{тг}}(t)$ полностью обеспечит вращение двигателя с требуемой скоростью. В этом случае $u_{\theta\alpha}(t) = 0$, а следовательно, и скоростная ошибка системы $\theta_{\alpha\text{уст}}(t) = 0$. Устранение скоростной ошибки соответствует повышению астатизма системы с первого до второго порядка.

Синтез связи по задающему воздействию из условия повышения порядка астатизма может быть выполнен с помощью изложенного в [18, 22] метода.

С помощью связи по задающему воздействию возможно не только повышение динамической точности, но и улучшение переходных процессов САУ [18, 21, 22].

В следящих системах, в которых значительные ошибки вызываются как изменением задающего, так и возмущающим воздействием, вводят компенсационные связи по задающему и по возмущающему воздействиям.

6.5. Анализ качества комбинированных систем методом частотных характеристик

Метод логарифмических частотных характеристик обычно используется для анализа и синтеза САУ с принципом управления по отклонению. Однако этот метод можно распространить и для расчета комбинированных систем автоматического управления [6, 18]. Как известно, при расчете САУ методом ЛЧХ оперируют логарифмической амплитудной частотной характеристикой (ЛАЧХ) разомкнутой системы по отклонению. С целью применения метода ЛЧХ для расчета и комбинированной следящей системы передаточную функцию (или передаточную функцию по ошибке) этой системы можно принять за передаточную функцию (или передаточную функцию по ошибке) эквивалентной по своим свойствам системы по отклонению и найти передаточную функцию эквивалентной системы по отклонению в разомкнутом состоянии. Затем исследование системы (анализ или синтез) можно проводить, используя эквивалентную ЛАЧХ, построенную на основании этой передаточной функции.

Напомним, что передаточная функция $K_\theta(p)$ по ошибке системы с принципом управления по отклонению и передаточная функция этой системы в разомкнутом состоянии $K_p(p)$ связаны выражением

$$K_\theta(p) = 1/[1 + K_p(p)], \quad (6.29)$$

откуда

$$K_p(p) = [1 - K_\theta(p)]/K_\theta(p). \quad (6.30)$$

Если имеется комбинированная следящая система и $K_{\theta_k}(p)$ является ее передаточной функцией по ошибке, то, принимая $K_{\theta_k}(p)$ за передаточную функцию по ошибке эквивалентной следящей системы с принципом управления по отклонению, определим передаточную функцию эквивалентной системы в разомкнутом состоянии $K_{з.р}(p)$ с помощью выражения, аналогичного выражению (6.30):

$$K_{з.р}(p) = [1 - K_{\theta_k}(p)]/K_{\theta_k}(p). \quad (6.31)$$

Для комбинированной системы (рис. 6.2) $K_{\theta_k}(p)$ определяется выражением (6.27)

$$K_{\theta_k}(p) = [1 - K_2(p) K_{вз}(p)]/[1 + K_p(p)], \quad K_p(p) = K_1(p) K_2(p). \quad (6.32)$$

Подставив данное значение $K_{\theta_k}(p)$ в формулу (6.31), получим

$$K_{з.р}(p) = \frac{K_2(p) [K_1(p) + K_{вз}(p)]}{1 - K_2(p) K_{вз}(p)}. \quad (6.33)$$

На основании полученного выражения для $K_{э,р}(p)$ строятся ЛЧХ эквивалентной системы по отклонению в разомкнутом состоянии. Используя метод вещественных частотных характеристик, строится кривая переходного процесса комбинированной системы и по ней определяются показатели качества.

Пример 4. Определить $K_{э,р}(p)$ комбинированной следящей системы (рис. 6.2) имеющей

$$K_1(p) = k_1; K_2(p) = k_2/(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)p; K_{вз}(p) = \tau_0 p. \quad (6.34)$$

Значения передаточных функций (6.34) подставляем в формулу (6.33)

$$\begin{aligned} K_{э,р}(p) &= \frac{[k_2/(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)p](k_1 + \tau_0 p)}{1 - [k_2/(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)p]\tau_0 p} = \\ &= \frac{k_p(1 + T_3 p)}{T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2)p^2 + (1 - k_2 \tau_0)p}, \end{aligned} \quad (6.35)$$

или

$$K_{э,р}(p) = k_{э,р}(1 + T_3 p)/(a_{0к} p^3 + a_{1к} p^2 + p),$$

где

$$k_p = k_1 k_2; k_{э,р} = \frac{k_p}{1 - k_2 \tau_0}; T_3 = \frac{\tau_0}{k_1}; a_{0к} = \frac{T_1 T_2}{1 - k_2 \tau_0}; a_{1к} = \frac{T_1 + T_2}{1 - k_2 \tau_0}.$$

Если коэффициент τ_0 найден из условия повышения порядка астатизма: $1 - k_2 \tau_0 = 0$, то формула (6.35) примет вид

$$K_{э,р}(p) = \frac{k_p(1 + T_3 p)}{T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2)p^2} = \frac{k_p(1 + T_3 p)}{(T_1 + T_2) \left(\frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} p + 1 \right) p^2}$$

или

$$K_{э,р}(p) = \frac{k_e(1 + T_3 p)}{(T_{э1} p + 1)p^2},$$

где $k_e = k_p/(T_1 + T_2)$ — коэффициент усиления по ускорению эквивалентной системы в разомкнутом состоянии; $T_{э1} = T_1 T_2/(T_1 + T_2)$ — постоянная времени эквивалентной системы.

Построив в соответствии с полученным выражением ЛЧХ эквивалентной системы, можно определить ее устойчивость, запасы устойчивости по фазе и амплитуде.

Чтобы с помощью метода ВЧХ построить переходный процесс комбинированной системы, можно и не прибегать к определению $K_{э,р}(p)$ и построению ЛАЧХ. Представив комплексную передаточную функцию системы по ошибке в алгебраической форме $K_{\theta к}(j\omega) = P_{\theta к}(\omega) + jQ_{\theta к}(\omega)$, по выражению для $P_{\theta к}(\omega)$ следует построить ВЧХ комбинированной системы для ошибки и по ней известным способом определить кривую переходной функции для ошибки $h_{\theta}(t)$. Переходная функция системы $h(t)$ в случае необходимости находится по формуле $h(t) = 1 - h_{\theta}(t)$.

6.6. Следящие системы с принципом управления по отклонению и дифференциальными связями.

Итерационные системы

В комбинированных следящих системах, как было показано, возможно достижение высокой точности управления. Из структурной схемы комбинированной следящей системы (рис. 6.2) видно, что для построения последней необходимо измерять задающее воздействие α и через звено $K_{\alpha\alpha}(p)$ подавать на сумматор 2. В тех случаях, когда возможность непосредственного измерения задающего воздействия отсутствует, можно измерять α косвенным способом, оставаясь в рамках системы с принципом управления по отклонению. Для этого используется элемент сравнения, являющийся функционально-необходимым элементом следящей системы с управлением по отклонению.

Действительно, из уравнения элемента сравнения системы (рис. 6.2) $\theta(t) = \alpha(t) - \beta(t)$ находим $\alpha(t) = \theta(t) + \beta(t)$, откуда видно, что для получения задающего воздействия достаточно осуществить сложение ошибки системы $\theta(t)$ и управляемой величины $\beta(t)$, т. е. сложение сигналов на входе и выходе элемента сравнения. Такой метод косвенного измерения задающего воздействия называется *методом дифференциальной связи* или *методом «вилки»*. Структурная схема следящей системы с принципом управления по отклонению, в которой осуществляется косвенное измерение задающего воздействия с помощью дифференциальной связи, изображена на рис. 6.4.

Следящая система с принципом управления по отклонению (рис. 6.4), в которой измеренное с помощью дифференциальной связи задающее воздействие α через звено с передаточной функцией $K_{\alpha\alpha}(p)$, совпадающей с передаточной функцией связи по задающему воздействию комбинированной системы (рис. 6.2), подается на сумматор 2, эквивалентна комбинированной следящей системе [18, 20].

В последнее время наряду с комбинированными системами находят широкое применение *итерационные САУ* [50, 60]. Как известно, управляемая величина $\beta(t)$ системы (см. рис. 2.4) отличается от задающего воздействия $\alpha(t)$ на величину ошибки: $\theta(t) = \alpha(t) - \beta(t)$. Если к управляемой величине $\beta(t)$ после точки ответвления главной обратной связи прибавить ошибку $\theta(t)$ (рис. 6.5, а), то управляемая величина на выходе сумматора 1 системы $\beta_n(t) = \beta(t) + \theta(t)$. В этом случае ошибка системы $\theta_n(t) = \alpha(t) - \beta_n(t) = \alpha(t) - \beta(t) -$

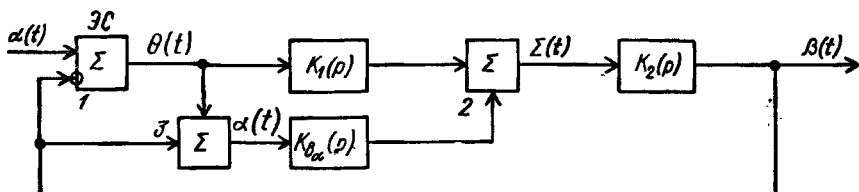


Рис. 6.4. Структурная схема следящей системы с принципом управления по отклонению и дифференциальной связью.

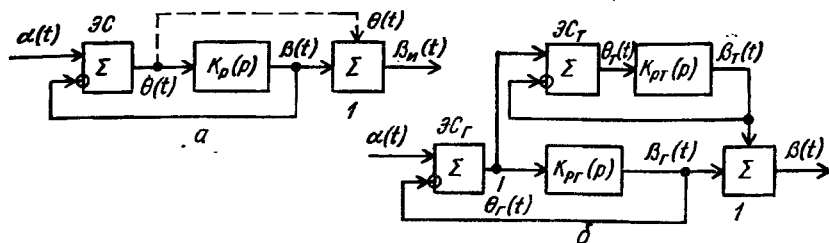


Рис. 6.5. Структурные схемы итерационных систем:
 а — идеальной; б — двухканальной.

— $\theta(t) = 0$. Поскольку управляемая величина системы (например, угол поворота антенны) и ошибка системы (электрическое напряжение) имеют различную физическую природу и энергетические параметры, то непосредственно подать ошибку системы с выхода элемента сравнения ЭС на сумматор 1, как показано штриховой линией на рис. 6.5, а, не представляется возможным. Для формирования сигнала $\beta_t(t)$, близкого к ошибке, обычно применяется вторая (точная) следящая система, задающим воздействием которой является ошибка $\theta_r(t)$ основной (грубой) следящей системы (рис. 6.5, б): на элемент сравнения ЭС_т точной системы подается ошибка $\theta_r(t)$ грубой системы. Выходная величина $\beta_t(t)$ точной системы отличается от $\theta_r(t)$ на величину ошибки точной системы $\theta_t(t) = \theta_r(t) - \beta_t(t)$. Поскольку значение $\theta_t(t)$ обычно мало, то благодаря применению данной системы, называемой *итерационной*, удастся существенно повысить точность воспроизведения. В случае необходимости дальнейшего повышения точности можно дополнительно ввести не только первую систему, но также вторую, третью и т. д.

Значительных результатов повышения точности следящих систем следует ожидать от применения систем, сочетающих структуры итерационных и комбинированных систем.

ГЛАВА 7

Статистические методы исследования систем автоматического управления

7.1. Необходимость исследования САУ при случайных воздействиях с помощью статистических методов

В предыдущих главах рассматривались вопросы определения точности САУ при детерминированных, т. е. известных, заданных возмущающих и задающих воздействиях. Например, точность системы в переходном режиме оценивалась с помощью показателей качества переходного

процесса, являющегося реакцией системы на типовое воздействие в виде единичной ступенчатой функции. Точность системы в установившемся динамическом режиме оценивалась с помощью установившихся динамических ошибок при типовом воздействии, заданном, например, в виде полинома (2.69). Однако часто задающие (возмущающие) воздействия представляют собой случайные, непрерывно изменяющиеся функции времени, аппроксимация которых типовыми функциями времени либо невозможна, либо приводит к существенным погрешностям.

В качестве примера можно назвать следящую систему радиолокационной станции, обеспечивающую автоматическое сопровождение цели. В ней задающим воздействием являются координаты движения цели, закон изменения которых заранее не может быть определен. На задающее воздействие системы накладываются помехи или флуктуации, представляющие собой быстроизменяющиеся случайные функции времени. Эти флуктуации входного сигнала, являющиеся возмущающими воздействиями, вызываются непрерывным изменением коэффициента отражения цели, его центра отражения вследствие рыскания, качки цели и другими причинами. Шумы, возникающие в элементах радиолокационных устройств, имеющие случайный характер, также накладываются на полезный сигнал. Возмущающим воздействием системы автоматического сопровождения цели по направлению является ветровая нагрузка на антенну, которая также представляет собой случайную функцию времени.

Задающие и возмущающие воздействия, являющиеся непрерывно изменяющимися случайными функциями времени, как отмечалось, не могут быть заменены типовыми воздействиями, поэтому и рассмотренные ранее показатели качества не могут быть использованы для оценки поведения системы, к которой приложены такие воздействия. Наиболее правильным подходом к исследованию САУ, находящихся под влиянием случайных воздействий, является подход с позиций теории вероятностей, так как только вероятностные статистические методы дают возможность учесть случайный характер воздействий. Появление и развитие статистических методов анализа и синтеза САУ при наличии воздействий в виде случайных функций времени не умаляет значения методов анализа и синтеза при воздействиях в виде заданных функций времени, а лишь расширяют возможности в отношении более полного учета реальных условий работы системы.

Статистические методы анализа и синтеза САУ хорошо разработаны и доведены до инженерных методов расчета для случая стационарных случайных воздействий, охватывающих сравнительно широкий круг воздействий. Для так называемых квазистационарных случайных процессов, отличающихся тем, что характеристики их изменяются во времени сравнительно медленно, В. С. Пугачевым разработан метод, по структуре мало отличающийся от метода для стационарных случайных процессов (спектрального метода), но применяемый в более широком диапазоне условий.

7.2. Статистический метод анализа САУ

Задача анализа состоит в определении точности работы системы (в определении ее ошибок) в случае, если задающие и возмущающие воздействия представляют собой стационарные случайные процессы. В частном случае задающее воздействие может быть регулярной, т. е. заданной функцией времени или содержать регулярные составляющие. Ниже ограничимся случаем, когда все воздействия являются случайными функциями.

Анализ САУ можно разбить на два этапа. На первом этапе определяются статистические характеристики случайных воздействий — корреляционная функция $R(\tau)$ и спектральная плотность $S(\omega)$, являющиеся неслучайными функциями. Второй этап анализа состоит в преобразовании случайной функции линейной системой. Задача линейного преобразования случайной функции сводится к задаче такого же линейного преобразования нескольких неслучайных функций, являющихся ее статистическими характеристиками. Если входная $\alpha(t)$ и выходная $\beta(t)$ величины системы стационарны, задача преобразования случайной функции упрощается и сводится к преобразованию одной неслучайной функции — спектральной плотности $S_\alpha(\omega)$ входного воздействия.

Чтобы при стационарном воздействии выходная величина системы была тоже стационарной, необходимо, чтобы параметры системы были постоянными, т. е. чтобы и система была стационарной.

Прохождение стационарного случайного сигнала через линейную систему

Пусть на вход системы с комплексной передаточной функцией $K_z(j\omega)$ (рис. 7.1) поступает стационарный случайный сигнал $\alpha(t)$. Для определения спектральной плотности случайного процесса $\alpha(t)$ воспользуемся интегралом Фурье. Чтобы $\alpha(t)$ представить в виде ин-

теграла Фурье, необходимо выполнение условия $\int_{-\infty}^{\infty} |\alpha(t)| dt < \infty$. Для стационарного случайного сигнала $\alpha(t)$ это условие не выполняется. Поэтому вместо функции $\alpha(t)$ рассматривают сигнал $\alpha_T(t)$, равный $\alpha(t)$ внутри интервала $(-T, T)$ и имеющий нулевое значение вне этого интервала. Сигнал $\alpha_T(t)$ удовлетворяет вышеприведенному условию и поэтому его можно представить в виде интеграла Фурье

$$\alpha_T(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_T(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (7.1)$$

где $\alpha_T(j\omega) = \int_{-T}^T \alpha_T(t) e^{-j\omega t} dt$ — частотный спектр сигнала $\alpha_T(t)$.

Зная частотный спектр $\alpha_T(j\omega)$, можно определить спектральную плотность случайного процесса $\alpha(t)$:

$$S_\alpha(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} (1/2T) |\alpha_T(j\omega)|^2. \quad (7.2)$$

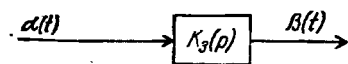


Рис. 7.1. Схема системы с КГФ $K_s(j\omega)$.

Из формулы (7.1) видно, что сигнал $\alpha_T(t)$ можно представить как бесконечную сумму элементарных (парциальных) гармонических колебаний $d\omega \alpha_T(j\omega) e^{j\omega t}/2\pi$. Каждое элементарное колебание, приложенное к системе, вызовет на ее выходе реакцию $K_s(j\omega) d\omega \alpha_T(j\omega) e^{j\omega t}/2\pi$. Для линейной системы в соответствии с принципом суперпозиции реакция системы на сумму воздействий равна сумме реакций на отдельные воздействия. Следовательно, реакцию системы $\beta_T(t)$ на воздействие (7.1) можно представить в виде суммы реакций, вызванных бесконечным рядом парциальных колебаний

$$\beta_T(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_s(j\omega) \alpha_T(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (7.3)$$

или

$$\beta_T(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \beta_T(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (7.4)$$

где

$$\beta_T(j\omega) = K_s(j\omega) \alpha_T(j\omega) = \int_{-T}^T \beta_T(t) e^{-j\omega t} dt \quad (7.5)$$

изображение Фурье (частотный спектр) реакции системы $\beta_T(t)$.

Зная частотный спектр $\beta_T(j\omega)$ функции $\beta_T(t)$, можно определить спектральную плотность реакции системы $\beta(t)$, представляющей стационарный случайный процесс:

$$S_\beta(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} (1/2T) |\beta_T(j\omega)|^2, \quad (7.6)$$

или учитывая формулу (7.5):

$$S_\beta(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} (1/2T) |K_s(j\omega) \alpha_T(j\omega)|^2.$$

Модуль произведения комплексных чисел равен произведению модулей, поэтому последнее выражение можем переписать в виде

$$\begin{aligned} S_\beta(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} [|K_s(j\omega)| |\alpha_T(j\omega)|]^2 = \\ &= |K_s(j\omega)|^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |\alpha_T(j\omega)|^2, \end{aligned}$$

или, учитывая формулу (7.2), в виде

$$S_\beta(\omega) = |K_s(j\omega)|^2 S_\alpha(\omega), \quad (7.7)$$

где $|K_s(j\omega)|^2$ — квадрат модуля комплексной передаточной функции замкнутой системы или квадрат выражения для амплитудно-частотной характеристики системы. В соответствии с выражением (7.7) для получения спектральной плотности стационарной случайной функции на выходе системы необходимо спектральную плотность входного сигнала

умножить на квадрат ординаты амплитудно-частотной характеристики системы.

Если математическое ожидание $\bar{\alpha}(t)$ стационарной функции $\alpha(t)$ на входе системы не равно нулю, т. е.

$$\alpha(t) = \alpha_c(t) + \bar{\alpha}(t), \quad (7.8)$$

где $\alpha_c(t)$ — существенно случайная часть функции $\alpha(t)$, то следует кроме спектральной плотности, определить также математическое ожидание $\bar{\beta}(t)$ сигнала на выходе системы. Математическое ожидание $\bar{\alpha}(t)$ стационарной случайной функции $\alpha(t)$ можно представить как гармоническое колебание нулевой частоты $\omega = 0$. Тогда математическое ожидание сигнала на выходе получим, если умножим $\bar{\alpha}(t)$ на КПФ при значении $\omega = 0$:

$$\bar{\beta}(t) = K_s(0) \bar{\alpha}(t). \quad (7.9)$$

Корреляционная функция $R_\beta(\tau)$ выходного сигнала может быть определена по его спектральной плотности

$$R_\beta(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_\beta(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (7.10)$$

Зная спектральную плотность выходного сигнала, можно определить его дисперсию

$$\bar{\beta}^2 = R_\beta(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_\beta(\omega) d\omega \quad (7.11)$$

и среднеквадратическое значение $\sqrt{\bar{\beta}^2}$.

При анализе САУ важны не столько характеристики выходной величины, сколько характеристики ошибки системы.

Оценка точности системы по среднеквадратической ошибке (СКО)

Если задающее воздействие $\alpha(t)$, приложенное к линейной системе (рис. 7.2), — случайная стационарная функция, то управляемая величина $\beta(t)$ и ошибка воспроизведения системы $\theta(t) = \alpha(t) - \beta(t)$ являются также случайными стационарными функциями. Ясно, что в этих условиях о точности системы можно судить не по мгновенным, а лишь по некоторым средним значениям ошибки. При статистическом методе анализа и синтезе динамическая точность системы определяется среднеквадратическим значением ϵ_θ ошибки, т. е. квадратным корнем из среднего значения квадрата ошибки:

$$\epsilon_\theta = \sqrt{\bar{\theta}^2}, \quad \text{где } \bar{\theta}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \theta^2(t) dt, \quad (7.12)$$

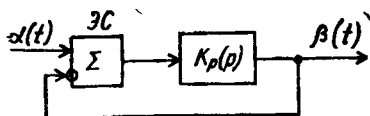


Рис. 7.2. Структурная схема САУ.

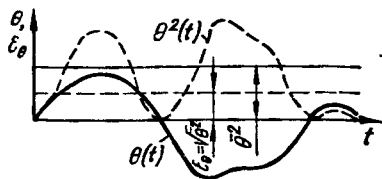


Рис. 7.3. К понятию о среднеквадратической ошибке.

которым пользуются как критерием, определяющим точность или качество работы системы при наличии стационарных случайных воздействий (связь между $\theta(t)$, $\theta^2(t)$, $\bar{\theta}^2$ и ϵ_θ иллюстрируется рис. 7.3).

Если известна корреляционная функция $R_\theta(\tau)$ или спектральная плотность $S_\theta(\omega)$ ошибки, то в соответствии с выражением (7.11) дисперсия ошибки может быть вычислена по формуле

$$\bar{\theta}^2 = R_\theta(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_\theta(\omega) d\omega. \quad (7.13)$$

Оптимальной передаточной функцией при использовании критерия СКО является такая передаточная функция системы, при которой среднеквадратическая ошибка имеет минимум.

Отметим достоинства и недостатки оценки точности системы с помощью СКО. При принятии СКО в качестве критерия точности анализ и синтез системы получается сравнительно простой. С помощью СКО (или дисперсии) возможно оценить сверху вероятность появления любой ошибки. Так, например, при нормальном законе распределения ошибок вероятность того, что ошибка (отклонение от среднего значения) превысит $3\epsilon_\theta$, весьма мала (меньше 0,003). Согласно критерию СКО нежелательность ошибки возрастает с ее величиной.

Имеется большой класс систем, для которых критерий СКО эффективен. Однако критерий СКО, как и всякий другой критерий, не является универсальным. Он обеспечивает малое значение лишь средней, а не мгновенной ошибки, поэтому в тех системах, где недопустимы большие, хотя и кратковременные ошибки, желательно применение другого критерия. Этот недостаток критерия СКО особо проявляется при расчете САУ с обратной связью. Выражения для корреляционной функции, спектральной плотности и среднеквадратического значения ошибки справедливы только для больших промежутков времени. Поэтому ошибки системы, связанные со сравнительно кратковременными переходными процессами в ней, практически не влияют на среднеквадратическое значение ошибки, т. е. ошибки, усредненной за бесконечно большой промежуток времени. На практике же часто встречаются системы, работающие на ограниченном участке времени, когда нельзя пренебречь ошибками, связанными с переходным процессом. Как правило, если параметры системы выбраны из условия получения минимума СКО при работе на большом промежутке времени, то замкнутая система имеет слабозатухающий переходный процесс. Поэтому на практике задачу о рациональном выборе передаточной функции систе-

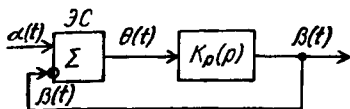


Рис. 7.4. Структурная схема системы, на вход которой поступает один полезный сигнал.

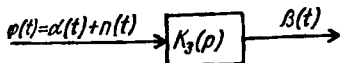


Рис. 7.5. Структурная схема системы, на вход которой поступают задающее и возмущающее воздействия.

мы решают не на основе чистого принципа минимума СКО, а с учетом ошибок в режиме переходных процессов.

Покажем, как может быть найдена спектральная плотность ошибки $S_\theta(\omega)$ для случая, когда на вход системы поступает только полезный сигнал (задающее воздействие), и для случая, когда система находится под влиянием двух стационарных случайных воздействий: задающего $\alpha(t)$ и возмущающего $n(t)$ (помехи), приложенных как к различным, так и к одной точке системы.

Спектральная плотность и дисперсия ошибки системы при воздействии на систему одного полезного сигнала

Пусть на вход системы (рис. 7.4) поступает задающее воздействие (полезный сигнал) $\alpha(t)$, спектральная плотность которого $S_\alpha(\omega)$. Изображение ошибки

$$\theta(p) = K_{\theta\alpha}(p)\alpha(p), \quad (7.14)$$

где $K_{\theta\alpha}(p)$ — передаточная функция системы по ошибке.

В соответствии с формулой (7.7) можно написать

$$S_\theta(\omega) = |K_{\theta\alpha}(j\omega)|^2 S_\alpha(\omega), \quad (7.15)$$

где $S_\theta(\omega)$ — спектральная плотность ошибки; $|K_{\theta\alpha}(j\omega)|$ — амплитудно-частотная характеристика системы (по ошибке).

Напомним, что $K_{\theta\alpha}(j\omega)$ можно определить по формулам:

$$K_{\theta\alpha}(j\omega) = 1 - K_3(j\omega); \quad K_{\theta\alpha}(j\omega) = 1/[1 + K_p(j\omega)],$$

где $K_3(j\omega)$ и $K_p(j\omega)$ — КПФ замкнутой и разомкнутой систем соответственно.

Таким образом, зная $K_{\theta\alpha}(j\omega)$, по выражению (7.15) можно определить $S_\theta(\omega)$, а с помощью формулы (7.13) — дисперсию ошибки θ^2 . СКО ε_θ может быть определено по формуле (7.12).

Спектральная плотность и дисперсия ошибки системы при воздействии полезного сигнала и помехи

Случай 1. Задающее воздействие $\alpha(t)$ и помеха $n(t)$ приложены к одной точке — поступают на вход системы (рис. 7.5). Входной сигнал системы при этом $\varphi(t) = \alpha(t) + n(t)$. В качестве примера можно привести радиолокационную следящую систему автоматического сопровождения цели, на вход которой поступает задающее воздействие (полезный сигнал, воспроизводящий закон движения цели) с наложенными

на него возмущающим воздействием (флюктуациями, вызываемыми непрерывным изменением коэффициента и центра отражения цели).

Для решения поставленной задачи составим уравнение системы

$$\beta(p) = K_s(p) [\alpha(p) + n(p)] = K_s(p) \alpha(p) + K_s(p) n(p), \quad (7.16)$$

где $K_s(p)$ — передаточная функция замкнутой системы. В данном случае передаточная функция системы по возмущению (помехе) совпадает с $K_s(p)$.

Из выражения (7.16) видно, что значение управляемой величины получается в результате сложения реакций системы $K_s(p) \alpha(p)$ и $K_s(p) n(p)$ на задающее и возмущающее воздействие соответственно. В отличие от случая, когда к системе приложено только задающее воздействие, здесь ошибка возникает не только в связи с изменением задающего воздействия, но вызывается также возмущающим воздействием. Ошибка системы определяется как разность между задающим воздействием $\alpha(t)$ (а не всем входным сигналом) и управляемой величиной $\beta(t)$: $\theta(p) = \alpha(p) - \beta(p)$ и, следовательно, $\beta(p) = \alpha(p) - \theta(p)$. Подставив значение $\beta(p)$ в формулу (7.16), получим

$$\alpha(p) - \theta(p) = K_s(p) \alpha(p) + K_s(p) n(p),$$

откуда уравнение системы для ошибки

$$\theta(p) = [1 - K_s(p)] \alpha(p) - K_s(p) n(p), \quad (7.17)$$

или

$$\theta(p) = K_{\theta\alpha}(p) \alpha(p) - K_s(p) n(p) = \theta_\alpha(p) - \theta_n(p), \quad (7.18)$$

где $K_{\theta\alpha}(p) = 1 - K_s(p)$ — передаточная функция системы по ошибке; $\theta_\alpha(p) = K_{\theta\alpha}(p) \alpha(p)$ — составляющая ошибки, вызываемая задающим воздействием; $\theta_n(p) = K_s(p) n(p)$ — составляющая ошибки, вызываемая помехой.

В случае, когда $\alpha(t)$ и $n(t)$ некоррелированы, то, согласно формулам (7.7) и (7.18), спектральная плотность ошибки

$$S_\theta(\omega) = |K_{\theta\alpha}(j\omega)|^2 S_\alpha(\omega) + |K_s(j\omega)|^2 S_n(\omega).$$

Подставив полученное значение $S_\theta(\omega)$ в формулу (7.13), получим значение дисперсии ошибки

$$\bar{\theta}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [|K_{\theta\alpha}(j\omega)|^2 S_\alpha(\omega) + |K_s(j\omega)|^2 S_n(\omega)] d\omega,$$

или

$$\bar{\theta}^2 = \bar{\theta}_\alpha^2 + \bar{\theta}_n^2, \quad (7.19)$$

где

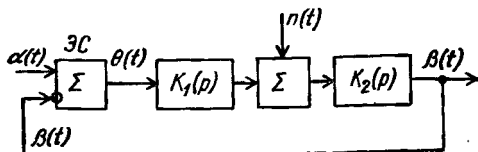
$$\bar{\theta}_\alpha^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K_{\theta\alpha}(j\omega)|^2 S_\alpha(\omega) d\omega -$$

дисперсия составляющей ошибки, вызываемой задающим воздействием $\alpha(t)$;

$$\bar{\theta}_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K_s(j\omega)|^2 S_n(\omega) d\omega -$$

дисперсия составляющей ошибки, вызываемой помехой $n(t)$.

Рис. 7.6. Структурная схема системы, в которой задающее $\alpha(t)$ и возмущающее $n(t)$ воздействия приложены к различным точкам.



Если $\alpha(t)$ и $n(t)$ — зависимые функции, то выражение для $S_\theta(\omega)$ усложняется:

$$S_\theta(\omega) = |K_{\theta\alpha}(j\omega)|^2 S_\alpha(\omega) + |K_\beta(j\omega)|^2 S_n(\omega) + K_{\theta\alpha}^*(j\omega) S_{\alpha n}(\omega) K_\beta(j\omega) + K_{\theta\alpha}(j\omega) S_{n\alpha}(\omega) K_\beta^*(j\omega),$$

где $K_{\theta\alpha}^*(j\omega)$ и $K_\beta^*(j\omega)$ — величины, комплексно сопряженные с $K_{\theta\alpha}(j\omega)$ и $K_\beta(j\omega)$; $S_{\alpha n}(\omega)$ и $S_{n\alpha}(\omega)$ — взаимные спектральные плотности.

Случай 2. Задающее и возмущающее воздействия приложены в различных точках системы (рис. 7.6). Уравнения элементов системы:

$$\theta(p) = \alpha(p) - \beta(p);$$

$$\beta(p) = K_1(p) K_2(p) \theta(p) + K_2(p) n(p).$$

Найдя из первого уравнения $\beta(p) = \alpha(p) - \theta(p)$ и подставив во второе уравнение, получим уравнение системы для ошибки

$$[1 + K_p(p)] \theta(p) = \alpha(p) - K_2(p) n(p),$$

или

$$\theta(p) = \{1/[1 + K_p(p)]\} \alpha(p) - \{K_2(p)/[1 + K_p(p)]\} n(p),$$

где $K_p(p) = K_1(p) K_2(p)$.

Перепишем последнее выражение в виде

$$\theta(p) = K_{\theta\alpha}(p) \alpha(p) - K_{\theta n}(p) n(p) = \theta_\alpha(p) - \theta_n(p), \quad (7.20)$$

где

$K_{\theta\alpha}(p) = 1/[1 + K_p(p)]$ — передаточная функция системы по ошибке; $K_{\theta n}(p) = K_2(p)/[1 + K_p(p)]$ — передаточная функция системы по помехе.

В соответствии с формулой (7.7) спектральная плотность ошибки для случая некоррелированных $\alpha(t)$ и $n(t)$

$$S_\theta(\omega) = |K_{\theta\alpha}(j\omega)|^2 S_\alpha(\omega) + |K_{\theta n}(j\omega)|^2 S_n(\omega). \quad (7.21)$$

Подставив значения $S_\theta(\omega)$ из формулы (7.21) в (7.13), получим дисперсию ошибки

$$\begin{aligned} \bar{\theta}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K_{\theta\alpha}(j\omega)|^2 S_\alpha(\omega) d\omega + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K_{\theta n}(j\omega)|^2 S_n(\omega) d\omega = \bar{\theta}_\alpha^2 + \bar{\theta}_n^2. \end{aligned} \quad (7.22)$$

где $\bar{\theta}_\alpha^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K_{\theta\alpha}(j\omega)|^2 S_\alpha(\omega) d\omega$ — составляющая дисперсии ошибки системы, вызываемая задающим воздействием $\alpha(t)$;

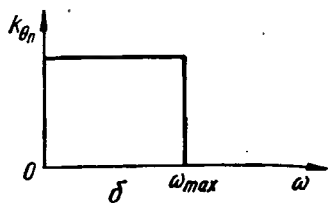
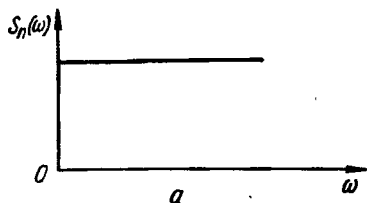


Рис. 7.7. К примеру определения среднеквадратической ошибки:

a — спектральная плотность помехи; b — амплитудно-частотная характеристика системы по помехе.

$\bar{\theta}_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K_{\theta n}(j\omega)|^2 S_n(\omega) d\omega$ — составляющая дисперсии ошибки, вызываемая помехой $n(t)$.

Среднеквадратическое значение ошибки системы

$$\varepsilon_{\theta} = \sqrt{\bar{\theta}^2} = \sqrt{\bar{\theta}_\alpha^2 + \bar{\theta}_n^2}. \quad (7.23)$$

Пример 1. Определить СКО системы, вызванной помехой. Помеха представляет собой «белый шум», спектральная плотность которого постоянна и равна $S_n(\omega) = S_n = \text{const}$ (рис. 7.7, a), а модуль КИФ системы по помехе (7.7, b)

$$|K_{\theta n}(j\omega)| = k_{\theta n} \text{ при } 0 < \omega < \omega_{\max};$$

$$|K_{\theta n}(j\omega)| = 0 \text{ при } \omega > \omega_{\max}.$$

Спектральная плотность помехи на выходе системы, или спектральная плотность ошибки, вызванной помехой:

$$S_{\theta n}(\omega) = k_{\theta n}^2 S_n \text{ при } 0 < \omega < \omega_{\max};$$

$$S_{\theta n}(\omega) = 0 \text{ при } \omega > \omega_{\max}.$$

Среднее значение квадрата ошибки

$$\bar{\theta}_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_{\theta n}^2 S_n d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} k_{\theta n}^2 S_n d\omega = \frac{k_{\theta n}^2}{\pi} S_n \omega_{\max}.$$

Среднеквадратическое значение ошибки

$$\varepsilon_{\theta} = k_{\theta n} \sqrt{(S_n/\pi) \omega_{\max}} = \text{const} \sqrt{\omega_{\max}},$$

т. е. СКО системы, вызываемой «белым шумом», пропорционально квадратному корню из ширины полосы пропускаемых частот, т. е. чем больше полоса пропускания системы, тем больше влияние на ошибку оказывают помехи.

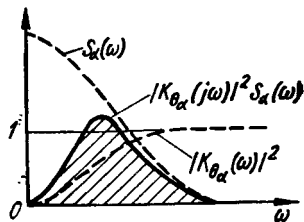
В приведенном примере рассмотрена система с весьма простой передаточной функцией и найдена ошибка только от помехи. Вычисление среднеквадратической ошибки реальных систем является более сложной задачей.

Вычисление среднеквадратической ошибки

Выше было показано, каким образом может быть найдена спектральная плотность ошибки динамической системы, находящейся в общем случае под влиянием задающего и возмущающего воздействия (см. выражение (7.21)), а также была получена формула (7.22), с помощью которой можно вычислить дисперсию ошибки. Известно несколько методов вычисления интегралов выражения (7.22). Рассмотрим графический и аналитический методы.

рис. 7.8. Графический метод определения средне-квadrатической ошибки.

Графический метод интегрирования целесообразно применять, если спектральные плотности $S_{\alpha}(\omega)$ и $S_{\Pi}(\omega)$ полезного сигнала и помехи заданы в виде экспериментальных кривых или когда спектральные плотности сигнала и помехи и амплитудно-частотные характеристики системы описываются сложными выражениями.



При этом методе для вычисления, например, интеграла $\bar{\theta}_{\alpha}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K_{\theta_{\alpha}}(j\omega)|^2 S_{\alpha}(\omega) d\omega$ строятся график спектральной плотности $S_{\alpha}(\omega)$ и график квадрата амплитудно-частотной характеристики системы $|K_{\theta_{\alpha}}(j\omega)|^2$ по ошибке (рис. 7.8). Перемножением ординат, указанных графиков при одинаковых частотах, находятся ординаты графика подынтегрального выражения. Затем с помощью планиметра или каким-либо другим приемом определяется площадь под кривой $|K_{\theta_{\alpha}}(j\omega)|^2 S_{\alpha}(\omega)$ и делится на π .

Аналитический метод вычисления величины $\bar{\theta}^2$ основан на предположении, что спектральные плотности и комплексные передаточные функции, входящие в выражение (7.22), могут быть представлены в виде дробно-рациональных функций от ω . При аналитическом методе вычисления $\bar{\theta}^2$ интегралы (7.22) приводятся к табличному интегралу вида

$$I_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(\omega)}{|H(j\omega)|^2} d\omega, \quad (7.24)$$

где

$$H(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n;$$

$$G(\omega) = b_0\omega^{2n-2} + b_1\omega^{2n-4} + \dots + b_{n-1}.$$

Ниже приведены результаты вычисления интеграла (7.24) для порядков $n = 1, 2, 3, 4$:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \frac{b_0}{2a_0a_1}; \quad I_2 = \frac{b_0 + a_0b_1/a_2}{2a_0a_1}; \\ I_3 &= \frac{a_2b_0 + a_0b_1 - a_0a_1b_2/a_3}{2a_0(a_1a_2 - a_0a_3)}; \\ I_4 &= \frac{b_0(a_2a_3 - a_1a_4) + a_0a_3b_1 + a_0a_1b_2 + (a_0b_3/a_4)(a_1a_2 - a_0a_3)}{2a_0(a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4)}. \end{aligned} \right\} \quad (7.25)$$

Методику приведения интегралов (7.22) к виду табличного интеграла рассмотрим на конкретном примере.

Пример вычисления среднеквадратической ошибки

Вычислим СКО системы автоматического сопровождения цели радиолокационной станции (рис. 7.9). На вход системы поступает задающее воздействие (например, азимут цели) с наложенной помехой $n(t)$. Входной сигнал системы $\varphi(t) = \alpha(t) + n(t)$ сравнивается с управляемой величиной $\beta(t)$ (азимутом антенны) следящей системы. Разность $\theta'(t) = \varphi(t) - \beta(t)$ поступает на усилитель следящей системы.

Передающая функция системы в разомкнутом состоянии

$$K_p(p) = [k_p(T_1 p + 1)] / [(T_2 p + 1)p], \quad k_p = k_1 k_2. \quad (7.26)$$

Ошибка системы $\theta(t) = \alpha(t) - \beta(t)$. Уравнение для ошибки в соответствии с формулой (7.18)

$$\theta(p) = K_{\theta\alpha}(p) \alpha(p) + K_3(p) n(p).$$

На основании формулы (7.7) запишем

$$S_\theta(\omega) = |K_{\theta\alpha}(j\omega)|^2 S_\alpha(\omega) + |K_3(j\omega)|^2 S_n(\omega), \quad (7.27)$$

где

$$\begin{aligned} K_{\theta\alpha}(j\omega) &= \frac{1}{1 + K_p(j\omega)} = \frac{(T_2 j\omega + 1)j\omega}{(T_2 j\omega + 1)j\omega + k_p(T_1 j\omega + 1)} = \\ &= \frac{(T_2 j\omega + 1)j\omega}{T_2(j\omega)^2 + (1 + k_p T_1)j\omega + k_p}; \end{aligned} \quad (7.28)$$

$$K_3(j\omega) = \frac{K_p(j\omega)}{1 + K_p(j\omega)} = \frac{k_p(T_1 j\omega + 1)}{T_2(j\omega)^2 + (1 + k_p T_1)j\omega + k_p}. \quad (7.29)$$

Определим спектральную плотность полезного сигнала $\alpha(t)$ и помехи $n(t)$. Предположим, что угловая координата цели $\alpha(t)$ относительно радиолокатора изменяется по графику, изображенному на рис. 7.10, а. Угловая скорость движения цели в течение некоторого интервала времени остается постоянной (рис. 7.10, б), причем моменты скачков и значения скоростей a_i — случайные величины. Такие изменения скорости могут соответствовать маневрам цели. Из рисунка видно, что кривая $\alpha(t)$ не является стационарным случайным процессом. Поэтому с помощью рассматриваемого статистического метода, справедливого лишь для случая стационарных случайных процессов, нельзя найти преобразования сигнала $\alpha(t)$ системой. Однако в данном случае задача упрощается: поскольку $\alpha(t)$ поступает на вход астатической системы с астатизмом первого порядка, то ошибка по положению от $\alpha(t)$ равна нулю. Основная ошибка системы вызывается первой производной задающего воздействия, т. е. скоростью цели, поэтому нас будут интересовать статистические характеристики производной $d\alpha(t)/dt$. Первую производную от $\alpha(t)$ (рис. 7.10, б) можно считать стационарным случайным процессом. Если предположить, что продолжительность промежутков τ_i подчиняется распределению Пуассона, то, как показано в [12], спектральная плотность производной $d\alpha(t)/dt$

$$S_\alpha(\omega) = 2\beta a^2 / (\omega^2 + \beta^2), \quad (7.30)$$

где a^2 — среднее значение квадрата скорости; $1/\beta$ — средняя длина промежутков времени, в течение которых скорость остается постоянной.

Если задающим воздействием считать $d\alpha(t)/dt$, а не $\alpha(t)$ (или в изображении по Лапласу $p\alpha(p)$, а не $\alpha(p)$), то для получения передаточной функции системы в этом случае надо обе части выражения для передаточной функции $K_{\theta\alpha}(p) =$

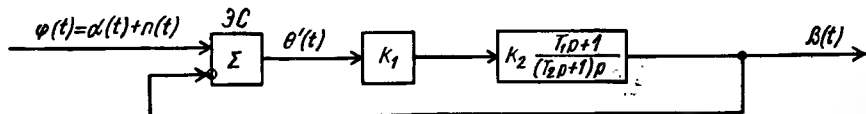


Рис. 7.9. Упрощенная структурная схема системы автосопровождения цели радиолокационной станции.

Рис. 7.10. Графики изменения угловой координаты (а) и скорости (б) цели.

$= \theta_{\alpha}(p)/\alpha(p)$ разделить на p :

$$K_{\theta_{\alpha}}(p)/p = \theta_{\alpha}(p)/p\alpha(p). \quad (7.31)$$

В качестве помехи возьмем белый шум, имеющий спектральную плотность

$$S_{\Pi}(\omega) = c^2 = \text{const}. \quad (7.32)$$

Подставив в выражение (7.27) значения $K_{\theta_{\alpha}}(j\omega)/j\omega$ и $K_{\alpha}(j\omega)$ из выражений (7.28) и (7.29) (при учете формулы (7.31)) и значения $S_{\alpha}(\omega)$ и $S_{\Pi}(\omega)$ из выражений (7.30) и (7.32), получим

$$S_0(\omega) = \left| \frac{T_2 j\omega + 1}{T_2(j\omega)^2 + (1 + k_p T_1)j\omega + k_p} \right|^2 \frac{2\beta a^2}{\omega^2 + \beta^2} + \left| \frac{k_p(T_1 j\omega + 1)}{T_2(j\omega)^2 + (1 + k_p T_1)j\omega + k_p} \right|^2 c^2,$$

т. е. среднее значение квадрата ошибки в соответствии с формулой (7.19) можно представить в виде суммы двух составляющих:

$$\bar{\theta}^2 = \bar{\theta}_{\alpha}^2 + \bar{\theta}_{\Pi}^2, \quad (7.33)$$

где

$$\bar{\theta}_{\alpha}^2 = 2\beta a^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{T_2 j\omega + 1}{T_2(j\omega)^2 + (1 + k_p T_1)j\omega + k_p} \right|^2 \frac{1}{\omega^2 + \beta^2} d\omega; \quad (7.34)$$

$$\bar{\theta}_{\Pi}^2 = c^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{k_p(T_1 j\omega + 1)}{T_2(j\omega)^2 + (1 + k_p T_1)j\omega + k_p} \right|^2 d\omega. \quad (7.35)$$

Найдем сначала значение $\bar{\theta}_{\alpha}^2$. Для этого приведем интеграл (7.34) к виду табличного интеграла (7.24): вычислим квадрат модуля числителя

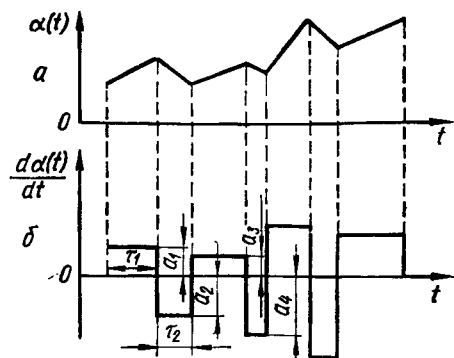
$$|T_2 j\omega + 1|^2 = T_2^2 \omega^2 + 1 \quad (7.36)$$

и введем сомножитель $(\omega^2 + \beta^2)$ в знаменателе под знак модуля

$$\omega^2 + \beta^2 = |j\omega + \beta|^2. \quad (7.37)$$

Учитывая формулы (7.36) и (7.37), запишем интеграл (7.34) в форме табличного интеграла

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_{\alpha}^2 &= 2\beta a^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(T_2^2 \omega^2 + 1) d\omega}{|[T_2(j\omega)^2 + (1 + k_p T_1)j\omega + k_p](j\omega + \beta)|^2} = \\ &= 2\beta a^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(T_2^2 \omega^2 + 1) d\omega}{|T_2(j\omega)^3 + (1 + k_p T_1 + \beta T_2)(j\omega)^2 + (\beta k_p T_1 + \beta + k_p)j\omega + \beta k_p|^2} = \\ &= 2\beta a^2 I_3. \end{aligned} \quad (7.38)$$



Из сравнения интеграла (7.38) с табличным интегралом (7.24) следует:

$$\left. \begin{aligned} H(j\omega) &= T_2(j\omega)^3 + (1 + k_p T_1 + \beta T_2)(j\omega)^2 + (\beta k_p T_1 + \beta + k_p)j\omega + \beta k_p; \\ G(\omega) &= T_2^2 \omega^2 + 1, \end{aligned} \right\}$$

$n = 3$ — степень $H(j\omega)$ знаменателя подынтегрального выражения;

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= T_2; \quad a_1 = 1 + k_p T_1 + \beta T_2; \quad a_2 = \beta k_p T_1 + \beta + k_p; \quad a_3 = \beta k_p; \\ b_0 &= 0; \quad b_1 = T_2^2; \quad b_2 = 1. \end{aligned} \right\} \quad (7.39)$$

Значение табличного интеграла I_3 согласно формулам (7.25)

$$I_3 = \frac{a_2 b_0 + a_0 b_1 - a_0 a_1 b_2 / a_3}{2 a_0 (a_1 a_2 - a_0 a_3)} = \frac{b_1 - a_1 b_2 / a_3}{2 (a_1 a_2 - a_0 a_3)}.$$

Подставив в эту формулу значения коэффициентов из (7.39) и умножив I_3 в соответствии с выражением (7.38) на $2\beta a^2$, получим

$$\bar{\theta}_\alpha^2 = \frac{\beta a^2 [T_2^2 - (1/k_p \beta) (1 + k_p T_1 + \beta T_2)]}{(1 + k_p T_1 + \beta T_2) (\beta k_p T_1 + \beta + k_p) - T_2 k_p \beta}. \quad (7.40)$$

Определим значение $\bar{\theta}_\Pi^2$. Для приведения интеграла (7.35) к виду табличного интеграла (7.24) вычислим квадрат модуля числителя

$$|T_1 j\omega + 1|^2 = T_1^2 \omega^2 + 1. \quad (7.41)$$

С учетом формулы (7.41) записываем интеграл (7.35) в форме табличного интеграла

$$\bar{\theta}_\Pi^2 = c^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(k_p^2 T_1^2 \omega^2 + k_p^2) d\omega}{|T_2(j\omega)^2 + (1 + k_p T_1)j\omega + k_p|^2} = c^2 I_2. \quad (7.42)$$

Из сравнении интеграла (7.42) с табличным (7.24) имеем:

$$\left. \begin{aligned} H(j\omega) &= T_2(j\omega)^2 + (1 + k_p T_1)j\omega + k_p; \\ G(\omega) &= k_p^2 T_1^2 \omega^2 + k_p^2; \quad n = 2, \end{aligned} \right\} \quad (7.43)$$

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= T_2; \quad a_1 = 1 + k_p T_1; \quad a_2 = k_p; \\ b_0 &= k_p^2 T_1^2; \quad b_1 = k_p^2. \end{aligned} \right\} \quad (7.44)$$

Значение табличного интеграла I_2 в соответствии с формулой (7.25) $I_2 = (b_0 + a_0 b_1 / a_2) / 2 a_0 a_1$. Подставив в эту формулу значения коэффициентов из формулы (7.44) и умножив I_2 в соответствии с выражением (7.42) на c^2 , получим

$$\bar{\theta}_\Pi^2 = c^2 I_2 = \frac{k_p c^2 (T_1^2 k_p + T_2)}{2 T_2 (1 + k_p T_1)}. \quad (7.45)$$

7.3. Статистический метод синтеза оптимальных параметров САУ

Задача статистического синтеза оптимальной системы

Одной из важнейших задач теории автоматического управления является задача отыскания (синтеза) оптимальной системы. Оптимальной системой является система, наилучшая в каком-либо отношении. Определение оптимальной системы возможно лишь тогда, когда вы-

бран критерий оптимальности. Экстремальное значение этого критерия (минимум или максимум) определяет оптимальную систему. При поступлении на вход САУ задающего воздействия $\alpha(t)$ и помехи $n(t)$, являющихся случайными функциями, правильный выбор системы может быть основан на статистическом критерии оптимальности. Наиболее широкое применение получил метод синтеза оптимальных систем на основе критерия минимума среднеквадратической ошибки, как сравнительно простой.

Постановка задачи синтеза состоит в следующем. Пусть на вход системы (см. рис. 7.5) поступают задающее воздействие $\alpha(t)$ и помеха $n(t)$, представляющие стационарные случайные процессы с известными спектральными плотностями и нулевыми средними значениями. Необходимо преобразовать полезный сигнал $\alpha(t)$ на входе в сигнал $h(t)$ на выходе в соответствии с формулой $h(p) = H(p) \alpha(p)$, где $H(p)$ — заданная преобразующая передаточная функция. Задача синтеза состоит в определении физически реализуемой передаточной функции системы $K_s(p)$ или импульсной переходной функции $k(t)$, при которой обеспечивается минимум среднего значения квадрата ошибки

$$\bar{\theta}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \{h(t) - \beta(t)\}^2 dt$$

между требуемым значением выходной величины $h(t)$ и реальным значением выходной величины $\beta(t)$.

Статистический метод синтеза оптимальных параметров системы

Поставленная выше задача является общей задачей синтеза оптимальной системы. Рассмотрим частную задачу синтеза — задачу определения оптимальных параметров системы, имеющую также большое практическое значение. Постановка частной задачи синтеза состоит в следующем. Структурная схема системы задана. Требуется определить оптимальные значения некоторых параметров уже выбранной схемы системы, при которых среднее значение квадрата ошибки принимает минимальное значение ($\bar{\theta}^2 = \min$).

Решение этой задачи приведем на примере следящей системы. При поступлении на вход системы (см. рис. 7.5) задающего воздействия $\alpha(t)$ и помехи $n(t)$ средний квадрат ошибки системы в соответствии с формулой (7.19)

$$\bar{\theta}^2 = \bar{\theta}_\alpha^2 + \bar{\theta}_n^2, \quad (7.46)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \bar{\theta}_\alpha^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K_{\theta\alpha}(j\omega)|^2 S_\alpha(\omega) d\omega; \\ \bar{\theta}_n^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K_s(j\omega)|^2 S_n(\omega) d\omega. \end{aligned} \right\} \quad (7.47)$$

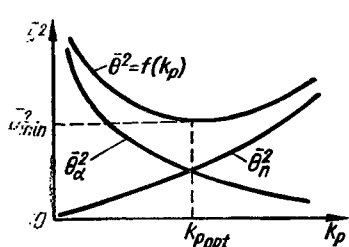


Рис. 7.11. Графическое определение $k_{p, \text{опт}}$

Из формулы (7.76) видно, что ошибка системы состоит из двух составляющих. Одна из них $\theta_\alpha(t)$ вызывается задающим воздействием (система не может точно воспроизводить задающее воздействие даже при отсутствии помехи). Другая составляющая $\theta_n(t)$ возникает в результате частичного воспроизведения системой помехи. Обычно при стремлении уменьшить первую составляющую (например, за счет повышения коэффициента усиления системы) увеличивается

вторая составляющая ошибки (при повышении коэффициента усиления расширяется полоса пропускания системы, улучшаются условия прохождения высокочастотной помехи на выход системы) и наоборот. Таким образом, задача синтеза состоит в том, чтобы выбрать оптимальные параметры системы; при которых суммарная ошибка является минимально возможной.

Пусть требуется определить оптимальные значения двух параметров, например коэффициента усиления системы в разомкнутом состоянии k_p и постоянной времени T_1 корректирующего устройства (см. формулу (7.26)).

Предварительно интегралы (7.34) и (7.35) приводятся к виду табличных интегралов (7.24) и вычисляются значения $\bar{\theta}_\alpha^2$ и $\bar{\theta}_n^2$ (см., например, формулы (7.40) и (7.45)). Как видно из формул, $\bar{\theta}_\alpha^2$, $\bar{\theta}_n^2$ и $\bar{\theta}^2$ являются функциями искомых параметров k_p и T_1 : $\bar{\theta}_\alpha^2 = f_1(k_p, T_1)$; $\bar{\theta}_n^2 = f_2(k_p, T_1)$; $\bar{\theta}^2 = f_3(k_p, T_1)$. Для определения оптимальных значений k_p и T_1 , соответствующих минимуму $\bar{\theta}^2$, вычисляют частные производные по k_p и T_1 и приравнивают их нулю:

$$\partial \bar{\theta}^2 / \partial k_p = 0; \quad \partial \bar{\theta}^2 / \partial T_1 = 0,$$

в результате получают два уравнения с двумя неизвестными, из которых определяют искомые оптимальные значения $k_{p, \text{опт}}$ и $T_{1, \text{опт}}$.

Чтобы убедиться в том, что получен минимум $\bar{\theta}^2$, а не максимум, вычисляют $\bar{\theta}^2$ при полученных значениях $k_{p, \text{опт}}$ и $T_{1, \text{опт}}$ и при значениях, близких к ним. Дисперсия ошибки $\bar{\theta}^2$ при других значениях k_p и T_1 должна оказаться больше.

Оптимальные значения параметров также можно определить графически. Задавая рядом значений параметра (например, k_p), вычисляют по формулам (7.40) и (7.45) значения $\bar{\theta}_\alpha^2$ и $\bar{\theta}_n^2$. Для наглядности строятся графики зависимости $\bar{\theta}_\alpha^2 = f_1(k_p)$ и $\bar{\theta}_n^2 = f_2(k_p)$ (рис. 7.11). Суммируя ординаты этих графиков, строят график зависимости $\bar{\theta}^2 = f_3(k_p)$, из которого определяют оптимальное значение $k_{p, \text{опт}}$, соответствующее $\bar{\theta}_{\min}^2$. График зависимости $\bar{\theta}^2 = f_3(k_p)$ можно построить и не прибегая к построению отдельных графиков $\bar{\theta}_\alpha^2 = f_1(k_p)$ и $\bar{\theta}_n^2 = f_2(k_p)$. Аналогично определяются оптимальные значения и других параметров.

Как уже отмечалось, если параметры системы выбраны из условия получения минимума СКО, то замкнутая система обычно имеет слабоватухающий переходный процесс. Поэтому после расчета оптимальных параметров необходимо определить показатели качества переходного процесса. Рациональное решение находится как компромиссное. Кроме того, при найденных оптимальных параметрах необходимо проверить, чтобы статические свойства системы также отвечали требованиям (коэффициент усиления k_p был не меньше необходимого с точки зрения статики).

Пример 2. На вход следящей системы (рис. 7.12) поступают задающее воздействие $\alpha(t)$ и помеха $n(t)$, спектральные плотности которых соответственно $S_\alpha(\omega) = \sigma^2 2c / (c^2 + \omega^2)$; $S_n(\omega) = a^2$. Определить оптимальное значение коэффициента усиления k_p системы, при котором $\bar{\theta}^2 = \min$.

В соответствии с формулой (7.19) дисперсия ошибки системы

$$\bar{\theta}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K_{\theta\alpha}(j\omega)|^2 S_\alpha(\omega) d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K_z(j\omega)|^2 S_n(\omega) d\omega = \bar{\theta}_\alpha^2 + \bar{\theta}_n^2. \quad (7.48)$$

Определяем передаточные функции

$$K_{\theta\alpha}(j\omega) = \frac{1}{1 + K_p(j\omega)} = \frac{j\omega}{j\omega + k_p}; \quad K_z(j\omega) = \frac{K_p(j\omega)}{1 + K_p(j\omega)} = \frac{k_p}{j\omega + k_p}$$

и их значения подставляем в формулу (7.48). Дисперсия составляющей ошибки, вызываемой $\alpha(t)$,

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_\alpha^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{j\omega}{j\omega + k_p} \right|^2 \frac{\sigma^2 2c}{c^2 + \omega^2} d\omega = \sigma^2 2c \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2 d\omega}{|j\omega + k_p|^2 (c + j\omega)^2} = \\ &= \sigma^2 2c \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2 d\omega}{|(j\omega)^2 + (k_p + c)j\omega + k_p c|^2} = \sigma^2 2c I_2. \end{aligned} \quad (7.49)$$

Из сравнения интеграла (7.49) с табличным интегралом (7.24) следует:

$$H(j\omega) = (j\omega)^2 + (k_p + c)j\omega + k_p c; \quad G(\omega) = \omega^2; \quad n = 2;$$

$$a_0 = 1; \quad a_1 = k_p + c; \quad a_2 = k_p c; \quad b_0 = 1; \quad b_1 = 0.$$

Находим табличный интеграл

$$I_2 = \frac{b_0 + a_0 b_1 / a_2}{2 a_0 a_1} = \frac{1}{2(k_p + c)}$$

и подставим его значение в формулу (7.49):

$$\bar{\theta}_\alpha^2 = \sigma^2 c / (k_p + c). \quad (7.50)$$

Дисперсия составляющей ошибки, вызываемой помехой $n(t)$:

$$\bar{\theta}_n^2 = a^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_p^2}{|j\omega + k_p|^2} d\omega = a^2 k_p^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{|j\omega + k_p|^2} = a^2 k_p^2 I_1. \quad (7.51)$$

Из сравнения интеграла (7.51) с табличным интегралом (7.24) следует:

$$H(j\omega) = j\omega + k_p; \quad G(\omega) = 1; \quad n = 1; \quad a_0 = 1; \quad a_1 = k_p; \quad b_0 = 1.$$

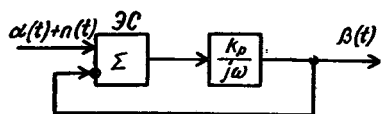


Рис. 7.12. Структурная схема следящей системы.

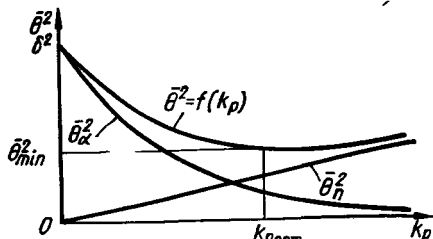


Рис. 7.13. К примеру графического определения оптимального значения $k_{p, \text{опт}}$.

Подставляя значение табличного интеграла $I_1 = b_0/2a_0a_1 = 1/2k_p$ в формулу (7.51), получаем

$$\bar{\theta}_n^2 = a^2 k_p / 2. \quad (7.52)$$

Дисперсия суммарной ошибки

$$\bar{\theta}^2 = \bar{\theta}_\alpha^2 + \bar{\theta}_n^2 = \sigma^2 c / (k_p + c) + a^2 k_p / 2.$$

Для определения $k_{p, \text{опт}}$ находим производную по k_p и приравниваем ее нулю:

$$\partial \bar{\theta}^2 / \partial k_p = -\sigma^2 c / (c + k_p)^2 + a^2 / 2 = 0,$$

откуда

$$k_{p, \text{опт}} = \frac{\sigma}{a} \sqrt{2c} - c. \quad (7.53)$$

Из формулы (7.53) видно, что чем больше удельный вес помехи во входном сигнале системы, тем $k_{p, \text{опт}}$ имеет меньшее значение, а чем больше удельный вес полезного сигнала σ , тем больше $k_{p, \text{опт}}$. Для графического определения $k_{p, \text{опт}}$ в соответствии с формулами (7.50) и (7.52) на рис. 7.13 построены графики $\bar{\theta}_\alpha^2 = f_1(k_p)$ и $\bar{\theta}_n^2 = f_2(k_p)$. Из рисунка видно, что с увеличением k_p дисперсия $\bar{\theta}_\alpha^2$ составляющей ошибки, вызываемой задающим воздействием, уменьшается, а дисперсия $\bar{\theta}_n^2$ составляющей ошибки, вызываемой помехой, увеличивается. Физическое объяснение этому явлению было дано раньше. График дисперсии суммарной ошибки $\bar{\theta}^2 = f(k_p)$ получен сложением ординат, упоминаемых выше графиков. Из кривой $\bar{\theta}^2 = f(k_p)$ находится коэффициент $k_{p, \text{опт}}$, соответствующий $\bar{\theta}_{\min}^2$.

ГЛАВА 8

Импульсные системы автоматического управления

8.1. Понятие о дискретных системах, классификация дискретных систем

Определение дискретной системы. Наряду с непрерывными системами, рассмотрению которых посвящены предыдущие главы, в технике широко применяются дискретные САУ. Система автоматического управления называется дискретной, если выходная величина какого-либо

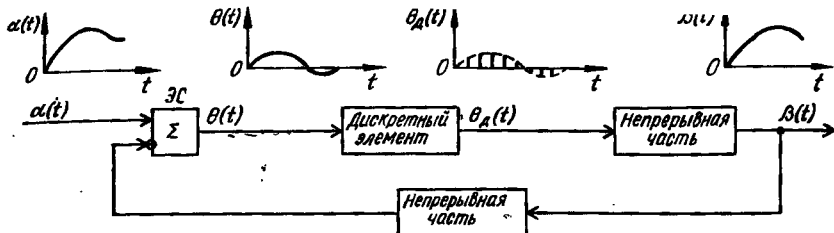


Рис. 8.1. Функциональная схема дискретной САУ.

из ее элементов имеет дискретный характер. Преобразование непрерывных сигналов в дискретные выполняется дискретным элементом.

Дискретная САУ схематически может быть изображена в виде соединения дискретного элемента и непрерывной части (рис. 8.1). Дискретный элемент дает на выходе ту или иную последовательность импульсов, которая при прохождении через непрерывную часть за счет ее сглаживающих свойств преобразуется в непрерывный сигнал. Последний, проходя через непрерывную обратную связь, сравнивается с входным сигналом системы в элементе сравнения ЭС и получающийся при этом сигнал ошибки воздействует на дискретный элемент. Дискретный элемент или специально вводится в систему с целью упрощения ее конструкции, улучшения некоторых динамических характеристик, или является необходимым элементом в силу особенностей технических средств (например, радиолокационная станция, использующая импульсный метод радиолокации, является импульсным элементом и входит в состав радиолокационных следящих систем).

Классификация дискретных систем в зависимости от вида квантования сигнала. В дискретных системах происходит преобразование дискретной информации. Различают дискретность сигнала *по уровню* и дискретность *по времени*.

Сигналы, дискретные по уровню, получаются в результате *квантования сигнала по уровню*, когда непрерывный сигнал заменяется ближайшими к ней фиксированными дискретными значениями $x_0, x_1, \dots, x_n$ в произвольные моменты времени (рис. 8.2, а).

Квантование по уровню в простейшем случае осуществляется релейным элементом. Выходная величина релейного элемента может принимать конечное число фиксированных уровней, равное обычно двум или трем. Если статическая характеристика релейного элемента имеет вид кривой 1 (рис. 8.2, г), то при входном сигнале, изменяющемся по кривой 2, выходная величина $x_{\text{вых}}$ (кривая 3) будет изменяться дискретно (скачком) всякий раз (в моменты t_1, t_2, t_3, t_4), когда входной сигнал проходит через значение x_0 срабатывания и отпускания реле — через уровень квантования. Как видно из рисунка, выходная величина в приведенном примере может принимать три (0, x_1, x_2) фиксированных значения.

Примером систем, в которых осуществляется квантование по уровню, могут служить *релейные системы* автоматического управления.

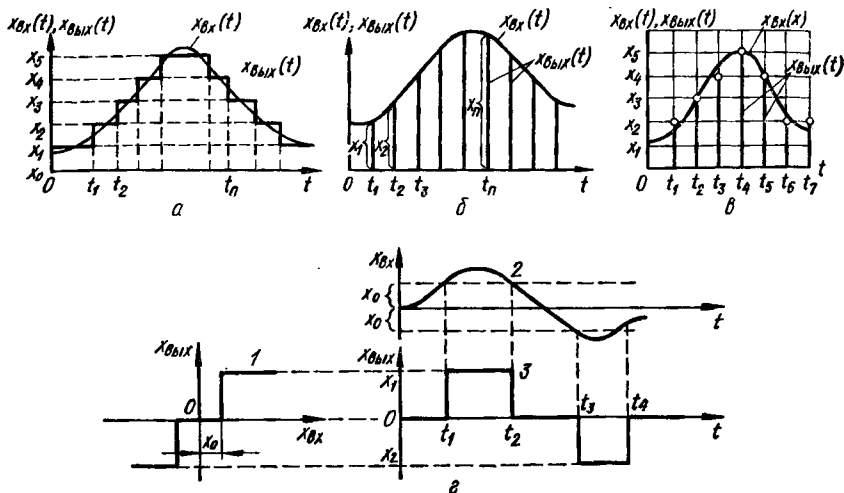


Рис. 8.2. Различные виды квантования сигнала:

а — по уровню; б — по времени; в — по уровню и по времени; г — квантование по уровню с помощью релейного элемента.

Сигналы, дискретные по времени, получаются в результате *квантования сигнала по времени*, т. е. фиксации дискретных моментов времени ($t_1, t_2, \dots, t_n$, рис. 8.2, б), при которых уровни входного сигнала могут принимать произвольные значения ($x_1, x_2, \dots, x_n$ соответственно). Квантование по времени осуществляется *импульсным элементом* и применяется в *импульсных системах*.

Наряду с отдельным квантованием по уровню и времени во многих случаях применяется *одновременное квантование по уровню и по времени*, когда непрерывный сигнал заменяется дискретными по уровню значениями, ближайшими к значениям непрерывного сигнала в дискретные моменты времени (рис. 8.2, в). Обычно такой дискретный сигнал в результате кодирования преобразуется в цифровой код и применяется в цифровых системах (рис. 8.3). Непрерывное задающее воздействие $\alpha(t)$ с помощью аналогово-цифрового преобразователя (АЦП) A/D квантуется по времени, по уровню, кодируется, т. е. преобразуется в цифровую форму $\alpha[n]$. Управляемая величина с помощью АЦП A/D также преобразуется в цифровую форму $\beta_{о.с}[n]$. Последовательности чисел $\alpha[n]$ и $\beta_{о.с}[n]$ сравниваются между собой в ЭС и их разность (сигнал рассогласования) $\theta[n]$ подается на цифровое вычислительное устройство (ЦВУ). Последнее осуществляет функцию

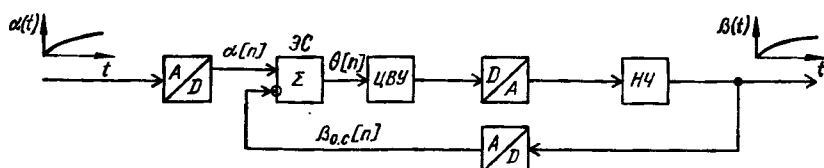


Рис. 8.3. Функциональная схема цифровой САУ.

нальное преобразование последовательности чисел в соответствии с заложенной программой. Выходной дискретный сигнал ЦВУ преобразуется в непрерывный с помощью цифро-аналогового преобразователя (ЦАП) D/A и воздействует на непрерывную часть $НЧ$ системы. В отличие от рассмотренной системы, содержащей непрерывную часть, имеются чисто дискретные системы, состоящие только из цифровых элементов.

Достоинства и недостатки дискретных систем. С выхода дискретного элемента информация о входном сигнале поступает лишь в дискретные моменты времени, что приводит к некоторой потере информации. В цифровых системах процессы преобразования сигналов обычно происходят не в реальном масштабе времени, вследствие чего вносятся определенное запаздывание. Эти факторы являются причиной понижения точности дискретных САУ. Однако дискретные системы обладают рядом преимуществ перед непрерывными системами:

1. С помощью одной дискретной САУ (автоматического управляющего устройства) можно осуществлять управление процессами в нескольких управляемых объектах поочередным подключением этих объектов к АУУ или обеспечивать управление многими параметрами одного технологического процесса (объекта).

2. Дискретные элементы обеспечивают более высокую точность преобразования и передачи информации. В цифровых системах имеется возможность реализации сложных алгоритмов управления. Благодаря этому точность дискретных, в частности цифровых, САУ может быть выше точности непрерывных систем.

3. Дискретные системы во многих случаях оказываются проще в конструктивном отношении аналогичных непрерывных систем.

8.2. Определение импульсной системы

Виды импульсной модуляции.

Классификация импульсных элементов по виду модуляции.

Типы импульсных систем

Импульсная система содержит *импульсный элемент (ИЭ)*, осуществляющий квантование сигнала по времени, т. е. преобразование непрерывного входного сигнала $x(t)$ в последовательность модулированных импульсов. Поэтому импульсный элемент можно рассматривать как модулятор импульсов, осуществляющий модуляцию какого-либо параметра периодически повторяющихся импульсов по закону изменения входного непрерывного сигнала, называемого модулирующим сигналом. Основными параметрами последовательности импульсов являются *амплитуда* (высота) импульса A , *длительность* (ширина) импульса $\tau = \gamma T$, *положение импульса* αT внутри периода повторения T импульсов (временной сдвиг или фаза импульса) и *период повторения* импульсов T . В зависимости от того, какой из параметров последовательности импульсов изменяется в соответствии с изменением модулирующего сигнала, различают следующие виды импульсной модуляции: *амплитудно-импульсную модуляцию (АИМ)*, *широотно-импульсную модуляцию (ШИМ)* и *временную импульсную модуляцию (ВИМ)*.

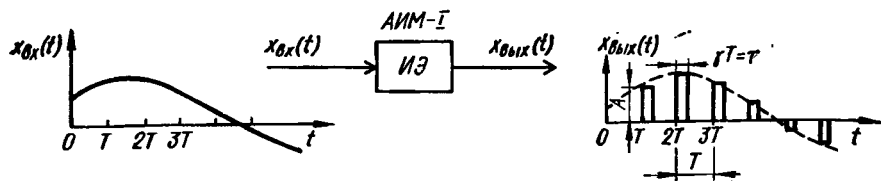


Рис. 8.4. Амплитудно-импульсный элемент первого рода.

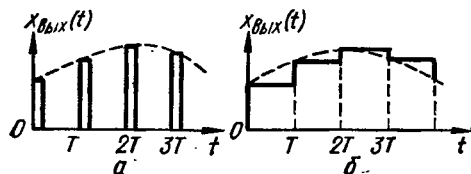


Рис. 8.5. Последовательности импульсов на выходе амплитудно-импульсного элемента первого рода с длительностью импульсов $\tau \ll T$ (а) и $\tau = T$ (б).

Если модулируемый параметр остается постоянным в течение времени существования импульса, то имеем импульсную модуляцию первого рода — ИМІ, если же он изменяется в соответствии с текущим значением модулирующей функции, то имеем импульсную модуляцию второго рода — ИМІІ. Импульсные элементы в зависимости от вида и рода импульсной модуляции подразделяются на *амплитудные, широтные и временные импульсные элементы* соответственно первого и второго рода.

В амплитудном импульсном элементе происходит амплитудно-импульсная модуляция (АИМ). Если на вход амплитудного ИЭ, осуществляющего АИМІ (рис. 8.4), подать непрерывный сигнал $x_{ax}(t)$, то на выходе будем иметь последовательность импульсов постоянной длительности с периодом повторения T , амплитуда которых пропорциональна значениям модулирующего (входного) сигнала в равноотстоящие дискретные моменты времени (в моменты возникновения импульсов). Частными случаями амплитудного импульсного элемента с АИМІ являются: а) ИЭ, выходные импульсы которого имеют длительность $\tau = \gamma T$ значительно меньшую, чем период повторения T ($\tau \ll T$) (рис. 8.5, а); б) ИЭ, длительность импульсов которого равна периоду повторения T импульсов (рис. 8.5, б). Такой импульсный элемент получается в результате «растягивания» (запоминания) кратковременных импульсов на время периода с помощью схемы фиксатора.

При АИМІІ амплитуда импульса изменяется в течение времени существования импульса в соответствии с текущим значением модулирующего сигнала (рис. 8.6).

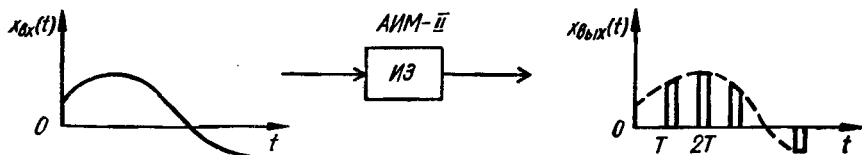


Рис. 8.6. Амплитудно-импульсный элемент второго рода.

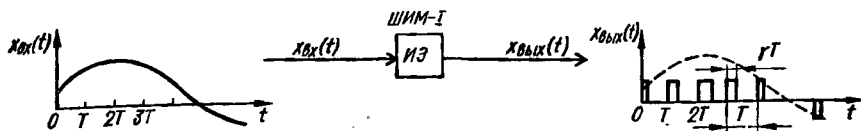


Рис. 8.7. Широтно-импульсный элемент первого рода.

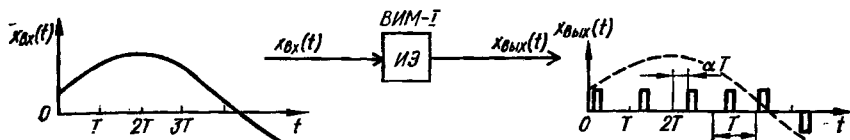


Рис. 8.8. Временной импульсный элемент первого рода.

Полезная информация на выходе амплитудного импульсного элемента выражена огибающей амплитудно-модулированной последовательности импульсов. Для получения этой информации необходимо выделить огибающую последовательности импульсов.

В широтном импульсном элементе происходит широтно-импульсная модуляция (ШИМ) (рис. 8.7). ИЭ с ШИМ-I формирует последовательность импульсов с периодом повторения T одинаковой амплитуды, но ширина импульсов $\tau = \gamma T$ пропорциональна значениям модулирующего (входного) сигнала $x_{вх}(t)$ в моменты возникновения импульсов.

Временной импульсный элемент осуществляет временную импульсную модуляцию. Если на вход временного ИЭ первого рода (ВИМ-I) (рис. 8.8) подать непрерывный сигнал $x(t)$, то на выходе будем иметь последовательность импульсов одинаковой амплитуды и ширины, сдвиг которых по времени (по фазе) αT относительно дискретных моментов времени квантования $0, T, 2T, \dots, nT$ соответствует значениям входного сигнала в эти дискретные моменты времени. Временно-модулированную последовательность импульсов можно рассматривать как фазо-модулированную последовательность импульсов.

В зависимости от вида и рода (первого и второго рода) импульсного элемента системы автоматического управления подразделяются на три типа: амплитудные импульсные системы (АИС); широтные импульсные системы (ШИС), временные импульсные системы (ВИС).

Импульсные САУ получили широкое распространение в технике. Они, например, используются для автоматической регулировки усиления, автоматической подстройки частоты приемников импульсных сигналов, автоматического сопровождения цели по дальности, автоматического сопровождения целей по угловым координатам при работе радиолокационной станции в режиме кругового обзора, автоматического управления движением транспорта на магнитном подвесе и т. д.

Параметры импульсного элемента

Коэффициент усиления k_n импульсного элемента — отношение величины модулируемого параметра выходной последовательности импульсов к величине входного сигнала $x_{вх}(t)$ в соответствующий

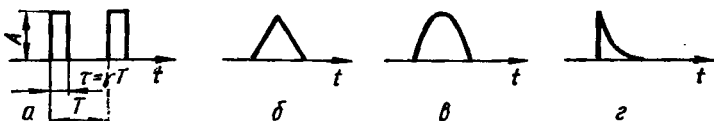


Рис. 8.9. Различные формы импульсов:

a — прямоугольная; b — треугольная; v — синусоидальная; $г$ — экспоненциальная.

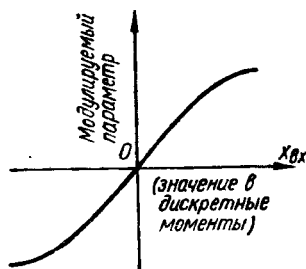


Рис. 8.10. Характеристика импульсного элемента.

дискретный момент времени. Например, коэффициент усиления амплитудного импульсного элемента $k_n = A/x_{вх}$ (где A — амплитуда импульса; $x_{вх}$ — соответствующее дискретное значение входной величины).

Период повторения импульсов T или частота повторения импульсов $\omega_0 = 2\pi/T$.

Длительность импульсов $\tau = \gamma T$ (где γ — скважность импульсов, показывающая, какую часть периода повторения импульсов занимает длительность импульса) или относительная длительность импульса $\gamma = \tau/T$.

Форма импульса $S(t)$ может быть прямоугольной, треугольной, синусоидальной, экспоненциальной (рис. 8.9) и т. д. Перечисленные параметры импульсного элемента показаны на рис. 8.9.

Характеристика импульсного элемента — зависимость величины модулируемого параметра выходной последовательности импульсов от соответствующих дискретных значений входной величины (рис. 8.10). На линейном участке крутизна характеристики импульсного элемента равна коэффициенту усиления импульсного элемента (для малых значений входного сигнала): $k_n = A/x_{вх}$.

Импульсные элементы разнообразны по конструкции (механические, электромеханические, фотоэлектрические, электронные). В качестве импульсного элемента может быть простейший ключ и сложное устройство, например, радиолокационная станция. Наиболее широкое применение на практике получили амплитудные импульсные элементы, осуществляющие амплитудно-импульсную модуляцию первого и второго рода. В дальнейшем рассматриваются импульсные системы с амплитудным импульсным элементом первого рода. В качестве примера импульсной системы рассмотрим систему автоматического сопровождения цели по дальности импульсной радиолокационной станции.

Система автоматического сопровождения цели по дальности импульсной радиолокационной станции (РЛС)

Функциональная схема системы (рис. 8.11). Задающим воздействием системы является дальность $D_1(t)$ до цели, непрерывно изменяющаяся во времени. Эта дальность измеряется с помощью РЛС. Информация о дальности с выхода приемника импульсной РЛС поступает в дискретные моменты времени с частотой, равной частоте посылок стан-

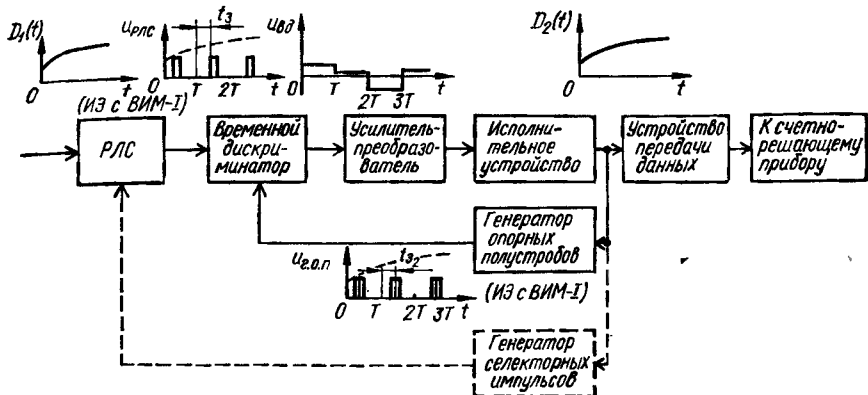


Рис. 8.11. Функциональная схема системы автоматического сопровождения цели по дальности импульсной РЛС.

ции. Эта информация содержится во времени запаздывания t_3 отраженного сигнала от цели относительно импульса, излучаемого передатчиком. Действительно, дальность $D_1(t)$ до цели пропорциональна времени запаздывания t_3 : $D_1(t) = ct_3/2$ (где c — скорость распространения электромагнитных волн).

Если дальность до цели изменяется во времени, например, по кривой $D_1(t)$ (рис. 8.11), то на выходе приемника РЛС появляется последовательность отраженных импульсов $U_{рлс}(t)$. Моменты $0, T, 2T, \dots, nT$ соответствуют моментам излучения импульса передатчиком. Как видно из рисунка, радиолокатор осуществляет временную импульсную модуляцию: входным сигналом (дальностью до цели) модулируется последовательность импульсов по времени. Поэтому РЛС в этом случае может быть представлена временным импульсным элементом первого рода.

Система автоматического сопровождения цели по дальности по дискретным значениям дальности воспроизводит непрерывную функцию изменения дальности до цели. Эта система является импульсной следящей системой, использующей принцип управления по отклонению. В состав системы (рис. 8.11) входят: временной дискриминатор, являющийся элементом сравнения, усилитель-преобразователь, исполнительное устройство, генератор опорных полусторобов дальности.

Система работает следующим образом. В течение коротких отрезков времени, когда вращающийся луч антенны проходит через направление на цель, происходит облучение цели импульсами электромагнитной энергии, которые отражаются от цели, принимаются, усиливаются, преобразуются радиолокационной станцией и поступают на вход системы автоматического сопровождения цели по дальности. При каждом повороте антенны в период облучения цели на вход системы поступает короткая пачка импульсов. Истинное расстояние до цели $D_1(t)$ пропорционально временному сдвигу (запаздыванию t_3) каждого поступающего импульса относительно момента его послышки. С другой стороны, дальность до цели $D_2(t)$ вырабатывается системой. Эта дальность

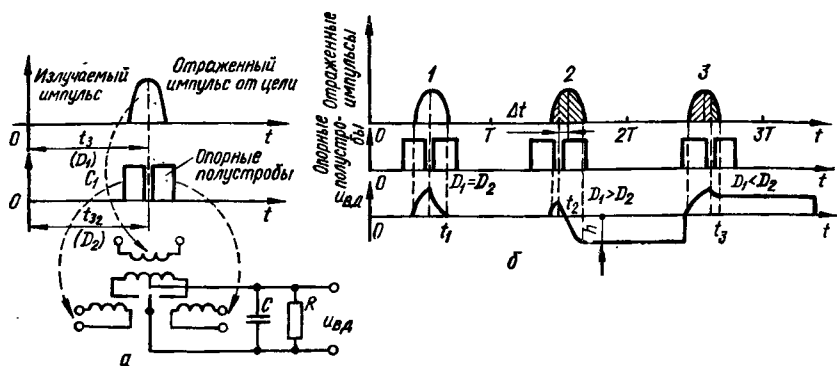


Рис. 8.12. Упрощенная принципиальная схема временного дискриминатора (а) и примерные формы его напряжений (б).

сравнивается с задающим воздействием $D_1(t)$ и получающееся при этом отклонение $D_2(t)$ от $D_1(t)$ (т. е. ошибка) используется для управления исполнительным устройством с тем, чтобы это отклонение уменьшилось.

Поскольку информация о дальности $D_1(t)$ на вход системы поступает в виде последовательности импульсов, модулированных по времени, а дальность $D_2(t)$, вырабатываемая системой, является непрерывной величиной, то для удобства сравнения $D_2(t)$ с $D_1(t)$ дальность $D_2(t)$ преобразуется также в дискретную величину. Для этой цели предназначен генератор опорных полуструбов, который осуществляет временную модуляцию последовательности импульсов дальностью $D_2(t)$. Задержка во времени $t_{з_2}$ опорных полуструбов $U_{\text{гоп}}$ (рис. 8.11), вырабатываемых генератором, относительно моментов излучения импульсов радиолокационной станцией, пропорциональна дальности до цели $D_2(t)$ в дискретные моменты времени. Таким образом, генератор опорных полуструбов является импульсным элементом с ВИМІ.

Дальности $D_1(t)$ и $D_2(t)$ сравниваются в дискретные моменты времени во временном дискриминаторе сравнением временных положений отраженных от цели импульсов и опорных полуструбов. Отклонение $\Delta D(t)$ дальности $D_2(t)$ от дальности $D_1(t)$

$$\Delta D(t) = D_1(t) - D_2(t) = c(t_3 - t_{з_2})/2 = c\Delta t/2,$$

проявляющееся в разности времен запаздывания Δt отраженного импульса t_3 и опорных полуструбов $t_{з_2}$,

$$\Delta t = 2\Delta D(t)/c, \quad (8.1)$$

преобразуется временным дискриминатором в напряжение ошибки. Последнее используется для управления исполнительным устройством, изменяющим $D_2(t)$ таким образом, что отклонение $D_2(t)$ от $D_1(t)$ уменьшается.

Упрощенная схема временного дискриминатора и примерные формы напряжений, поясняющие принцип его работы, изображены на рис. 8.12. Временной дискриминатор интегрирует отраженный от цели импульс за время левого C_1 , а затем за время правого C_2 опорного

полустроба. На выходе дискриминатора в моменты окончания отраженного импульса (на рис. 8.12, б в моменты t_1, t_2, t_3) создается напряжение, значение которого h пропорционально разности площадей перекрытия отраженного импульса левым и правым полустробиами. Поскольку эта разность площадей при малых значениях временного сдвига Δt отраженного импульса и опорных полустробиов пропорциональна временному сдвигу Δt , то в соответствии с выражением (8.1) уровень h выходного напряжения пропорционален ошибке сопровождения цели по дальности в дискретные моменты времени:

$$h = k\Delta t = k2\Delta D/c. \quad (8.2)$$

Уровень напряжения сигнала ошибки, соответствующий моменту окончания отраженного сигнала, запоминается (фиксируется) на весь период повторения T благодаря цепочке RC с большой постоянной времени. Перед приходом нового отраженного сигнала зафиксированный уровень сигнала снимается (конденсатор C быстро разряжается, схема разряда C на рис. 8.12, а не приведена). Позиция 1 (рис. 8.12, б) соответствует случаю точного совпадения $D_1(t)$ и $D_2(t)$, при этом опорные полустробиы расположены симметрично относительно отраженного импульса. Уровень h (амплитуда) выходного импульса равен нулю, так как к моменту окончания отраженного импульса напряжение на конденсаторе становится равным нулю. Импульс, возникающий на выходе схемы в период существования отраженного импульса, в расчет не принимается — его длительность во много раз меньше длительности импульса, равного периоду повторения T . Позиция 2 отражает случай, когда $D_2(t)$ не равно $D_1(t)$, что соответствует нарушению симметрии расположения опорных полустробиов относительно отраженного импульса. На выходе схемы в момент окончания отраженного импульса появляется импульс, фиксированный уровень h которого пропорционален ошибке, а его полярность определяется знаком рассогласования. При изменении знака рассогласования напряжение ошибки изменяет полярность (позиция 3). Как видно из рисунка, на выходе временного дискриминатора со схемой фиксации имеет место амплитудно-модулированная ошибкой последовательность импульсов напряжения $U_{\text{вд}}$ с длительностью, равной периоду повторения T .

Напряжение $U_{\text{вд}}$ поступает на усилитель-преобразователь (рис. 8.11). Последний в общем случае содержит как усилительные элементы, так и корректирующие устройства, осуществляющие необходимое преобразование сигнала рассогласования. Выход усилителя-преобразователя соединен со входом исполнительного устройства. С выхода последнего непрерывное значение дальности $D_2(t)$ передается через устройство передачи данных на счетно-решающий прибор. Кроме того, $D_2(t)$ поступает в цепь обратной связи на генератор опорных полустробиов, который вырабатывает опорные полустробиы, задержанные во времени на величину, соответствующую дальности $D_2(t)$.

В качестве исполнительного устройства часто используется двигатель с фазовращателем. При вращении двигателя изменяется фаза синусоидального напряжения на выходе фазовращателя. Нулевой фазе этого напряжения соответствует появление опорных полустробиов.

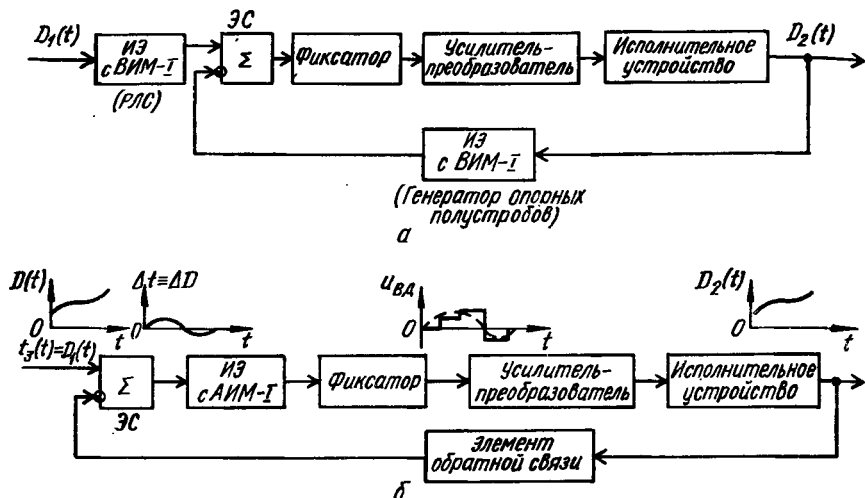


Рис. 8.13. Преобразование функциональной схемы импульсной системы автоматического сопровождения цели по дальности:

а — исходная схема; б — преобразованная схема.

В результате вращения двигателя изменяется временное положение опорных полустробиов в направлении устранения их несоответствия временному положению отраженного импульса. Так происходит автоматическое слежение по дальности или преобразование дискретных данных о дальности в непрерывную величину.

Необходимо заметить, что напряжение ошибки на вход усилителя-преобразователя в рассматриваемой схеме поступает в виде «пачки» амплитудно-модулированных растянутых импульсов через промежутки времени T_a , равные периоду вращения антенны РЛС. Продолжительность каждой пачки импульсов напряжения ошибки очень мала по сравнению с периодом обзора. Поэтому пачки импульсов можно рассматривать как одиночные импульсы ошибки, следующие через промежутки времени T_a . Это позволяет рассматривать систему автоматического сопровождения как замкнутую импульсную систему с периодом повторения T_a .

Станция кругового обзора может обеспечить автоматическое сопровождение многих целей по дискретно получаемым данным, но для сопровождения каждой из целей станция должна иметь отдельный канал, начинающийся с выхода приемного устройства. Этот канал включает в себя систему автоматического сопровождения. На вход отдельной системы должны поступать сигналы, отраженные только от одной выбранной цели. Для этого канал открывается селекторными импульсами, вырабатываемыми специальным генератором (см. рис. 8.11), и пропускаются отраженные импульсы только от одной сопровождаемой цели. Исполнительное устройство, подавая выходной сигнал на генератор селекторных импульсов, обеспечивает соответствующее плавное перемещение селекторного импульса в интервале между облучениями,

так что положение селекторного импульса к моменту поступления сигнала от выбранной цели будет совпадать с положением отраженного сигнала от этой цели.

Структурная схема системы автоматического сопровождения цели по дальности. Прежде чем составить структурную схему системы, выполним некоторые преобразования ее функциональной схемы. В исходной функциональной схеме (рис. 8.13, а) системы один из импульсных элементов (РЛС) включен вне замкнутого контура системы, а второй (генератор опорных полустробов) — в обратную цепь ее замкнутого контура. Оба импульсных элемента относятся к временным импульсным элементам. С выхода этих элементов сигналы поступают на временной дискриминатор. Однако выходное напряжение временного дискриминатора (сигнал рассогласования) представляет собой не временно-модулированную последовательность импульсов (как на его входе), а амплитудно-модулированную, т. е. во временном дискриминаторе происходит преобразование одного вида импульсной модуляции в другой. Поскольку основным сигналом системы является сигнал рассогласования, то, очевидно, не изменяя динамические свойства системы, можно заменить отмеченные ИЭ с ВИМ одним амплитудным ИЭ, включенным на выходе элемента сравнения и осуществляющим амплитудную модуляцию последовательности импульсов непрерывно изменяющейся ошибкой системы. Коэффициент усиления этого импульсного элемента в соответствии с формулой (8.2) равен $k = h/\Delta D = k_2/c$ (где k — коэффициент усиления временного дискриминатора). Преобразованная функциональная схема импульсной системы автоматического сопровождения цели по дальности изображена на рис. 8.13, б.

Для составления структурной схемы системы необходимо ее элементы заменить динамическими звеньями. В простейшем случае усилитель-преобразователь представляется пропорциональным звеном, а исполнительный двигатель — интегрирующим звеном. Структурная схема такой простейшей системы изображена на рис. 8.14, а. Как видим, система содержит одно интегрирующее звено, т. е. является астатической системой первого порядка астатизма. В такой системе устраняется лишь ошибка по положению. Передаточная функция непрерывной части системы (рис. 8.14, а) $K_{нт}(p) = k_1/p$. Для устранения установившейся скоростной ошибки обычно в систему в качестве корректирующего устройства вводят второе интегрирующее (чаще всего электронное) звено (рис. 8.14, б). Передаточная функция непрерывной части системы в этом случае

$$K_{нт}(p) = \left(k_1 + \frac{k_2}{p}\right) \frac{1}{p} = \frac{k_1}{p} + \frac{k_2}{p^2}, \quad (8.3)$$

или

$$K_{нт}(p) = (k_1 p + k_2)/p^2 = k_2(T_1 p + 1)/p^2, \quad T_1 = k_1/k_2. \quad (8.4)$$

Основными свойствами систем являются измерение ошибки только в дискретные моменты времени; в промежутках между двумя после-

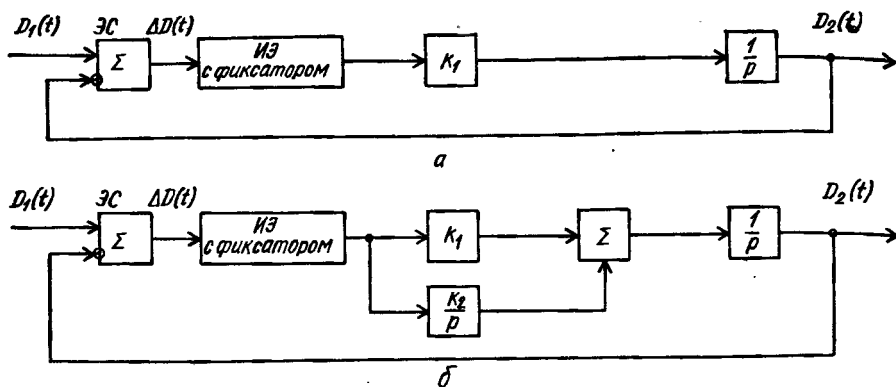


Рис. 8.14. Структурные схемы импульсной системы автоматического сопровождения цели по дальности с одним (а) и двумя (б) интегрирующими звеньями.

довательными измерениями система управления действует соответственно со значением ошибки, измеренным в конце предыдущего интервала.

Понятие об импульсных системах с мгновенным и конечным временем съема данных

В рассмотренной системе автоматического сопровождения цели по дальности временной дискриминатор в течение всего времени действия отраженного импульса сравнивает площади перекрытия этого импульса левым и правым полустрелами путем последовательного во времени заряда и разряда (перезаряда) конденсатора C (рис. 8.12), а результат сравнения — информацию о рассогласовании — выдает лишь в моменты времени, соответствующие окончанию отраженного импульса. Поскольку в период поступления отраженного от цели импульса отсутствует информация об ошибке и управляемая величина $D_2(t)$ не изменяется в соответствии с изменением входной величины $D_1(t)$, то можно считать, что в период действия импульса цепь обратной связи системы не замкнута и замыкается лишь на мгновение перед поступлением импульса. Импульсные системы, подобные описанной, называются системами с *мгновенным съемом данных*. Последние относятся к импульсным системам первого рода.

Имеются системы, у которых информация о текущем значении рассогласования поступает непрерывно в течение всего времени действия импульса (системы замыкаются на период действия импульса). Такие системы называются системами с *конечным временем съема данных*. Импульсные системы с конечным временем съема данных относятся к импульсным системам второго рода. Примером системы с конечным временем съема данных является система автоматического сопровождения цели по угловым координатам моноимпульсной радиолокационной станции, использующей суммарно-разностный метод. В этой системе на выходе фазочувствительного выпрямителя в течение всего времени од-

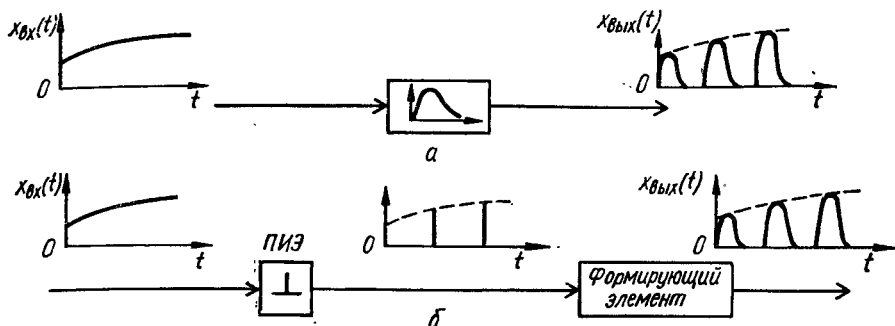


Рис. 8.15. Замена реального импульсного элемента (а) соединением простейшего импульсного элемента и формирующего элемента (б).

новременного поступления на него принятых двумя рупорными антеннами и соответствующим образом преобразованных двух радиоимпульсов появляются видеоимпульсы напряжения, мгновенные значения которых соответствуют текущему значению ошибки системы.

8.3. Эквивалентная схема импульсной системы

Представление импульсного элемента

в виде соединения простейшего импульсного элемента и формирующего элемента

С целью облегчения исследования импульсных систем их реальные импульсные элементы (рис. 8.15, а) заменяют последовательным соединением простейшего импульсного элемента ПИЭ и формирующего элемента (рис. 8.15, б). Простейший импульсный элемент под воздействием непрерывного входного сигнала формирует мгновенные, бесконечно большой амплитуды, равноотстоящие один от другого импульсы, площади которых равны значениям входного сигнала в моменты, непосредственно предшествующие возникновению импульсов (рис. 8.15, б). Простейший амплитудный импульсный элемент можно также определить как амплитудно-импульсный модулятор, непрерывный входной сигнал $x_{\text{вх}}(t)$ которого модулирует несущую в виде последовательности кратковременных (мгновенных) бесконечно большой амплитуды импульсов с единичной площадью (импульсов вида $\delta(t)$ функции) и частотой повторения $1/T$, где T — период повторения импульсов. Площадь выходных импульсов модулятора равна значениям входного сигнала в дискретные моменты времени. Формирующий элемент (рис. 8.15, б) представляет собой непрерывную часть и характеризуется тем, что его реакция на импульс вида дельта-функции совпадает по своей форме с импульсами $S(t)$ на выходе реального импульсного элемента (рис. 8.15, а).

Передаточная функция формирующего элемента

Реакция звена на мгновенный импульс единичной площади $\delta_T(t)$ называется *импульсной переходной*, или *весовой функцией* этого элемента. Реакция формирующего элемента на $\delta_T(t)$ также является импульсной переходной (весовой) функцией $k_{\Phi_T}(t)$ этого элемента. Поскольку изображение Лапласа $L\{\delta(t)\} = 1$, то изображение $L\{k_{\Phi_T}(t)\}$ импульсной переходной функции $k_{\Phi_T}(t)$ формирующего элемента равно передаточной функции $K_{\Phi_T}(p)$ этого элемента:

$$L\{k_{\Phi_T}(t)\} = K_{\Phi_T}(p) L\{\delta(t)\} = K_{\Phi_T}(p),$$

т. е. для определения передаточной функции $K_{\Phi_T}(p)$ формирующего элемента нужно определить изображение Лапласа импульса на выходе реального импульсного элемента.

В качестве примера определим передаточную функцию $K_{\Phi_T}(p)$ формирующего элемента, на выходе которого имеется последовательность прямоугольных импульсов. Импульсная переходная функция $k_{\Phi_T}(t)$ данного формирующего элемента представляет собой прямоугольный импульс (рис. 8.16, в,) который можно представить как сумму двух ступенчатых функций, сдвинутых во времени на $\tau = \gamma T$ и имеющих различную полярность (рис. 8.16, а, б):

$$K_{\Phi_T}(t) = 1(t) - 1(t - \gamma T), \quad \gamma = \tau/T.$$

Поскольку изображение по Лапласу единичной ступенчатой функции $\int_0^{\infty} 1(t) e^{-pt} dt = 1/p$, а единичной ступенчатой функции, смещенной на $\gamma T = \tau$, в соответствии с теоремой смещения операционного исчисления $\int_0^{\infty} (1 - \gamma T) e^{-pt} dt = e^{-\gamma T p}/p$, то изображение по Лапласу импульсной переходной функции $k_{\Phi_T}(t)$, имеющей вид прямоугольного импульса единичной амплитуды,

$$K_{\Phi_T}(p) = L\{k_{\Phi_T}(t)\} = \frac{1}{p} - \frac{e^{-\gamma T p}}{p} = \frac{1 - e^{-\gamma T p}}{p}. \quad (8.5)$$

Согласно определению, полученное изображение является передаточной функцией формирующего элемента, соответствующего импульсному элементу с выходными импульсами прямоугольной формы.

Числитель формулы (8.5) можно разложить в ряд Маклорена около $\gamma = 0$:

$$1 - e^{-\gamma T p} = 1 - [1 - \gamma T p + (-\gamma T p)^2/2! + \dots].$$

Если $\gamma \ll 1$, то ряд быстро сходится и можно ограничиться первыми двумя членами: $1 - e^{-\gamma T p} = \gamma T p$. Подставив полученное значение числителя в формулу (8.5), получим

$$K_{\Phi_T}(p) = \gamma T. \quad (8.6)$$

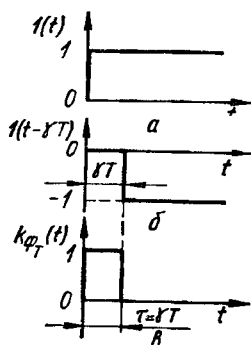


Рис. 8.16. Формирование прямоугольного импульса с помощью двух ступенчатых функций.

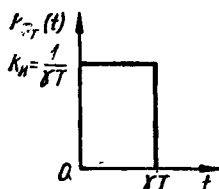


Рис. 8.17. Прямоугольный импульс единичной площади.

Для прямоугольного импульса, имеющего амплитуду k_n ,

$$K_{ФТ}(p) = k_n(1 - e^{-\gamma T p})/p. \quad (8.7)$$

Если $\gamma \ll 1$, то

$$K_{ФТ}(p) = k_n \gamma T. \quad (8.8)$$

Для прямоугольного импульса единичной площади (рис. 8.17) с амплитудой $k_n = 1/\gamma T$ (так как $k_n \gamma T = 1$) при $\gamma \ll 1$

$$K_{ФТ}(p) = k_n \gamma T = 1. \quad (8.9)$$

Изображение по Лапласу прямоугольного импульса единичной амплитуды при $\gamma = 1$ ($\gamma T = T$) определяется выражением

$$K_{ФТ}(p) = (1 - e^{-Tp})/p. \quad (8.10)$$

Формирующий элемент с передаточной функцией, определяемой выражением (8.10), называют *фиксатором нулевого порядка*, или просто

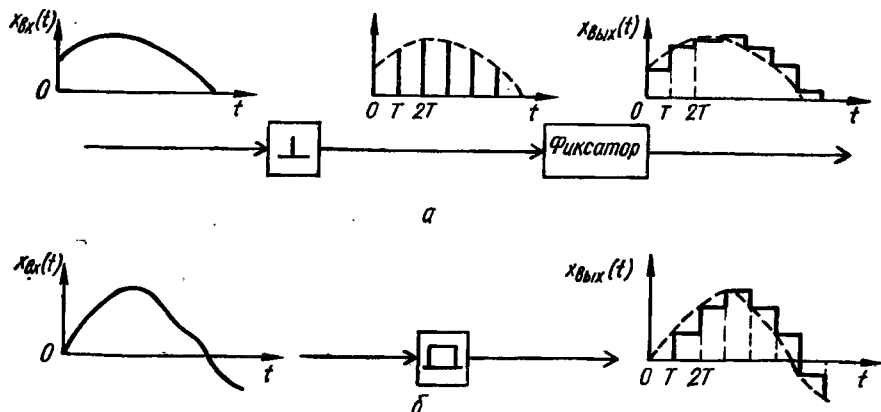


Рис. 8.18. Схема простейшего импульсного элемента с фиксатором (а) и $\int$ — импульсного элемента (б).

Таблица 8.1. Передаточные функции формирующих элементов

Форма импульса	$K_{\Phi T}(p)$	$K_{\Phi T}(p)$ при $\gamma \ll 1$	$K_{\Phi}(q)$
	$k_n \frac{1 - e^{-\gamma T p}}{p}$	$k_n \gamma T$	$k_n \frac{1 - e^{-q \gamma}}{q}$
	$k_n \frac{2(1 - e^{-\frac{\gamma T p}{2}})^2}{\gamma T p^2}$	$k_n \frac{\gamma T}{2}$	$k_n \frac{2(1 - e^{-\frac{q \gamma}{2}})^2}{\gamma q^2}$
	$\frac{k_n T \frac{\pi}{\gamma}}{p^2 T^2 + \left(\frac{\pi}{\gamma}\right)^2} \times$ $\times [1 + e^{-\gamma T p}]$	для $\gamma p T \ll 1$ $\frac{2k_n T \gamma}{\pi}$	$k_n \frac{\frac{\pi}{\gamma}}{q^2 + \left(\frac{\pi}{\gamma}\right)^2} \times$ $\times [1 + e^{-q \gamma}]$
	$k_n T \frac{1}{T p + \frac{3}{\gamma}}$	$k_n T \times$ $\times \frac{1}{T p + \frac{3}{\gamma}}$	$k_n \frac{1}{q + \frac{3}{\gamma}}$

фиксатором. Фиксатор растягивает мгновенный входной импульс на период следования импульсов или запоминает площадь мгновенного входного импульса до прихода следующего импульса (рис. 8.18, а). На выходе фиксатора сигнал имеет форму прямоугольной волны. Простейший импульсный элемент с фиксатором образуют прямоугольный Л-импульсный элемент, преобразующий любую непрерывную входную функцию в последовательность прямоугольных импульсов с $\gamma T = T$ или в ступенчатую функцию (в прямоугольную волну) (рис. 8.18, б). Л-импульсный элемент фиксирует значения входной функции в дискретные моменты времени $t = nT$ и помнит каждое значение в интервале T .

Таким образом, передаточная функция формирующего элемента, соответствующего импульсному элементу с импульсами прямоугольной формы, определяется выражениями (8.5) — (8.10). Обычно коэффициент усиления импульсного элемента относят к формирующему элементу, считая, что коэффициент простейшего импульсного элемента равен единице ($k_n = 1$).

Аналогично можно определить изображения по Лапласу и для импульсов другой формы. Передаточные функции формирующих элементов для типовых форм импульсов приведены в табл. 8.1.

Относительный масштаб времени. Для упрощения анализа импульсных систем вместо времени t применяется относительное время $\bar{t} = t/T$,

где T — период повторения импульсов. Если имеем какую-либо функцию времени, например импульсную переходную функцию $k_T(t)$, то, заменив $t = T\bar{t}$, получим $k_T(t) = k_T(T\bar{t}) = k(\bar{t})$.

Введем обозначения:

$$L\{k_T(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} k_T(t) dt = K_T(p); \quad (8.11)$$

$$L\{k(\bar{t})\} = \int_0^{\infty} e^{-q\bar{t}} k(\bar{t}) d\bar{t} = K(q).$$

Найдем соотношение между $K(q)$ и $K_T(p)$. На основании теоремы об изменении масштаба получим

$$L\{k_T(\bar{t}T)\} = (1/T) K_T(q/T). \quad (8.12)$$

Поскольку $k_T(\bar{t}T) = k(\bar{t})$, с учетом формул (8.11) и (8.12) запишем:

$$L\{k(\bar{t})\} = K(q) = (1/T) K_T(q/T), \quad (8.13)$$

т. е. для получения изображения $K(q)$ функции $k(\bar{t})$ в относительном масштабе времени необходимо в изображении $K_T(p)$ функции $k_T(t)$ аргумент p заменить на q/T , а само изображение умножить на $1/T$.

Пример 1. Определить передаточную функцию формирующего элемента $K_\Phi(q)$, импульсная переходная функция которой совпадает с прямоугольным импульсом.

Обычная передаточная функция такого формирующего элемента

$$K_{\Phi_T}(p) = k_n (1 - e^{-\gamma T p})/p.$$

Заменив аргумент $p = q/T$ и разделив $K_{\Phi_T}(p)$ на T , получим

$$K_\Phi(q) = \frac{1}{T} k_n \frac{1 - e^{-\gamma T q/T}}{q/T} = k_n \frac{1 - e^{-\gamma q}}{q}. \quad (8.14)$$

Передаточные функции формирующих элементов для типовых форм импульсов при применении относительного времени приведены в табл. 8.1.

Приведенная непрерывная часть системы

Линейную импульсную систему с амплитудно-импульсной модуляцией можно представить в виде последовательного соединения простейшего импульсного элемента с передаточной функцией, равной единице, формирующего элемента с передаточной функцией $K_{\Phi_T}(p)$ и непрерывной части системы с передаточной функцией $K_{нТ}(p)$ (рис. 8.19). Для удобства анализа системы формирующий элемент и непрерывную часть объединяют. Соединение формирующего элемента и непрерывной части называется *приведенной непрерывной частью* системы (ПНЧ). Любую замкнутую импульсную систему можно

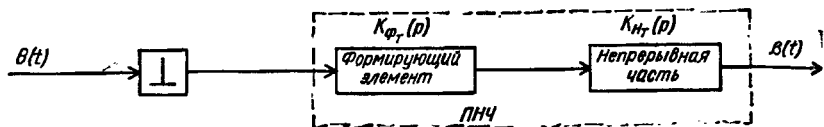


Рис. 8.19. Представление разомкнутой импульсной системы в виде соединения простейшего импульсного элемента, формирующего элемента и непрерывной части.

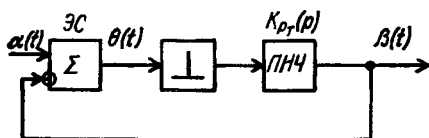


Рис. 8.20. Эквивалентная схема импульсной САУ.

привести к эквивалентной схеме, состоящей из простейшего импульсного элемента и приведенной непрерывной части (рис. 8.20).

Передаточная функция приведенной непрерывной части

$$K_{PT}(p) = K_{\Phi_T}(p) K_{HT}(p) \quad (8.15)$$

или при использовании относительного масштаба времени

$$K_p(q) = (1/T) K_{\Phi_T}(q/T) K_{HT}(q/T) = K_{\Phi}(q) K_H(q), \quad (8.16)$$

где

$$K_{\Phi}(q) = (1/T) K_{\Phi_T}(q/T); \quad K_H(q) = K_{HT}(q/T) \quad (8.17)$$

передаточные функции формирующего элемента и непрерывной части системы, т. е. для перехода к относительному масштабу времени в передаточной функции формирующего элемента $K_{\Phi_T}(p)$ необходимо заменить p на q/T и полученную передаточную функцию $K_{\Phi_T}(q/T)$, умножить на $1/T$. В передаточной же функции непрерывной части $K_{HT}(p)$ необходимо лишь заменить p на q/T .

Пример 2. Определить $K_p(q)$ ПНЧ двухинтеграторной импульсной системы автоматического сопровождения цели по дальности (рис. 8.21), у которой импульсный элемент формирует прямоугольные импульсы с $\gamma \ll 1$.

Передаточная функция $K_{PT}(p)$ ПНЧ системы равна $K_{PT}(p) = K_{\Phi_T}(p) K_{HT}(p)$. Передаточная функция формирующего элемента, соответствующего импульсному элементу, генерирующему прямоугольные импульсы с $\gamma \ll 1$, в соответствии с формулой (8.8)

$$K_{\Phi_T}(p) = k_{\Phi} \gamma T. \quad (8.18)$$

Передаточная функция непрерывной части системы определяется выражением (8.3)

$$K_{HT}(p) = k_1/p + k_2/p^2. \quad (8.19)$$

Подставив значения $K_{\Phi_T}(p)$ и $K_{HT}(p)$ из формул (8.18) и (8.19) в выражение для $K_{PT}(p)$, получим

$$K_{PT}(p) = K_{\Phi_T}(p) K_{HT}(p) = k_{\Phi} \gamma T (k_1/p + k_2/p^2) \quad (8.20)$$

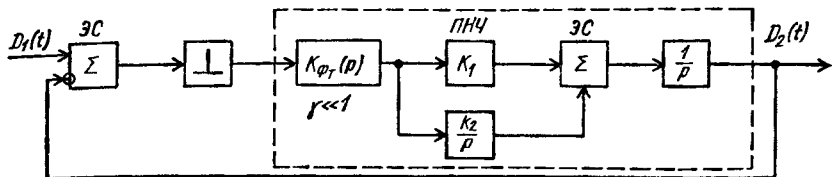


Рис. 8.21. Структурная схема двуинтеграторной импульсной системы автоматического сопровождения цели по дальности.

или для случая относительного времени в соответствии с формулой (8.13)

$$K_D(q) = \frac{1}{T} K_{pT} \left(\frac{q}{T} \right) = k_n \gamma \left(\frac{k_1 T}{q} + \frac{k_2 T^2}{q^2} \right) = \frac{k_3}{q} + \frac{k_4}{q^2}, \quad (8.21)$$

где $k_3 = k_n \gamma k_1 T$; $k_4 = k_n \gamma k_2 T^2$.

8.4. Математический аппарат исследования импульсных систем

Понятие о решетчатых функциях

Решетчатая функция. Приведенная непрерывная часть импульсной системы реагирует лишь на дискретные значения непрерывной функции, приложенной на вход импульсного элемента. Поэтому достаточно знать значения непрерывной функции только в дискретные моменты времени. На этом основании непрерывную функцию заменяют соответствующей решетчатой функцией (функцией дискретного аргумента). Решетчатой называется функция (рис. 8.22, б), которую образуют ординаты непрерывной функции (рис. 8.22, а) при дискретных равноотстоящих друг от друга значениях независимой переменной. Решетчатая функция существует только при дискретных значениях аргумента. Между этими значениями аргумента решетчатая функция равна нулю. Решетчатую функцию обычно обозначают $f[nT]$, имея в виду $f[nT] = f_T(nT) = f_T(t)|_{t=nT}$, где T — период дискретности: n — любое целое число.

Для получения решетчатой функции $f[nT]$, соответствующей непрерывной функции $f_T(t)$, необходимо в функции $f_T(t)$ заменить t на nT .

В качестве примера запишем решетчатые функции, соответствующие некоторым непрерывным функциям.

Непрерывной функции $f_T(t) = at$ (рис. 8.23, а) соответствует решетчатая функция (рис. 8.23, б)

$$f[nT] = f_T(t)|_{t=nT} = anT, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Непрерывной функции $f_T(t) = e^{at}$ соответствует решетчатая функция

$$f[nT] = e^{anT}.$$

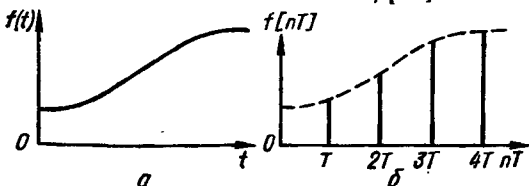


Рис. 8.22. Непрерывная функция $f_T(t)$ (а) и соответствующая ей решетчатая функция $f[nT]$ (б).

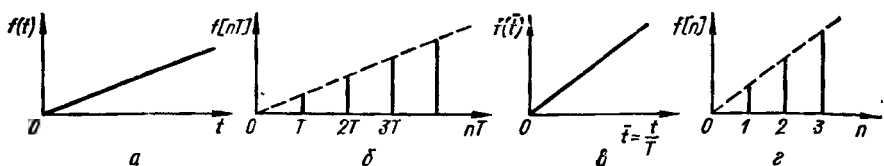


Рис. 8.23. Непрерывные функции и соответствующие им решетчатые функции: а — непрерывная функция $f_T(t) = at$; б — решетчатая функция $f[nT] = anT$, соответствующая (а); в — непрерывная функция в относительном масштабе времени $f(\tilde{t}) = \alpha \tilde{t}$; г — решетчатая функция $f[n] = \alpha n$, соответствующая (в).

Смещенная решетчатая функция. Решетчатая функция отражает непрерывную функцию лишь в дискретные моменты времени. Для выявления поведения непрерывной функции между отдельными дискретными моментами времени вводят промежуточное фиксированное время $\pm \Delta t$, которое может изменяться от 0 до T . Непрерывный аргумент t в этом случае можно представить в виде суммы дискретного аргумента и приращения Δt :

$$t = nT \pm \Delta t.$$

Решетчатая функция $f[nT \pm \Delta t]$ называется смещенной функцией по отношению функции $f[nT]$ на величину $\pm \Delta t$ и обозначается $f[nT, \Delta t]$. Изменяя $\pm \Delta t$ от 0 до T , можно получить все значения непрерывной функции в промежутке от $(n - 1)T$ до $(n + 1)T$.

Решетчатая функция в относительном масштабе времени. Как отмечалось, для перехода к относительному масштабу времени $\tilde{t} = t/T$ необходимо в функции вместо t подставить $\tilde{t}T$. Например, непрерывная функция $f_T(t) = at$ после замены t на $\tilde{t}T$ будет иметь вид $f(\tilde{t}) = aT\tilde{t} = \alpha \tilde{t}$, где $\alpha = aT$. Непрерывной функции в относительном масштабе времени $f(\tilde{t})$ соответствует решетчатая функция $f[n]$. Последняя совпадает с $f(\tilde{t})$ при $\tilde{t} = n$:

$$f[n] = f(\tilde{t})|_{\tilde{t}=n}.$$

Например, непрерывной функции $f(\tilde{t}) = \alpha \tilde{t}$ (рис. 8.23, в) соответствует решетчатая функция $f[n] = \alpha n$ (рис. 8.23, г).

Решетчатые функции изменяют значение при целочисленных значениях независимого переменного n .

Смещенная решетчатая функция в относительном масштабе времени. Если в качестве аргумента принято относительное время, то смещенная решетчатая функция обозначается $f[n, \epsilon]$, где $\pm \epsilon = \pm \Delta t/T$. При изменении $\pm \Delta t$ от 0 до T ϵ изменяется от 0 до ± 1 . Смещенная функция $f[n, \epsilon]$ при $\epsilon = 1$ соответствует значению функции в точке $n + 1$, т. е. равна $f[n + 1]$. В смещенной решетчатой функции ϵ является параметром.

Понятие о разностях решетчатых функций и разностных уравнениях

Скорость изменения непрерывной функции $f_T(t)$ определяется ее первой производной $df_T(t)/dt$. Скорость изменения решетчатой функции $f[n]$ характеризуется ее первой разностью $\Delta f[n]$, являющейся аналогом производной непрерывной функции.

Разность первого порядка (первая разность) решетчатой функции $f[n]$ (рис. 8.24, а)

$$\Delta f[n] = f[n+1] - f[n],$$

т. е. равна разности между последующей $(n+1)$ -й и n -й ординатами решетчатой функции (рис. 8.24, б).

Первая разность, как и производная, по существу равна отношению приращения функции к приращению аргумента, $\Delta f[n]/\Delta n$, но так как $\Delta n = (n+1) - n = 1$, то ее значение равно $\Delta f[n]$.

Разность второго порядка (вторая разность) $\Delta^2 f[n]$ (рис. 8.24, в) представляет собой разность между $(n+1)$ -й и n -й ординатами первой разности:

$$\Delta^2 f[n] = \Delta f[n+1] - \Delta f[n]$$

или, если раскрыть первые разности, то

$$\begin{aligned}\Delta^2 f[n] &= f[n+2] - f[n+1] - (f[n+1] - f[n]) = \\ &= f[n+2] - 2f[n+1] + f[n].\end{aligned}$$

Разность k -го порядка определяется выражением

$$\Delta^k f[n] = \Delta^{k-1} f[n+1] - \Delta^{k-1} f[n]$$

или непосредственно через значения решетчатой функции

$$\Delta^k f[n] = \sum_{v=0}^k (-1)^v \binom{k}{v} f[n+k-v], \quad (8.22)$$

где $\binom{k}{v} = \frac{k!}{v!(k-v)!}$ — биномиальные коэффициенты.

Пример 3. Для решетчатой функции $f[n] = an$ (рис. 8.23, з) первая разность равна постоянной a : $\Delta f[n] = a(n+1) - an = a$. Вторая и высшие разности равны нулю.

Разностные уравнения. При исследовании непрерывных систем пользуются дифференциальными уравнениями, определяющими связь между непрерывной функцией и ее производными. При рассмотрении дискретных и, в частности, импульсных систем используются

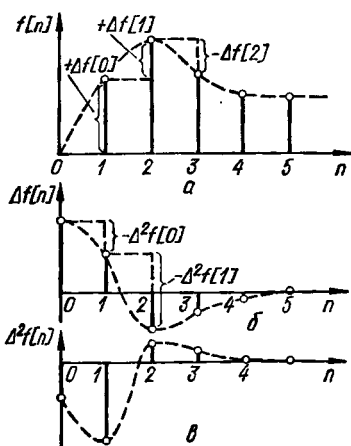


Рис. 8.24. Решетчатая функция $f[n]$ (а) и ее первая (б) и вторая (в) разности.

разностные уравнения, определяющие соотношения между дискретной функцией $y[n]$ и ее разностями различных порядков $\Delta^k y[n]$, где $k = 1, 2, \dots, l$. Разностными уравнениями описываются цифровые вычислительные устройства. В частности, разностные уравнения определяют их последовательность действия, т. е. программу.

Если линейное дифференциальное уравнение l -го порядка записывается в виде

$$a_l \frac{d^l y(t)}{dt^l} + a_{l-1} \frac{d^{l-1} y(t)}{dt^{l-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = f(t),$$

то линейное разностное уравнение с постоянными коэффициентами можно представить в форме

$$b_l \Delta^l y[n] + b_{l-1} \Delta^{l-1} y[n] + \dots + b_0 y[n] = f[n] \quad (8.23)$$

или

$$a_l y[n+l] + a_{l-1} y[n+l-1] + \dots + a_0 y[n] = f[n], \quad (8.24)$$

где $f[n]$ — известная дискретная функция; $y[n]$ — искомая дискретная функция, представляющая собой решение разностного уравнения.

Разностное уравнение l -го порядка соответствует дифференциальному уравнению l -го порядка. Дифференциальное уравнение можно рассматривать как предельное выражение для разностного уравнения, когда период дискретности T стремится к нулю. Решение разностного уравнения (8.23) или (8.24) можно найти с помощью различных методов, аналогичных методам решения дифференциальных уравнений. Более удобным методом решения разностных уравнений является операционный метод, основанный на дискретном преобразовании Лапласа.

Дискретное преобразование Лапласа (D -преобразование)

Прямое D -преобразование. Обычное преобразование Лапласа — это преобразование Лапласа непрерывной функции

$$L\{f_T(t)\} = F_T(p) = \int_0^{\infty} f_T(t) e^{-pt} dt. \quad (8.25)$$

Дискретное преобразование Лапласа представляет собой преобразование Лапласа решетчатой функции. Символами дискретного преобразования Лапласа приняты $D\{f[nT]\}$ и $F_T^*(p)$. Выражение дискретного преобразования Лапласа получается из формулы (8.25) заменой интеграла на сумму, непрерывной функции $f_T(t)$ — решетчатой $f[nT]$, а времени t — дискретным аргументом nT :

$$D\{f[nT]\} = F_T^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} f[nT] e^{-nTp}. \quad (8.26)$$

Дискретное преобразование Фурье получим, подставив в формулу (8.26) $j\omega$ вместо p :

$$F_T^*(j\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} f[nT] e^{-jn\omega T}. \quad (8.27)$$

Для случая, когда в качестве аргумента непрерывной функции берется относительное время $\bar{t} = t/T$, выражение для D -преобразования

$$D\{f[n]\} = F^*(q) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n] e^{-qn}, \quad (8.28)$$

где $q = pT = \sigma + j\omega T = \sigma + j\bar{\omega}$ — комплексное число, называемое параметром дискретного преобразования Лапласа; $\bar{\omega} = \omega T$ — относительная частота импульсов; $\omega_0 = 2\pi/T$ — частота импульсов.

Дискретное преобразование для смещенных решетчатых функций имеет вид:

$$D\{f[n, \varepsilon]\} = F^*(q, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n, \varepsilon] e^{-qn}. \quad (8.29)$$

Пример 4. Задана единичная ступенчатая решетчатая функция $f[n] = 1[n]$ (рис. 8.25). Определить $F^*(q)$.

Подставляя значение функции в формулу (8.28), получаем

$$F^*(q) = \sum_{n=0}^{\infty} 1[n] e^{-qn} = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot e^{-qn} = 1 + e^{-q} + e^{-2q} + e^{-3q} + \dots$$

Последнее выражение представляет собой бесконечную геометрическую прогрессию, первый член которой $a = 1$, а знаменатель прогрессии $b = e^{-q}$. Сумма этой прогрессии при $\operatorname{Re} q > 0$ определяется по формуле

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} = \frac{a}{1-b} = \frac{1}{1-e^{-q}} = \frac{e^q}{e^q - 1}.$$

Таким образом,

$$D\{1[n]\} = F^*(q) = e^q/(e^q - 1). \quad (8.30)$$

В табл. 8.2 приведены D -изображения некоторых функций. Теоремы и правила дискретного преобразования Лапласа, устанавливающие соответствие между операциями в области оригиналов и изображений [78], аналогичны теоремам и правилам для непрерывного преобразования Лапласа.

Связь между дискретным и непрерывным преобразованиями Лапласа (Фурье) — $\mathcal{D}$ -преобразование.
Частотное представление решетчатой функции

Решетчатую функцию $f[nT]$, соответствующую непрерывной функции $f_T(t)$, можно получить с помощью амплитудно-импульсного модулятора, обеспечивающего амплитудную модуляцию последовательности мгновенных импульсов единичной площади $i[nT]$ сигналом $f_T(t)$.

Обозначим изображение Фурье (частотный спектр) непрерывной функции $f_T(t)$ через $F_T(j\omega)$ (рис. 8.26, а). Последовательность импуль-



Рис. 8.25. Единичная ступенчатая решетчатая функция.

Таблица 8.2. Таблица дискретных преобразований

№ п/п	$f_T(t)$	$f(\bar{t}) = f[n, \varepsilon]$	$F_T(p) = \mathcal{L}\{f_T(t)\}$	$F(q) = \mathcal{L}\{f(\bar{t})\}$	$F^*(q, \varepsilon) = D\{f[n, \varepsilon]\} \vee \{F(q)\}$	$F(z, \varepsilon) = Z\{f_T(t)\} = Z\{F_T(p)\}$
1.	Единичный скачок $1(t)$	$1(\bar{t}) = 1[n]$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{q}$	$\frac{e^q}{e^q - 1}$	$\frac{z}{z - 1}$
2.	Линейно-возрастающая функция t	$\bar{t} = n + \varepsilon$	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{1}{q^2}$	$\frac{e^q}{(e^q - 1)^2} + \frac{e^q}{e^q - 1} \varepsilon$	$\frac{Tz}{(z - 1)^2} + \frac{Tz}{z - 1} \varepsilon$
3.	Квадратичная функция t^2	$\bar{t}^2 = (n + \varepsilon)^2$	$\frac{2!}{p^3}$	$\frac{2!}{q^3}$	$\frac{e^q(e^q + 1)}{(e^q - 1)^3} + 2 \frac{e^q}{(e^q - 1)^2} \varepsilon + \frac{e^q}{e^q - 1} \varepsilon^2$	$2 \frac{T^2 z}{(z - 1)^3} + \frac{(1 + 2\varepsilon) T^2 z}{(z - 1)^2} + \frac{(T\varepsilon)^2 z}{z - 1}$
4.	Экспонента $e^{\pm at}$	$e^{\pm a\bar{t}} = e^{\pm a(n + \varepsilon)}$	$\frac{1}{p \mp a}$	$\frac{1}{q \mp \alpha}$	$\frac{e^q}{e^q - e^{\pm \alpha}} e^{\pm \alpha \varepsilon}$	$\frac{z}{z - e^{\pm aT}} e^{\pm aT\varepsilon}$
5.	Скачок и экспонента $1 - e^{\pm at}$	$1 - e^{\pm a\bar{t}} = 1 - e^{\pm a(n + \varepsilon)}$	$\frac{1}{p(p \mp a)}$	$\frac{\alpha}{q(q \mp \alpha)}$	$\frac{e^q}{e^q - 1} - \frac{e^q}{e^q - e^{\pm \alpha}} e^{\pm \alpha \varepsilon}$	$\frac{z}{z - 1} - \frac{z}{z - e^{\pm aT}} e^{\pm aT\varepsilon}$

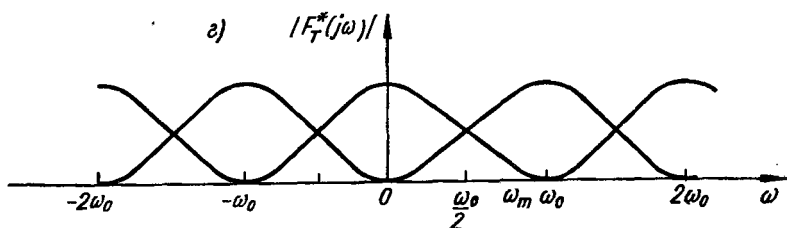
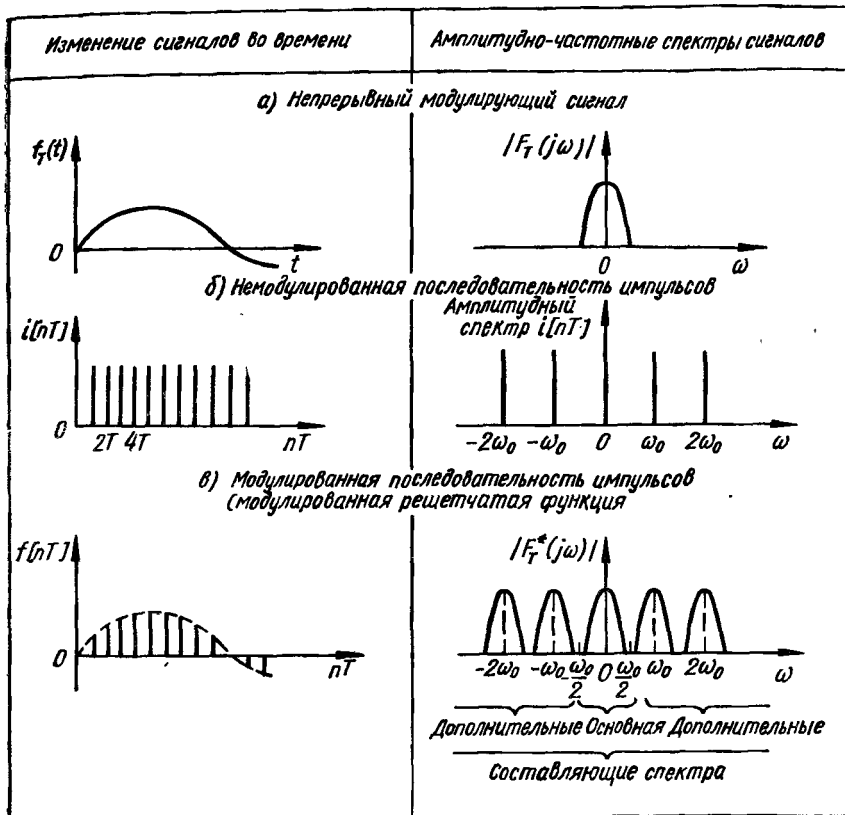


Рис. 8.26. Изменения сигналов во времени и их амплитудно-частотные спектры:
 а, б, в — $\omega_m < \omega_0/2$; г — $\omega_m > \omega_0/2$.

сов $i[nT]$, разложив в ряд Фурье, можно представить в виде сумм постоянной составляющей ($\omega = 0$), первой гармоники с частотой $\omega_0 = 2\pi/T$ и бесконечного количества гармоник, отличающихся друг от друга по частоте на ω_0 , с амплитудой $1/T$ (рис. 8.26, б). Изображение Фурье амплитудно-модулированной последовательности импульсов $f[nT]$ определяется выражением

$$F_T^*(j\omega) = (1/T) \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_T(j\omega - jn\omega_0), \quad (8.31)$$

т. е. частотный спектр решетчатой функции получается суммированием частотных спектров, соответствующих непрерывной функции, смещенных по оси частот на величины $n\omega_0$, где n изменяется от $-\infty$ до $+\infty$ (рис. 8.26, в). Таким образом, действие простейшего импульсного элемента сказывается в появлении боковых полос частот, идентичных спектру непрерывной функции.

Формула связи (8.31) позволяет по преобразованию Фурье $F_T(j\omega)$ непрерывной функции $f_T(t)$ определить дискретное преобразование Фурье $F_T^*(j\omega)$ решетчатой функции $f[nT]$. Формула (8.31) справедлива в случае нулевого начального значения функции $f[0] = 0$. В общем случае, когда $f[0] \neq 0$, формула связи имеет вид

$$F_T^*(j\omega) = f[0]/2 + (1/T) \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_T(j\omega - jn\omega_0).$$

Преобразование Лапласа решетчатой функции определяется выражением, аналогичным последнему выражению

$$F_T^*(p) = f[0]/2 + (1/T) \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_T(p - jn\omega_0). \quad (8.32)$$

Операцию рассмотренного преобразования обозначают $\mathfrak{D}\{F_T(p)\}$

$$F_T^*(p) = \mathfrak{D}\{F_T(p)\} = \frac{1}{2} f[0] + \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_T(p - jn\omega_0). \quad (8.33)$$

Это преобразование называют *прямым $\mathfrak{D}$ -преобразованием*.

При использовании относительного масштаба времени формула связи (8.32) примет вид

$$F^*(q) = \frac{1}{2} f[0] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(q + 2\pi jn), \quad q = pT,$$

а для смещенной решетчатой функции

$$F^*(q, \varepsilon) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{(q+2\pi jn)\varepsilon} F(q + 2\pi jn). \quad (8.34)$$

Таким образом, дискретное преобразование можно найти по формуле

$$F^*(q, \varepsilon) = D\{f[n, \varepsilon]\} = \sum_{n=0}^{\infty} f[n, \varepsilon] e^{-qn},$$

если известна решетчатая функция $f[n, \varepsilon]$, или по формуле

$$F^*(q, \varepsilon) = \mathfrak{D}\{F(q)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{(q+2\pi jn)\varepsilon} F(q + 2\pi jn),$$

если известно непрерывное преобразование Лапласа $F(q)$.

Для определения дискретного преобразования Лапласа $F^*(q, \varepsilon)$ (например, для определения дискретной передаточной функции системы $K_p^*(q, \varepsilon)$) по обычному изображению Лапласа $F(q)$ (по передаточ-

ной функции приведенной непрерывной части системы $K_p(q)$) можно воспользоваться табл. 8.2.

Основной особенностью дискретного преобразования Лапласа (Фурье) является его периодичность. Изображения $F_T^*(p)$ и $F_T^*(j\omega)$ являются периодическими функциями с периодом ω_0 . Периодичность $F_T^*(j\omega)$ видна при рассмотрении амплитудного спектра $|F_T^*(j\omega)|$ решетчатой функции (рис. 8.26).

Используя частотное представление решетчатой функции, можно сформулировать теорему о дискретном представлении непрерывных функций, устанавливающую соотношение между спектром непрерывной функции и частотой повторения импульсов, при котором возможно восстановление непрерывной функции, и требования к частотной характеристике непрерывной части импульсной системы, обеспечивающей сглаживание импульсов, т. е. восстановление исходной непрерывной функции.

Теорема о дискретном представлении непрерывных функций. Полезная информация (спектр огибающей амплитудно-модулированной последовательности импульсов) расположена около нулевой частоты, но та же информация появляется периодически вдоль оси частот через частоту ω_0 . Спектр огибающей, расположенный около нулевой частоты, обычно называют основным, а смещенные спектры — дополнительными.

Из рис. 8.26, в следует, что дополнительные спектры не перекрываются (и, следовательно, не перекрывают основной спектр), если максимальная существенная частота ω_m спектра непрерывной функции (полезного сигнала) меньше, чем половинная частота импульсов, т. е. если $\omega_m < \omega_0/2$, где $\omega_0 = 2\pi/T$, T — период повторения импульсов. В случае, когда $\omega_m > \omega_0/2$ (T слишком велик), смещенные спектры непрерывного сигнала перекрываются (рис. 8.26, г) и специфические особенности сигнала не проявляются. Спектр решетчатой функции в этом случае будет близок к белому шуму. Очевидно, что вид частотного спектра исходной непрерывной функции, а следовательно, и саму эту функцию можно восстановить, если смещенные спектры не будут перекрываться. Сформулируем теорему:

если полезная информация выделяется линейной цепью только на основании различия в частотном спектре, то исходная непрерывная модулирующая функция может быть восстановлена без искажений, если частота повторения импульсов ω_0 , по крайней мере, в два раза больше максимальной частоты ω_m спектра этой непрерывной функции, т. е. если $2\omega_m \leq \omega_0$.

При выполнении условий этой теоремы спектр полезного сигнала будет находиться в полосе частот между $-\omega_0/2$ и $+\omega_0/2$. Приведенная теорема называется *теоремой Котельникова*.

Сглаживание импульсов. На приведенную непрерывную часть ПНЧ импульсной системы (рис. 8.20) с выхода простейшего импульсного элемента поступает амплитудно-модулированная последовательность импульсов. Полезная информация этой последовательности импульсов содержится в огибающей их амплитуд (площадей). Задачей приведенной непрерывной части является выделение полезной инфор-

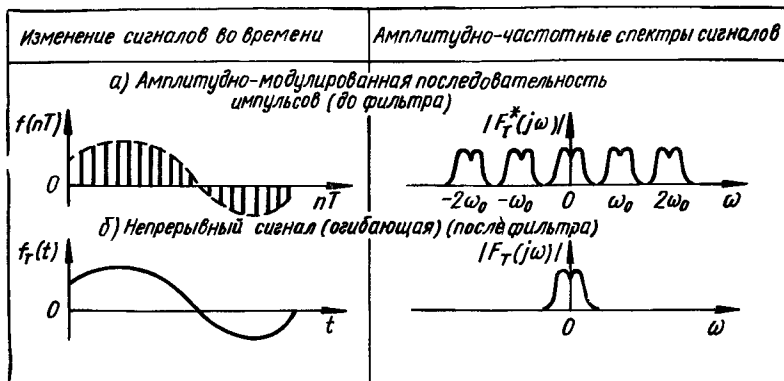


Рис. 8.27. Преобразование дискретной информации (а) в непрерывную (б).

мации, т. е. выделение огибающей импульсов, или иначе, преобразование дискретной информации в непрерывную. Наряду с этой, специфической для импульсных систем, задачей приведенная непрерывная часть осуществляет также свойственные для всех САУ функциональные преобразования полезного сигнала с целью достижения необходимых динамических характеристик.

Чтобы из амплитудно-модулированной последовательности импульсов (рис. 8.27, а) вновь получить непрерывный сигнал, необходимо отфильтровать дополнительные составляющие частотного спектра этой последовательности импульсов и пропустить лишь основную составляющую, т. е. спектр огибающей, расположенный около нулевой частоты (рис. 8.27, б). Таким образом, если процесс получения дискретного сигнала подобен процессу модуляции, то процесс выделения огибающей подобен процессу сглаживания при демодуляции амплитудно-модулированного напряжения несущей частоты.

Сглаживание импульсов или фильтрование высокочастотных составляющих спектра последовательности импульсов можно осуществить с помощью фильтра низких частот. Поскольку основная составляющая спектра последовательности импульсов сконцентрирована вокруг нулевой частоты, а дополнительные составляющие — вокруг частот $\omega_0, 2\omega_0, \dots$, то для фильтрации дополнительных составляющих спектра граничная частота пропускания фильтра должна быть примерно равна половинной частоте повторения импульсов $\omega_0/2$. Во многих импульсных системах автоматического управления функцию фильтра низких частот — сглаживание импульсов — в основном выполняют элементы самой системы (например, усилитель, двигатель). Иногда с целью достижения лучшего эффекта фильтрации в систему включают дополнительные сглаживающие фильтры. Наиболее простым фильтром является фиксатор.

z-Преобразование

В дискретное D -преобразование (см. выражение 8.26) переменная p входит в виде e^{pT} , и, следовательно, это преобразование не является рациональной функцией от p . В связи с этим исключается возможность применения обычного метода анализа в плоскости p (например, метода анализа устойчивости, качества путем определения нулей и полюсов передаточной функции в плоскости p) для анализа импульсных систем. D -преобразование является рациональной функцией от e^{pT} или, если введено относительное время, то от e^q , где $q = pT$. Если в выражениях (8.28) и (8.29), определяющих D -преобразование, заменить e^q на z , то получим так называемое z -преобразование, являющееся рациональной функцией относительно новой переменной z :

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n] z^{-n}; \quad (8.35)$$

$$F(z, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n, \varepsilon] z^{-n}. \quad (8.36)$$

D -преобразование и z -преобразование эквивалентны. Однако при использовании z -преобразования анализ импульсных систем в плоскости z во многом будет подобен уже известному анализу непрерывных систем в плоскости p . Кроме того, преимуществом z -преобразования является сравнительная легкость вычисления обратного преобразования и упрощение записи. Выбор того или иного вида преобразования определяется удобством его применения при решении той или иной конкретной задачи.

Символом z -преобразования решетчатой функции $f[n]$ является

$$Z\{f[n]\} = F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n] z^{-n}.$$

z -Преобразование смещенной решетчатой функции, определяемое выражением (8.36), в литературе обычно называется *модифицированным z -преобразованием*.

Пример 5. Пусть $f[n] = 1[n]$ (рис. 8.25). Подставляя значение $f[n]$ в (8.35), находим

$$Z\{1[n]\} = F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 1[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-n} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots$$

Сумма полученной геометрической прогрессии равна

$$Z\{1[n]\} = F(z) = 1/(1 - z^{-1}) = z/(z - 1). \quad (3.38)$$

Из сравнений выражений (8.30) и (8.38) видно, что z -преобразование единичной решетчатой функции соответствует ее D -преобразованию, если в последнем заменить $e^q = z$.

z -Преобразования некоторых функций времени приведены в табл. 8.2. Более полные таблицы z -преобразований можно найти в литературе [35].

Если известно изображение Лапласа $F_T(p)$ непрерывной функции $f_T(t)$ (например, передаточная функция звена или системы, являющаяся изображением импульсной переходной функции), то z -преобразование этой функции можно определить следующим образом.

1. Нахождением по $F_T(p)$ самой функции $f_T(t)$ с последующим определением z -преобразования по формулам (8.35) и (8.36) или табл. 8.2 соответствия $f_T(t)$ и $Z\{f_T(t)\}$. Например, если

$$F_T(p) = k/(Tp + 1) = A/(p + a),$$

то по табл. 8.2 определяем $f_T(t) = Ae^{-at}$. По той же таблице находим

$$F(z, \varepsilon) = Z\{Ae^{-at}\} = Aze^{-aT\varepsilon}/(z - e^{-aT}).$$

2. С помощью Z -преобразования, связывающего изображения $F(z, \varepsilon)$ и $F_T(p)$:

$$F(z, \varepsilon) = Z\{F_T(p)\}, \quad (8.39)$$

аналогичного $\mathcal{D}$ -преобразованию. Для определения $F(z, \varepsilon)$ по $F_T(p)$ можно воспользоваться табл. 8.2. В том случае, когда $F_T(p)$ является сложной функцией, например

$$F_T(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{D(p)}{F(p)},$$

$F_T(p)$ представляется в виде суммы элементарных дробей, для которых Z -преобразования известны. Суммируя последние, получают $F(z, \varepsilon)$, соответствующее $F_T(p)$.

Теоремы и правила z -преобразования аналогичны теоремам и правилам D -преобразования [35].

8.5. Уравнения и передаточные функции разомкнутых импульсных систем

Реакция приведенной непрерывной части системы на последовательность мгновенных импульсов.

Уравнение разомкнутой импульсной системы относительно оригиналов

Напомним, что простейший амплитудный импульсный элемент (рис. 8.28, а) формирует последовательность мгновенных импульсов, площади которых равны значениям входной непрерывной функции в моменты, непосредственно предшествующие возникновению импульсов. Отмеченную особенность необходимо учитывать в тех случаях, когда входное воздействие импульсного элемента $\theta(\bar{t})$ испытывает скачки в моменты квантования $t = 1, 2, 3, \dots$ (рис. 8.28, б) и, следовательно, входная величина импульсного элемента слева $\theta[n, -0]$ и справа $\theta[n, 0]$ от n имеет разные значения: $\theta[n, -0] \neq \theta[n, 0]$. Появление скачков во входном сигнале импульсного элемента характерно для замкнутых импульсных систем. Входной сигнал импульсного элемента в этих системах представляет собой разность между задающим воздей-

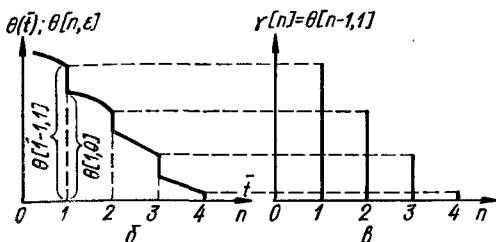
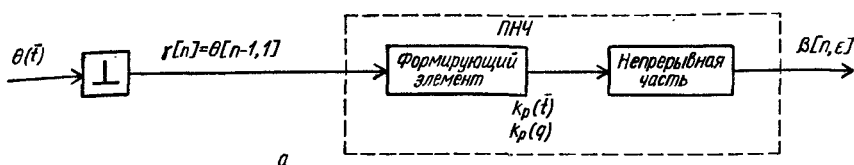


Рис. 8.28. Схема разомкнутой импульсной системы (а) и форма сигналов (б — входной сигнал импульсного элемента, испытывающий скачки; в — соответствующая ему решетчатая функция).

ствием и управляемой величиной. Если ПНЧ системы малоинерционна (импульсная переходная функция $k(\bar{t})$ отлична от нуля в начальный момент времени, т. е. $k(0) \neq 0$), то выходная величина ПНЧ (управляемая величина) будет испытывать скачки в моменты поступления импульсов с выхода простейшего импульсного элемента. В связи с этим сигнал рассогласования, поступающий на импульсный элемент, также будет претерпевать скачки в моменты квантования.

Поскольку простейший импульсный элемент фиксирует левые значения входного воздействия, площадь n -го импульса выходной последовательности импульсов $\gamma[n]$ этого элемента равна ординате входного воздействия $\theta(\bar{t})$ в момент, непосредственно предшествующий $\bar{t} = n$, т. е. равна $\theta[n, -0]$. Момент времени, непосредственно предшествующий квантованию, удобно представить как $\bar{t} = n - 1 + \epsilon$ при $\epsilon = 1$, т. е. как $\bar{t} = n - 1 + 1$ (напомним, что $\epsilon = \Delta t/T$). Решетчатая функция $\gamma[n]$, соответствующая входному воздействию $\theta(\bar{t})$ при наличии скачков, в этом случае будет равна $\theta[n - 1, 1]$, т. е.

$$\gamma[n] = \theta[n - 1, 1]. \quad (8.40)$$

На рис. 8.28, б обозначены значения $\theta[n - 1, 1]$ и $\theta[n, 0]$ при $n = 1$ в случае, когда входная функция $\theta(\bar{t})$ имеет скачки. На рис. 8.28, в изображена решетчатая функция $\gamma[n]$, соответствующая входной функции со скачками. При отсутствии скачков функции $\theta(\bar{t})$ будет иметь место равенство $\gamma[n] = \theta[n]$.

Определим реакцию ПНЧ системы (рис. 8.28, а) на последовательность мгновенных импульсов $\gamma[n]$, поступающих с простейшего импульсного элемента, т. е. найдем уравнение разомкнутой импульсной системы относительно оригиналов. Для определения реакции на последовательность импульсов необходимо сперва определить реакцию на один импульс.

Реакция ПНЧ на мгновенный импульс единичной площади является ее импульсной переходной функцией $k_p(\bar{t})$ (рис. 8.29, а, б).

равна

$$\beta(\bar{t}) = \gamma[0] k_p(\bar{t}),$$

в интервале времени $1 \leq \bar{t} < 2$

$$\beta(\bar{t}) = \gamma[0] k_p(\bar{t}) + \gamma[1] k_p(\bar{t} - 1),$$

в интервале времени $2 \leq \bar{t} < 3$

$$\beta(\bar{t}) = \gamma[0] k_p(\bar{t}) + \gamma[1] k_p(\bar{t} - 1) + \gamma[2] k_p(\bar{t} - 2)$$

и вообще в интервале времени $n \leq \bar{t} < n + 1$

$$\beta(\bar{t}) = \sum_{m=0}^n \gamma[m] k_p(\bar{t} - m). \quad (8.41)$$

Полученное уравнение дает возможность определить величину на выходе разомкнутой системы в любой момент времени $\bar{t}$.

Если интересуют значения выходной величины $\beta(\bar{t})$ только в дискретные моменты времени $\bar{t} = n + \varepsilon$, т. е. решетчатая функция $\beta[n, \varepsilon]$, то для ее получения необходимо в (8.41) вместо $k_p(\bar{t} - m)$ подставить дискретную импульсную переходную функцию $k_p[n - m, \varepsilon]$:

$$\beta[n, \varepsilon] = \sum_{m=0}^n \gamma[m] k_p[n - m, \varepsilon]. \quad (8.42)$$

Подставляя в последнее выражение на основании равенства (8.40) $\theta[m - 1, 1]$ вместо $\gamma[m]$, окончательно получаем

$$\beta[n, \varepsilon] = \sum_{m=0}^n \theta[m - 1, 1] k_p[n - m, \varepsilon]. \quad (8.43)$$

Если входная функция $\theta(\bar{t})$ импульсного элемента не имеет скачков, то $\theta[m - 1, 1] = \theta[m, 0]$ и, следовательно,

$$\beta[n, \varepsilon] = \sum_{m=0}^n \theta[m, 0] k_p[n - m, \varepsilon]. \quad (8.44)$$

Уравнения (8.43) и (8.44) являются основными *уравнениями разомкнутой импульсной системы в области действительного переменного* (уравнениями относительно оригиналов). Они устанавливают связь между решетчатыми функциями, соответствующими входной и выходной величинам разомкнутой импульсной системы.

Выходная величина системы $\beta[n, \varepsilon]$ в отличие от входной $\theta[m - 1, 1]$ (или $\theta[m, 0]$) выражается смещенной решетчатой функцией, зависящей от ε . Благодаря этому с помощью уравнений (8.43) и (8.44) можно найти значение выходной величины $\beta[n, \varepsilon]$ в любой момент времени $\bar{t} = n + \varepsilon$, если при заданном значении n изменять ε от 0 до 1.

Уравнения разомкнутой импульсной системы относительно изображений

Для определения передаточной функции импульсной системы, связывающей между собой изображения решетчатых функций, соответствующих входному и выходному сигналам, необходимо уравнение (8.43) записать в операционной форме. Операционный метод определения искомой величины является наиболее простым методом решения разностных уравнений.

Подвергаем обе части выражения (8.43) z -преобразованию:

$$Z\{\beta[n, \varepsilon]\} = Z\left\{\sum_{m=0}^n \theta[m-1, 1] k_p[n-m, \varepsilon]\right\}.$$

На основании теоремы об умножении изображений правую часть этого выражения можно записать

$$Z\left\{\sum_{m=0}^n \theta[m-1, 1] k_p[n-m, \varepsilon]\right\} = Z\{\theta[m-1, 1]\} Z\{k_p[n, \varepsilon]\}.$$

Применяя затем теорему сдвига в области оригиналов, получим

$$Z\{\beta[n, \varepsilon]\} = z^{-1} Z\{\theta[m, 1]\} Z\{k_p[n, \varepsilon]\}.$$

Введя обозначения изображений дискретных функций выходной и входной величин

$$Z\{\beta[n, \varepsilon]\} = \beta(z, \varepsilon), \quad Z\{\theta[m, 1]\} = \theta(z, 1)$$

и импульсной переходной функции

$$Z\{k_p[n, \varepsilon]\} = K_p(z, \varepsilon), \quad (8.45)$$

получим уравнение разомкнутой импульсной системы относительно изображений дискретных значений входной и выходной величин:

$$\beta(z, \varepsilon) = K_p(z, \varepsilon) \theta(z, 1) z^{-1}. \quad (8.46)$$

Если входная величина $\theta(\bar{t})$ импульсного элемента не испытывает скачков, то система, как отмечалось, описывается уравнением относительно оригиналов (8.44). Соответствующее уравнение относительно изображений в смысле z -преобразования будет иметь вид

$$\beta(z, \varepsilon) = K_p(z, \varepsilon) \theta(z, 0). \quad (8.47)$$

Уравнения (8.46) и (8.47) устанавливают соотношения между z -преобразованиями входа и выхода разомкнутой импульсной системы. Эти уравнения аналогичны уравнениям относительно изображений в смысле обычного преобразования Лапласа $\beta(q) = K_p(q) \theta(q)$, которое получилось бы при отсутствии импульсного элемента.

Дискретная передаточная функция разомкнутой импульсной системы

Под дискретной передаточной функцией разомкнутой импульсной системы понимается отношение изображений в смысле z -преобразования выходной и входной величин при нулевых начальных условиях.

Если учесть, что z -преобразование входного сигнала $\theta(\bar{t})$ со скачками $Z\{\theta[m-1, 1]\} = z^{-1}\theta(z, 1)$, а изображение смещенной решетчатой функции на выходе системы $\beta(z, \varepsilon)$, то в соответствии с уравнением (8.46) и согласно определению дискретная передаточная функция разомкнутой импульсной системы равна

$$K_p(z, \varepsilon) = \beta(z, \varepsilon)/z^{-1}\theta(z, 1). \quad (8.48)$$

Если входное воздействие не имеет скачков, то

$$K_p(z, \varepsilon) = \beta(z, \varepsilon)/\theta(z, 0). \quad (8.49)$$

Из выражений (8.46) и (8.45) видно, что дискретная передаточная функция разомкнутой импульсной системы $K_p(z, \varepsilon)$ представляет собой z -преобразование импульсной переходной функции $k_p(\bar{t}) = k_p[n, \varepsilon]$ приведенной непрерывной части системы

$$K_p(z, \varepsilon) = Z\{k_p[n, \varepsilon]\} \quad (8.50)$$

или на основании выражения (8.36) в раскрытом виде

$$K_p(z, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} k_p[n, \varepsilon]. \quad (8.51)$$

Дискретную передаточную функцию разомкнутой импульсной системы $K_p(z, \varepsilon)$ можно также определить по передаточной функции ПНЧ системы $K_{pT}(p)$ так: $K_p(z, \varepsilon) = Z\{K_{pT}(p)\}$. Соотношение между Z -преобразованием и непрерывным преобразованием Лапласа приведены в табл. 8.2. В случае, если $K_{pT}(p)$ сложна, то для определения $K_p(z, \varepsilon)$ передаточную функцию $K_{pT}(p)$ предварительно разлагают на простые дроби.

Пусть, например,

$$K_{pT}(p) = \frac{D(p)}{F(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}.$$

Передаточную функцию $K_{pT}(p)$ можно представить в виде суммы элементарных дробей вида $A/(p+a)$, для которых Z -преобразования известны. При этом могут быть следующие случаи.

1. Знаменатель $F(p)$ такой, что уравнение $F(p) = 0$ не имеет нулевых корней p_i , т. е. $K_{pT}(p)$ имеет простые полюса. В этом случае:

$$K_{pT}(p) = D(p)/F(p) = \sum_{i=1}^n A_i/(p - p_i), \quad (8.52)$$

где $A_i = D(p_i)/F'(p_i)$; $F'(p_i) = dF(p)/dp|_{p=p_i}$.

2. При одном нулевом полюсе

$$K_{pT}(p) = D(p)/F_0(p) p = A_1/p + \sum_{i=2}^n A_i/(p - p_i), \quad (8.53)$$

где

$$A_1 = \frac{D(0)}{F_0(0)}; \quad A_i = \frac{D(p_i)}{F_0'(p_i) p_i}; \quad F_0(p) p = F(p).$$

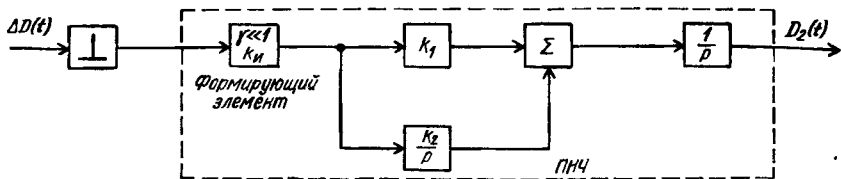


Рис. 8.32. Структурная схема двухинтеграторной импульсной системы автоматического сопровождения цели по дальности в разомкнутом состоянии.

3. При нулевом полюсе второй кратности

$$K_{pT}(p) = \frac{D(p)}{F_0(p)p^2} = \frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{p^2} + \sum_{i=3}^n \frac{A_i}{p-p_i}, \quad (8.54)$$

где

$$A_1 = \frac{d}{dp} \frac{D(p)}{F_0(p)} \Big|_{p=0}; \quad A_2 = \frac{D(0)}{F_0(0)}; \quad A_i = \frac{D(p_i)}{F_0'(p_i)p_i^2}.$$

После представления $K_{pT}(p)$ в виде суммы элементарных дробей необходимо с помощью табл. 8.2 найти Z-преобразование для каждой дроби, а затем, суммируя их, получить передаточную функцию разомкнутой импульсной системы.

Пример 6. Определить $K_p(z, \varepsilon)$ разомкнутой импульсной системы (рис. 8.32), передаточная функция ПНЧ которой равна (см. выражение (8.20)):

$$K_{pT}(p) = k_n \gamma T \left(\frac{k_1}{p} + \frac{k_2}{p^2} \right) = \frac{k'_3}{p} + \frac{k'_4}{p^2}, \quad (8.55)$$

где $k'_3 = k_n \gamma T k_1$; $k'_4 = k_n \gamma T k_2$.

Для определения $K_p(z, \varepsilon)$ нужно взять Z-преобразование от $K_{pT}(p)$

$$K_p(z, \varepsilon) = Z \{ K_{pT}(p) \} = Z \{ k'_3/p + k'_4/p^2 \}.$$

Используя табл. 8.2, находим

$$K_p(z, \varepsilon) = k'_3 \frac{z}{z-1} + k'_4 \left[\frac{Tz}{(z-1)^2} + \frac{Tz\varepsilon}{z-1} \right]$$

или

$$K_p(z, \varepsilon) = k_3 \frac{z}{z-1} + k_4 \left[\frac{z}{(z-1)^2} + \frac{z\varepsilon}{z-1} \right], \quad (8.56)$$

где $k_3 = k'_3 = k_n \gamma T k_1$; $k_4 = k'_4 T = k_n \gamma T^2 k_2$.

После преобразования получим

$$K_p(z, \varepsilon) = \frac{b_2(\varepsilon)z^2 + b_1(\varepsilon)z}{(z-1)^2} = \frac{b_2(\varepsilon)z^2 + b_1(\varepsilon)z}{a_2z^2 + a_1z + a_0} = \frac{D(z, \varepsilon)}{F(z)}, \quad (8.57)$$

где $b_2 = k_3 + k_4\varepsilon$; $b_1 = k_4 - k_3 - k_4\varepsilon$; $a_2 = 1$; $a_1 = -2$; $a_0 = 1$.

Дискретная передаточная функция последовательно и параллельно соединенных цепей направленного действия

Найдем дискретную передаточную функцию последовательно соединенных однонаправленных цепей, разделенных импульсными элементами (рис. 8.33, а) в случае, когда импульсные элементы работают одновременно.

Поскольку каждый последующий импульсный элемент фиксирует левые значения выходной функции предыдущей цепи, то нас будут интересовать значения выходной величины, например k -й непрерывной цепи слева от момента квантования, т. е. $x[n-1, 1]$. В этом случае импульсная передаточная функция k -й цепи равна

$$z^{-1}K_k(z, 1) = z^{-1}X_k(z, 1)/z^{-1}X_{k-1}(z, 1).$$

Если стоит задача определения выходной величины последовательного соединения в любой момент времени, то дискретную передаточную функцию m -й (последней) цепи соединения нужно взять для моментов времени $\bar{t} = n + \varepsilon$

$$K_m(z, \varepsilon) = X_m(z, \varepsilon)/z^{-1}X_{m-1}(z, 1).$$

Таким образом, будем иметь

$$z^{-1}K_1(z, 1) = z^{-1}X_1(z, 1)/z^{-1}X_0(z, 1);$$

$$z^{-1}K_2(z, 1) = \frac{z^{-1}X_2(z, 1)}{z^{-1}X_1(z, 1)}; \dots; K_m(z, \varepsilon) = \frac{X_m(z, \varepsilon)}{z^{-1}X_{m-1}(z, 1)}.$$

Перемножив дискретные передаточные функции цепей, получим

$$z^{-(m-1)}K_1(z, 1)K_2(z, 1) \dots K_{m-1}(z, 1)K_m(z, \varepsilon) = \frac{X_m(z, \varepsilon)}{z^{-1}X_0(z, 1)}.$$

Поскольку отношение $X_m(z, \varepsilon)/z^{-1}X_0(z, 1)$, согласно определению, представляет дискретную передаточную функцию, то из полученного выражения следует, что дискретная передаточная функция $K(z, \varepsilon)$ последовательно соединенных цепей, разделенных импульсными элементами, равна произведению дискретных передаточных функций этих цепей. При этом дискретные передаточные функции первых $m-1$

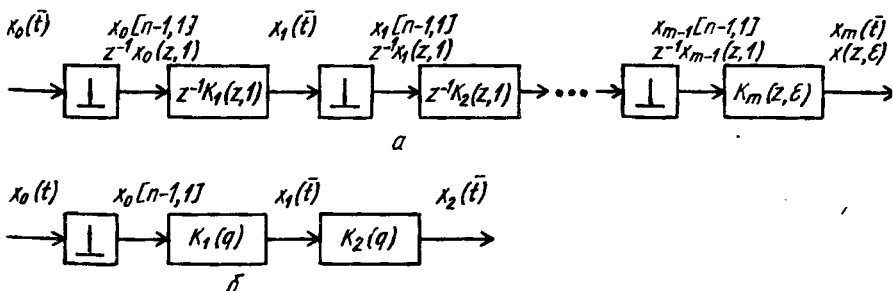


Рис. 8.33. Последовательное соединение цепей, разделенных (а) и неразделенных (б) импульсными элементами.

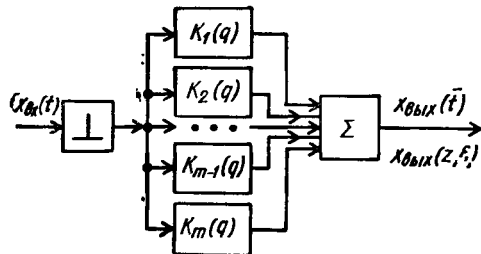


Рис. 8.34. Параллельное соединение цепей.

В случае, если значения выходной величины последовательного соединения будут интересовать только в моменты $\bar{t} = n - 0$, то

$$K(z, \varepsilon) = z^{-m} K_1(z, 1) K_2(z, 1) \dots K_m(z, 1).$$

Если имеем последовательное соединение, например, двух цепей с передаточными функциями $K_{T1}(p)$ и $K_{T2}(p)$, не разделенных импульсными элементами (рис. 8.33, б), то передаточная функция последовательного соединения цепей, как известно, $K_T(p) = K_{T1}(p) K_{T2}(p)$, а дискретная передаточная функция определяется выражением

$$K(z, \varepsilon) = Z\{K_T(p)\} = Z\{K_{T1}(p) K_{T2}(p)\}.$$

Следует иметь в виду, что

$$Z\{K_{T1}(p) K_{T2}(p)\} \neq K_1(z, \varepsilon) K_2(z, \varepsilon).$$

При параллельном соединении цепей (рис. 8.34) передаточная функция равна сумме передаточных функций этих цепей

$$K_{\text{пар}}(q) = K_1(q) + K_2(q) + \dots + K_{m-1}(q) + K_m(q).$$

Применив Z-преобразование к левой и правой частям последнего выражения, получим следующую формулу для дискретной передаточной функции параллельного соединения цепей:

$$K_{\text{пар}}(z, \varepsilon) = K_1(z, \varepsilon) + K_2(z, \varepsilon) + \dots + K_{m-1}(z, \varepsilon) + K_m(z, \varepsilon),$$

т. е. дискретная передаточная функция параллельно соединенных элементов равна сумме их дискретных передаточных функций.

8.6. Уравнения и передаточные функции замкнутых импульсных систем

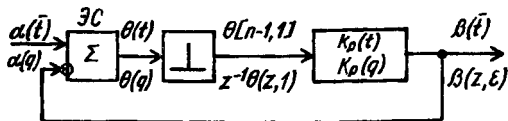
Уравнение замкнутой импульсной системы относительно оригиналов

Как отмечалось выше, особенностью импульсных систем является то, что импульсный элемент находится внутри замкнутого контура (рис. 8.35). В замкнутой импульсной системе сигнал $\theta(\bar{t})$ на входе импульсного элемента является разностью между задающим воздействием $\alpha(\bar{t})$ и управляемой величиной системы $\beta(\bar{t})$, т. е. $\theta(\bar{t}) = \alpha(\bar{t}) - \beta(\bar{t})$. Поэтому параметры импульсов, воздействующих на

цепей берутся для моментов времени $\bar{t} = n - 0$, а дискретная передаточная функция m -й (выходной) цепи — для $\bar{t} = n + \varepsilon$:

$$K(z, \varepsilon) = z^{-(m-1)} K_1(z, 1) \times \\ \times K_2(z, 1) \dots K_{m-1}(z, 1) \times \\ \times K_m(z, \varepsilon).$$

Рис. 8.35. Простейшая форма замкнутой импульсной системы.



непрерывную часть системы, в замкнутой импульсной системе определяются не только дискретными значениями внешнего воздействия (как в разомкнутой импульсной системе), но и зависят от выходной величины системы. В тех системах, у которых приведенная непрерывная часть малоинерционна и импульсная переходная функция приведенной непрерывной части $k_p(\bar{t})$ в начальный момент времени не равна нулю, т. е. $k_p(0) = \lim_{q \rightarrow \infty} q K_p(q) \neq 0$, управляемая величина системы претерпевает скачки в моменты поступления импульсов с выхода простейшего импульсного элемента. Сигнал рассогласования системы $\theta(\bar{t})$ в этом случае также испытывает скачки в моменты квантования даже при непрерывном задающем воздействии. Поэтому с учетом того, что импульсный элемент фиксирует значения поступающего на него сигнала $\theta(\bar{t})$ слева от $\bar{t} = n$, т. е. фиксирует $\theta[n, -0]$ или $\theta[n-1, 1]$, уравнение замыкания системы будет иметь вид:

$$\theta[n-1, 1] = \alpha[n-1, 1] - \beta[n-1, 1], \quad (8.58)$$

где $\alpha[n-1, 1]$, $\beta[n-1, 1]$, $\theta[n-1, 1]$ — решетчатые функции, соответствующие задающему воздействию, управляемой величине и ошибке системы на входе импульсного элемента.

При отсутствии скачков управляемой величины уравнение замыкания системы

$$\theta[n, 0] = \alpha[n, 0] - \beta[n, 0].$$

Для нахождения уравнения замкнутой импульсной системы воспользуемся полученным ранее уравнением разомкнутой импульсной системы (8.43):

$$\beta[n, \epsilon] = \sum_{m=0}^n \theta[m-1, 1] k_p[n-m, \epsilon], \quad (8.59)$$

где $k_p[n, \epsilon]$ — дискретная импульсная переходная функция разомкнутой системы, совпадающая с импульсной переходной функцией приведенной непрерывной части $k_p(\bar{t})$ при $\bar{t} = n + \epsilon$.

Если из уравнения (8.58) значение $\theta[n-1, 1]$ подставить в уравнение (8.59), то получим уравнение замкнутой импульсной системы:

$$\begin{aligned} \beta[n, \epsilon] = & \sum_{m=0}^n \alpha[m-1, 1] k_p[n-m, \epsilon] - \\ & - \sum_{m=0}^n \beta[m-1, 1] k_p[n-m, \epsilon]. \end{aligned} \quad (8.60)$$

С помощью этого уравнения, представляющего рекуррентное соотношение, можно последовательно вычислять дискретные значения

управляемой величины $\beta [n, \varepsilon]$, если известны дискретные значения импульсной переходной функции разомкнутой системы $k_p [n, \varepsilon]$ и задающего воздействия $\alpha [m - 1, 1]$.

Уравнение замкнутой импульсной системы относительно изображений.

Передаточные функции замкнутой импульсной системы

Чтобы получить уравнение замкнутой импульсной системы относительно изображений, подвергаем исходные уравнения (8.58) и (8.59) z -преобразованию. При преобразовании уравнения замыкания (8.58) используем теорему сдвига. Преобразованное уравнение замыкания будет иметь вид:

$$z^{-1}\theta(z, 1) = z^{-1}\alpha(z, 1) - z^{-1}\beta(z, 1). \quad (8.61)$$

Уравнение (8.59) в преобразованной форме было получено ранее (см. выражение 8.46):

$$\beta(z, \varepsilon) = z^{-1}\theta(z, 1)K_p(z, \varepsilon). \quad (8.62)$$

Если из уравнений (8.61) и (8.62) исключить $z^{-1}\theta(z, 1)$, то получим уравнение в изображениях относительно управляемой величины. Для этого значение $z^{-1}\theta(z, 1)$ из (8.61) подставляем в (8.62):

$$\beta(z, \varepsilon) = z^{-1}[\alpha(z, 1) - \beta(z, 1)]K_p(z, \varepsilon). \quad (8.63)$$

Из полученного уравнения определяем $\beta(z, \varepsilon)$ при $\varepsilon = 1$:

$$\beta(z, 1) = z^{-1}\alpha(z, 1)K_p(z, 1) - z^{-1}\beta(z, 1)K_p(z, 1),$$

откуда находим

$$\beta(z, 1) = \frac{K_p(z, 1)}{1 + z^{-1}K_p(z, 1)} z^{-1}\alpha(z, 1),$$

и подставляем его в уравнение (8.63):

$$\beta(z, \varepsilon) = z^{-1}\alpha(z, 1)K_p(z, \varepsilon) - \frac{z^{-1}K_p(z, \varepsilon)z^{-1}\alpha(z, 1)K_p(z, 1)}{1 + z^{-1}K_p(z, 1)}.$$

После преобразования получим

$$\beta(z, \varepsilon) = \frac{K_p(z, \varepsilon)}{1 + z^{-1}K_p(z, 1)} z^{-1}\alpha(z, 1). \quad (8.64)$$

Уравнение (8.64) является уравнением замкнутой импульсной системы в изображениях относительно управляемой величины. Из этого уравнения можно найти *дискретную передаточную функцию импульсной системы* $K_z(z, \varepsilon)$. Учитывая, что $K_z(z, \varepsilon) = \beta(z, \varepsilon)/z^{-1}\alpha(z, 1)$, на основании уравнения (8.64) получаем

$$K_z(z, \varepsilon) = \frac{K_p(z, \varepsilon)}{1 + z^{-1}K_p(z, 1)}. \quad (8.65)$$

Данная формула выражает дискретную передаточную функцию импульсной системы через дискретную передаточную функцию соответствующей ей разомкнутой импульсной системы. В частном случае, когда сигнал рассогласования не претерпевает скачков, дискретная передаточная функция замкнутой импульсной системы определяется

выражением

$$K_z(z, \varepsilon) = K_p(z, \varepsilon) / [1 + K_p(z, 0)].$$

При применении D -преобразования дискретная передаточная функция замкнутой импульсной системы определяется формулой

$$K_z^*(q, \varepsilon) = \frac{K_p^*(q, \varepsilon)}{1 + e^{-q} K_p^*(q, 1)} = \frac{\beta^*(q, \varepsilon)}{e^{-q} \alpha^*(q, 1)} \quad (8.66)$$

в случае, когда сигнал, поступающий на импульсный элемент, претерпевает скачки, и выражением

$$K_z^*(q, \varepsilon) = K^*(q, \varepsilon) / [1 + K_p^*(q; 0)]$$

при отсутствии скачков.

Если из уравнений (8.61) и (8.62) исключить $\beta(z, \varepsilon)$, то получим уравнение замкнутой импульсной системы в изображениях относительно ошибки. Для этого из (8.61) находим

$$z^{-1} \beta(z, 1) = z^{-1} [\alpha(z, 1) - \theta(z, 1)], \quad (8.67)$$

а из (8.62) $\beta(z, \varepsilon)$ при $\varepsilon = 1$

$$\beta(z, 1) = z^{-1} \theta(z, 1) K_p(z, 1). \quad (8.68)$$

Подставляя значение $\beta(z, 1)$ из (8.68) в (8.67), получаем искомое уравнение

$$z^{-1} \theta(z, 1) z^{-1} K_p(z, 1) = z^{-1} [\alpha(z, 1) - \theta(z, 1)]$$

или

$$[1 + z^{-1} K_p(z, 1)] z^{-1} \theta(z, 1) = z^{-1} \alpha(z, 1).$$

Из последнего уравнения можно найти дискретную передаточную функцию импульсной системы по ошибке

$$K_\theta(z, -0) = \frac{z^{-1} \theta(z, 1)}{z^{-1} \alpha(z, 1)} = \frac{1}{1 + z^{-1} K_p(z, 1)}. \quad (8.69)$$

Если сигнал, поступающий на импульсный элемент системы, не претерпевает скачков, то

$$K_\theta(z, 0) = \theta(z, 0) / \alpha(z, 0) = 1 / [1 + K_p(z, 0)]. \quad (8.70)$$

Как видим, передаточные функции $K_z(z, \varepsilon)$ и $K_\theta(z, -0)$ замкнутой импульсной системы выражаются через передаточную функцию соответствующей ей разомкнутой системы с помощью формул, аналогичных известным нам формулам связи между передаточными функциями $K_z(p)$, $K_{\theta\alpha}(p)$ непрерывной замкнутой системы и передаточной функцией $K_p(p)$ соответствующей ей разомкнутой системы:

$$K_z(p) = K_p(p) / [1 + K_p(p)]; \quad K_{\theta\alpha}(p) = 1 / [1 + K_p(p)].$$

Пример 7. Определить дискретную передаточную функцию замкнутой импульсной системы с двумя интеграторами (рис. 8.36). Импульсный элемент системы формирует прямоугольные импульсы с $\gamma \ll 1$.

Дискретная передаточная функция данной системы в разомкнутом состоянии была найдена раньше (см. выражение 8.57):

$$K_p(z, \varepsilon) = \frac{(k_3 + k_4 \varepsilon) z^2 + (k_4 - k_3 - k_4 \varepsilon) z}{(z - 1)^2}.$$

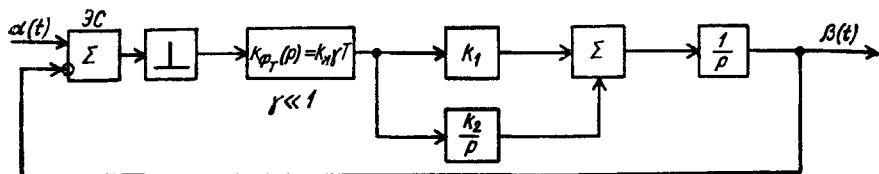


Рис. 8.36. Структурная схема замкнутой импульсной системы.

Определяем значение $K_p(z, \varepsilon)$ при $\varepsilon = 1$:

$$K_p(z, 1) = \frac{(k_3 + k_4)z^2 - k_3z}{(z-1)^2}, \quad (8.71)$$

где $k_3 = k_n \gamma T k_1$; $k_4 = k_n \gamma T^2 k_2$.

Подставив значения $K_p(z, \varepsilon)$ и $K_p(z, 1)$ в выражение (8.65), получим дискретную передаточную функцию замкнутой импульсной системы:

$$\begin{aligned} K_s(z, \varepsilon) &= \frac{K_p(z, \varepsilon)}{1 + z^{-1}K_p(z, 1)} = \frac{(k_3 + k_4\varepsilon)z^2 + (k_4 - k_3 - k_4\varepsilon)z}{(z-1)^2 + z^{-1}[(k_3 + k_4)z^2 - k_3z]} = \\ &= \frac{(k_3 + k_4\varepsilon)z^2 + (k_4 - k_3 - k_4\varepsilon)z}{z^2 - (2 - k_3 - k_4)z + 1 - k_3} \end{aligned} \quad (8.72)$$

или

$$K_s(z, \varepsilon) = \frac{b_2(\varepsilon)z^2 + b_1(\varepsilon)z}{c_2z^2 + c_1z + c_0}, \quad (8.73)$$

где $b_0(\varepsilon) = 0$; $b_1(\varepsilon) = k_4 - k_3 - k_4\varepsilon$; $b_2(\varepsilon) = k_3 + k_4\varepsilon$;

$$c_0 = 1 - k_3; \quad c_1 = -(2 - k_3 - k_4); \quad c_2 = 1.$$

Пример 8. Определить дискретную передаточную функцию по ошибке $K_\theta(z, -0)$ импульсной системы, рассмотренной в примере 7.

Передаточную функцию системы по ошибке получим, подставив значение $K_p(z, 1)$ из (8.71) в (8.69):

$$\begin{aligned} K_\theta(z, -0) &= \frac{1}{1 + z^{-1}K_p(z, 1)} = \frac{(z-1)^2}{(z-1)^2 + z^{-1}[(k_3 + k_4)z^2 - k_3z]} = \\ &= \frac{(z-1)^2}{z^2 - (2 - k_3 - k_4)z + 1 - k_3}. \end{aligned}$$

8.7. Анализ устойчивости импульсных САУ

Условие устойчивости замкнутой импульсной системы

Как и в теории непрерывных систем, для определения устойчивости импульсной системы достаточно исследовать характеристическое уравнение замкнутой системы. Если имеем передаточную функцию замкнутой импульсной системы

$$\begin{aligned} K_s(z, \varepsilon) &= \\ &= \frac{K_p(z, \varepsilon)}{1 + z^{-1}K_p(z, 1)} = \frac{b_m(\varepsilon)z^m + b_{m-1}(\varepsilon)z^{m-1} + \dots + b_0(\varepsilon)}{c_nz^n + c_{n-1}z^{n-1} + \dots + c_0} = \frac{D_s(z, \varepsilon)}{F_s(z)}, \end{aligned}$$

то характеристическое уравнение получается приравниванием к нулю его знаменателя:

$$F_s(z) = c_nz^n + c_{n-1}z^{n-1} + \dots + c_0 = 0. \quad (8.74)$$

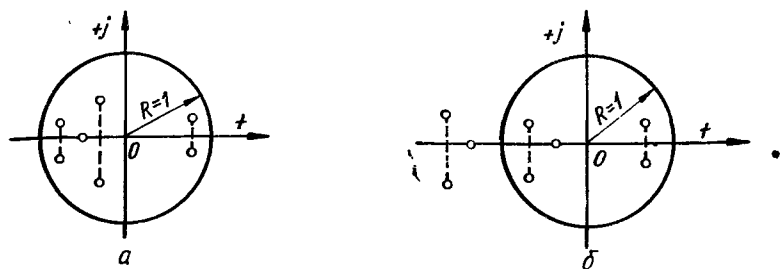


Рис. 8.37. Примеры расположения корней характеристического уравнения устойчивой (а) и неустойчивой (б) импульсной системы.

Пусть корнями характеристического уравнения являются $z_1, z_2, \dots, z_n$, тогда переходная составляющая решения

$$\beta_n[r] = A_1 z_1^r + A_2 z_2^r + \dots + A_n z_n^r, \quad (r = \bar{t}). \quad (8.75)$$

Из формулы (8.75) видно, что $\beta_n[r]$ стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$ только тогда, когда все корни z_i характеристического уравнения по модулю меньше единицы, т. е. когда $|z_i| < 1$. Отсюда можно сформулировать следующее условие устойчивости импульсной системы: *импульсная система будет устойчивой, если корни характеристического уравнения (8.74) замкнутой системы будут лежать внутри круга единичного радиуса*. Система, не удовлетворяющая этому условию, является неустойчивой. Примеры расположения корней устойчивой и неустойчивой импульсных систем в плоскости корней z показаны на рис. 8.37, а, б соответственно.

Если передаточная функция замкнутой импульсной системы задана в виде формулы (8.66)

$$K_s^*(q, \varepsilon) = \frac{K_p(q, \varepsilon)}{1 + e^{-q} K_p(q, 1)} = \frac{D_s^*(q, \varepsilon)}{F_s^*(q)}, \quad (8.76)$$

то характеристическое уравнение можно получить, если знаменатель приравнять нулю:

$$F_s^*(q) = 1 + e^{-q} K_p(q, 1) = c_n e^{nq} + c_{n-1} e^{(n-1)q} + \dots + c_0 = 0.$$

Условием устойчивости будет расположение корней q_i этого уравнения в левой полуплоскости корней q . Последнее уравнение является трансцендентным и его исследования представляют собой сложную задачу.

Критерии устойчивости импульсных САУ

Для определения устойчивости импульсной системы на практике обычно не вычисляются корни характеристического уравнения, а применяются косвенные методы исследования устойчивости. Критерии устойчивости, разработанные применительно к непрерывным системам, являются критериями расположения всех корней характеристического уравнения замкнутой системы в левой части плоскости корней

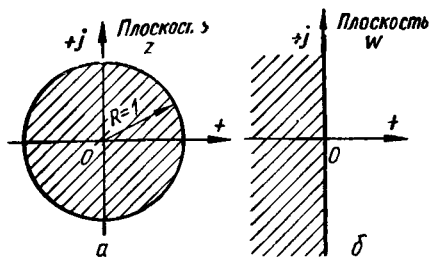


Рис. 8.38. Единичный круг плоскости z (а), отображенный в левую половину плоскости w (б) посредством билинейного преобразования.

лексного переменного, с помощью билинейного преобразования $z = (1 + w)/(1 - w)$ единичный круг в комплексной плоскости z отображается в левую часть комплексной плоскости w (рис. 8.38). Отсюда для того чтобы отобразить единичный круг в комплексной плоскости z в левую часть комплексной плоскости w , необходимо в характеристическом уравнении (8.74) вместо z подставить $(1 + w)/(1 - w)$, т. е.

$$F_s \left(\frac{1 + w}{1 - w} \right) = c_n \frac{(1 + w)^n}{(1 - w)^n} + c_{n-1} \frac{(1 + w)^{n-1}}{(1 - w)^{n-1}} + \dots + c_0 = 0.$$

После приведения к общему знаменателю и отбрасывания знаменателя получим новое характеристическое уравнение того же порядка:

$$F'_s(w) = c'_n w^n + c'_{n-1} w^{n-1} + \dots + c'_0 = 0, \quad (8.77)$$

где c'_i — коэффициенты, являющиеся комбинациями сумм и произведений коэффициентов c_i . Корням характеристического уравнения (8.74), лежащим внутри единичного круга плоскости корней z , будут соответствовать корни характеристического уравнения (8.77), лежащие в левой части плоскости корней w . Отсюда *условием устойчивости импульсной системы является расположение всех корней преобразованного характеристического уравнения (8.77) импульсной системы в левой части плоскости w .*

Таким образом, благодаря применению w -преобразования все критерии устойчивости, разработанные для анализа устойчивости непрерывных систем, могут быть использованы и для анализа импульсных систем.

Аналог критерия устойчивости Гурвица. Как выяснено, условием устойчивости импульсной системы является отрицательность вещественных частей корней преобразованного характеристического уравнения замкнутой системы (8.77). Согласно критерию Гурвица, для того чтобы все корни преобразованного характеристического уравнения n -й степени

$$F'_s(w) = c'_n w^n + c'_{n-1} w^{n-1} + \dots + c'_0 = 0$$

имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы при $\dot{c}_n > 0$ все n определителей Гурвица, составленные из коэффициентов этого уравнения, были больше нуля, т. е.

$$\Delta_n > 0, \Delta_{n-1} > 0, \dots, \Delta_1 > 0.$$

Пример 9. Определить устойчивость импульсной системы автоматического сопровождения цели с двумя интеграторами (рис. 8.36), передаточная функция которой в замкнутом состоянии определяется выражением (8.73)

$$K_3(z, \epsilon) = \frac{b_2(\epsilon) z^2 + b_1(\epsilon) z}{c_2 z^2 + c_1 z + c_0},$$

где $c_0 = 1 - k_3$; $c_1 = -(2 - k_3 - k_4)$; $c_2 = 1$; $k_3 = k_n \gamma T k_1$; $k_4 = k_n \gamma T^2 k_2$.

Приняв знаменатель передаточной функции $K_3(z, \epsilon)$ равным нулю, получим характеристическое уравнение замкнутой системы

$$F_3(z) = c_2 z^2 + c_1 z + c_0 = 0.$$

Для получения преобразованного характеристического уравнения осуществим подстановку $z = (1 + w)/(1 - w)$:

$$F_3\left(\frac{1+w}{1-w}\right) = c_2 \frac{(1+w)^2}{(1-w)^2} + c_1 \frac{1+w}{1-w} + c_0 = 0,$$

или

$$F'_3(w) = c_2(1+w)^2 + c_1(1+w)(1-w) + c_0(1-w)^2 =$$

$$= c_2 + c_2 2w + c_2 w^2 + c_1 - c_1 w^2 + c_0 - c_0 2w + c_0 w^2 = \dot{c}'_2 w^2 + \dot{c}'_1 w + \dot{c}'_0 = 0,$$

где $\dot{c}'_0 = c_2 + c_1 + c_0 = k_4$; $\dot{c}'_1 = 2(c_2 - c_0) = 2k_3$; $\dot{c}'_2 = c_2 - c_1 + c_0 = 4 - 2k_3 - k_4$.

Главный определитель Гурвица

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \dot{c}'_1 & 0 \\ \dot{c}'_2 & \dot{c}'_0 \end{vmatrix},$$

а условие устойчивости при $\dot{c}'_2 = 4 - 2k_3 - k_4 > 0$ запишется следующими неравенствами:

$$\Delta_1 = \dot{c}'_1 = 2k_3 > 0;$$

$$\Delta_2 = \dot{c}'_0 \dot{c}'_1 = 2k_3 k_4 > 0.$$

Поскольку коэффициенты системы k_3 и k_4 положительны, то условие устойчивости системы имеет вид $4 - 2k_3 - k_4 > 0$. Из уравнения $4 - 2k_3 - k_4 = 0$, определяющего границу устойчивости системы, можно на плоскости параметров k_3 и k_4 найти область устойчивости. Эта область ограничивается прямой $k_4 = 4 - 2k_3$, т. е. область устойчивости представляет собой прямоугольный треугольник с катетами $k_3 = 2$, $k_4 = 4$ (рис. 8.39). Если точка с координатами (k_3, k_4) будет находиться внутри треугольника, то система устойчива. Например, точка A , соответствующая $k_3 = 0,5$ и $k_4 = 2$, находится внутри треугольника. Следовательно, система с такими коэффициентами устойчива.

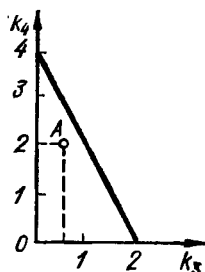


Рис. 8.39. Область устойчивости импульсной системы с двумя интеграторами.

8.8. Анализ качества импульсных САУ

Поведение импульсной системы в переходном режиме характеризуется показателями качества — перерегулированием, временем регулирования, временем установления, числом колебаний. Показатели качества могут быть определены из кривой переходной функции системы, являющейся реакцией системы на единичное ступенчатое воздействие.

Построение переходных процессов в замкнутой импульсной системе

Кривая переходного процесса импульсной системы может быть определена с помощью различных методов: решением разностных уравнений (см. формулу (8.60)), нахождением дискретного изображения выходной величины системы и переходом от него к оригиналу, с помощью частотных методов. Рассмотрим метод определения выходной величины по ее дискретному изображению.

Построение переходных процессов в замкнутой импульсной системе по их дискретным изображениям. Передаточная функция замкнутой импульсной системы, как известно (см. формулу 8.65), определяется выражением

$$K_s(z, \varepsilon) = \frac{K_p(z, \varepsilon)}{1 + z^{-1}K_p(z, 1)} = \frac{\beta(z, \varepsilon)}{z^{-1}\alpha(z, 1)},$$

откуда изображение выходной величины системы:

$$\beta(z, \varepsilon) = K_s(z, \varepsilon) z^{-1}\alpha(z, 1) = \frac{K_p(z, \varepsilon)}{1 + z^{-1}K_p(z, 1)} z^{-1}\alpha(z, 1),$$

где $z^{-1}\alpha(z, 1)$ — изображение входного сигнала, или для случая, когда сигнал, поступающий на импульсный элемент, не претерпевает скачков:

$$\beta(z, \varepsilon) = K_s(z, \varepsilon)\alpha(z, 0) = \{K_p(z, \varepsilon)/[1 + K_p(z, 0)]\}\alpha(z, 0).$$

Для определения реакции системы $\beta[n, \varepsilon]$ (кривой переходного процесса) на данный входной сигнал необходимо выполнить обратное z -преобразование, т. е. найти оригинал функции по ее z -изображению. На практике нашли применение следующие методы определения оригинала функции по ее z -изображению:

- непосредственное определение оригинала по таблицам преобразования. Применяется в случае, когда z -изображение имеет сравнительно простое выражение;

- определение оригинала путем разложения z -изображения на элементарные дроби и нахождение по таблицам оригиналов, соответствующих этим элементарным дробям. Сумма составляющих оригиналов представляет собой искомый оригинал;

- метод разложения z -изображения в степенной ряд по степеням z^{-1} ; этот метод рассмотрим более подробно.

Определение переходных процессов методом разложения их z -изображений в степенной ряд. В общем случае z -изображение выходной величины системы можно представить в виде отношения полиномов

$$\beta(z, \varepsilon) = K_3(z, \varepsilon) z^{-1} \alpha(z, 1) = \frac{d_k(\varepsilon) z^k + d_{k-1}(\varepsilon) z^{k-1} + \dots + d_0(\varepsilon)}{e_l z^l + e_{l-1} z^{l-1} + \dots + e_0}, \quad (8.78)$$

где $k \leq l$. В соответствии с формулой (8.36) z -преобразования можно также записать:

$$\begin{aligned} \beta[z, \varepsilon] &= Z\{\beta[n, \varepsilon]\} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta[n, \varepsilon] z^{-n} = \\ &= \beta[0, \varepsilon] + \beta[1, \varepsilon] z^{-1} + \beta[2, \varepsilon] z^{-2} + \dots + \beta[n, \varepsilon] z^{-n} + \dots. \end{aligned} \quad (8.79)$$

Значения коэффициентов $\beta[n, \varepsilon]$ степенного ряда при z^{-n} соответствуют значениям выходной величины системы в дискретные моменты времени $\bar{t} = n + \varepsilon$. Поэтому для определения дискретных значений переходного процесса системы необходимо определить коэффициенты степенного ряда. Определить искомые коэффициенты через параметры системы и входное воздействие можно путем приравнивания правых частей выражений (8.78) и (8.79):

$$\begin{aligned} \frac{d_k(\varepsilon) z^k + d_{k-1}(\varepsilon) z^{k-1} + \dots + d_0(\varepsilon)}{e_l z^l + e_{l-1} z^{l-1} + \dots + e_0} &= \\ &= \beta[0, \varepsilon] + \beta[1, \varepsilon] z^{-1} + \beta[2, \varepsilon] z^{-2} + \dots, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} d_k(\varepsilon) z^k + d_{k-1}(\varepsilon) z^{k-1} + \dots + d_0(\varepsilon) &= \\ &= (e_l z^l + e_{l-1} z^{l-1} + \dots + e_0) \{\beta[0, \varepsilon] + \beta[1, \varepsilon] z^{-1} + \dots\}. \end{aligned} \quad (8.80)$$

Раскрыв скобки в правой части выражения и приравнявая коэффициенты левой и правой частей при одинаковых степенях z , получим систему уравнений, из которой затем определим искомые ординаты. Как отмечалось, $k \leq l$. Обозначим $l - k = n_0$, откуда $k = l - n_0$, где n_0 — порядковый номер ординаты, с которого значения ординат отличны от нуля, а ординаты $\beta[0, \varepsilon] = \dots = \beta[l - k - 1, \varepsilon] = 0$. С учетом данного замечания, приравнявая коэффициенты правой и левой частей выражения (8.80) при одинаковых степенях z , получим следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } z^0 \quad d_k(\varepsilon) &= \beta[l - k, \varepsilon] e_l; \\ \text{при } z^{-1} \quad d_{k-1}(\varepsilon) &= \beta[l - k, \varepsilon] e_{l-1} + \beta[l - k + 1, \varepsilon] e_l; \\ \text{при } z^{-2} \quad d_{k-2}(\varepsilon) &= \beta[l - k, \varepsilon] e_{l-2} + \beta[l - k + 1, \varepsilon] e_{l-1} + \\ &\quad + \beta[l - k + 2, \varepsilon] e_l \end{aligned} \right\} \quad (8.81)$$

и т. д., из которой можно определить дискретные значения кривой переходного процесса системы.

Из первого уравнения находим дискретное значение величины в момент времени $\bar{t} = l - k + \varepsilon$:

$$\beta[l - k, \varepsilon] = d_k(\varepsilon) / e_l.$$

Из второго уравнения определяем

$$\beta[1+l-k, \varepsilon] = (1/e_l) \{d_{k-1}(\varepsilon) - \beta[l-k, \varepsilon] e_{l-1}\}.$$

Из третьего уравнения получаем

$$\beta[2+l-k, \varepsilon] = (1/e_l) \{d_{k-2}(\varepsilon) - \beta[l-k, \varepsilon] e_{l-2} - \beta[1+l-k, \varepsilon] e_{l-1}\}$$

или в сокращенной форме записи

$$\beta[2+l-k, \varepsilon] = (1/e_l) \left\{ d_{k-2}(\varepsilon) - \sum_{i=0}^{2-1} \beta[i+l-k, \varepsilon] e_{l-2+i} \right\} \quad (8.82)$$

По аналогии с (8.82) значение выходной величины в момент времени $\bar{t} = s + l - k + \varepsilon$ можно определить с помощью следующего рекуррентного соотношения [16]:

$$\beta[s+l-k, \varepsilon] = \frac{1}{e_l} \left\{ d_{k-s}(\varepsilon) - \sum_{i=0}^{s-1} \beta[i+l-k, \varepsilon] e_{l-s+i} \right\}. \quad (8.83)$$

Полученное выражение позволяет определить кривую переходного процесса не только в дискретные моменты квантования (при $\varepsilon = 0$), но и в промежутках между ними, если придавать ε значения от 0 до 1. С помощью этого выражения можно определять реакцию системы на воздействие произвольной формы.

Для определения переходной функции системы на ее вход подают единичное ступенчатое воздействие, z -изображение которого

$$Z[1[n]] = z/(z-1). \quad (8.84)$$

В этом случае z -изображение реакции (переходной функции) системы

$$\beta(z, \varepsilon) = K_3(z, \varepsilon) z/(z-1). \quad (8.85)$$

Пример 10. Рассчитать переходную функцию замкнутой импульсной системы автоматического сопровождения цели по дальности с двумя интеграторами (рис. 8.36), передаточная функция которой в замкнутом состоянии определяется выражением (8.73):

$$K_3(z, \varepsilon) = \frac{b_2(\varepsilon) z^2 + b_1(\varepsilon) z}{c_3 z^2 + c_1 z + c_0},$$

где

$$b_2(\varepsilon) = k_3 + k_4 \varepsilon; \quad b_1(\varepsilon) = k_4 - k_3 - k_4 \varepsilon; \quad b_0(\varepsilon) = 0;$$

$$c_2 = 1; \quad c_1 = -(2 - k_3 - k_4); \quad c_0 = 1 - k_3.$$

при следующих параметрах системы:

$$k_3 = k_H \gamma T k_1 = k_1 = 0,84; \quad k_4 = k_H \gamma T^2 k_2 = T k_2 = 0,6.$$

z -Изображение переходной функции системы в соответствии с выражением (8.85)

$$\begin{aligned} \beta(z, \varepsilon) &= K_3(z, \varepsilon) \frac{z}{z-1} = \frac{b_2(\varepsilon) z^2 + b_1(\varepsilon) z}{c_3 z^2 + c_1 z + c_0} \cdot \frac{z}{z-1} = \\ &= \frac{b_2(\varepsilon) z^3 + b_1(\varepsilon) z^2}{c_2 z^3 + (c_1 - c_2) z^2 + (c_0 - c_1) z - c_0} = \frac{d_3(\varepsilon) z^3 + d_2(\varepsilon) z^2}{e_3 z^3 + e_2 z^2 + e_1 z + e_0}, \end{aligned} \quad (8.86)$$

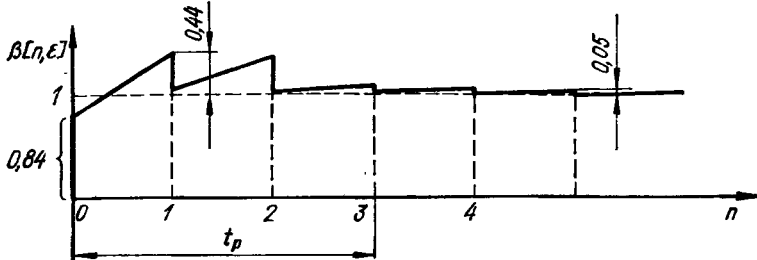


Рис. 8.40. Кривая переходного процесса импульсной системы (рис. 8.36).

где

$$\begin{aligned}d_3(\varepsilon) &= b_2(\varepsilon) = k_3 + k_4\varepsilon = 0,84 + 0,6\varepsilon; \\d_2(\varepsilon) &= b_1(\varepsilon) = k_4 - k_3 - k_4\varepsilon = 0,24 - 0,6\varepsilon; \\e_3 &= c_2 = 1; \\e_2 &= c_1 - c_2 = -2 + k_3 + k_4 - 1 = -1,56; \\e_1 &= c_0 - c_1 = 1 - k_3 + (2 - k_3 - k_4) = 3 - 2k_3 - k_4 = 0,72; \\e_0 &= -c_0 = -(1 - k_3) = -0,16.\end{aligned}$$

Для расчета переходной функции воспользуемся рекуррентным соотношением (8.83). Для рассматриваемого примера, как видно из выражения (8.86); высшие показатели степеней знаменателя l и числителя k z -изображения переходной функции равны $l = k = 3$, поэтому рекуррентное соотношение примет вид

$$\beta[s, \varepsilon] = \frac{1}{e_3} \left\{ d_{3-s}(\varepsilon) - \sum_{i=0}^{s-1} \beta[i, \varepsilon] e_{3-s+i} \right\}.$$

Дискретные значения переходной функции системы в соответствии с последним выражением:

$$\begin{aligned}\beta[0, \varepsilon] &= (1/e_3) d_3(\varepsilon) = 0,84 + 0,6\varepsilon; \\\beta[1, \varepsilon] &= (1/e_3) \left\{ d_2(\varepsilon) - \sum_{i=0}^0 \beta[i, \varepsilon] e_{3-1+i} \right\} = (1/e_3) \{ d_2(\varepsilon) - \beta[0, \varepsilon] e_2 \} = \\&= -(0,24 + 0,6\varepsilon) - (0,84 + 0,6\varepsilon)(-1,56) = 1,07 + 0,336\varepsilon; \\\beta[2, \varepsilon] &= (1/e_3) \left\{ d_1(\varepsilon) - \sum_{i=0}^1 \beta[i, \varepsilon] e_{3-2+i} \right\} = \\&= (1/e_3) \{ d_1(\varepsilon) - \beta[0, \varepsilon] e_1 - \beta[1, \varepsilon] e_2 \} = \\&= 0 - (0,84 + 0,6\varepsilon) 0,72 + (1,07 + 0,336\varepsilon) 1,56 = 1,07 + 0,09\varepsilon. \\\beta[3, \varepsilon] &= (1/e_3) \left\{ d_0(\varepsilon) - \sum_{i=0}^2 \beta[i, \varepsilon] e_{3-3+i} \right\} = \\&= (1/e_3) \{ d_0(\varepsilon) - \beta[0, \varepsilon] e_0 - \beta[1, \varepsilon] e_1 - \beta[2, \varepsilon] e_2 \} = \\&= 0 + (0,84 + 0,6\varepsilon) 0,16 - (1,07 + 0,336\varepsilon) 0,72 + (1,07 + 0,09\varepsilon) 1,56 = 1,02 + 0,01\varepsilon; \\\beta[4, \varepsilon] &= 1,00 + 0,01\varepsilon; \\\dots \dots \dots \therefore \\\beta[s, \varepsilon] &\cong 1 \text{ при } s > 4.\end{aligned}$$

Кривая переходного процесса, построенная по расчетным данным, изображена на рис. 8.40. Из рисунка видно, что перегулирование $\sigma = (\Delta\beta/\beta_{уст}) \cdot 100 = (0,44/1) 100 = 44 \%$, а время регулирования $t_p = (3...4) T = 10...15$ с.

Косвенные методы оценки качества импульсных систем

В теории импульсных систем, как и в теории систем непрерывного действия, для оценки качества процесса управления часто применяются косвенные методы, не требующие построения самого процесса управления.

Оценка качества импульсной системы по степени устойчивости. Как установили при анализе устойчивости, переходная составляющая решения разностного уравнения замкнутой системы

$$\beta_n[r] = A_1 z_1^r + A_2 z_2^r + \dots + A_n z_n^r,$$

где z_i — i -й корень характеристического уравнения

$$F_3(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_0 = 0.$$

При подстановке вместо z его значения e^{q_i} переходная составляющая будет определяться выражением

$$\beta_n[r] = A_1 e^{q_1 r} + A_2 e^{q_2 r} + \dots + A_n e^{q_n r},$$

где $q_i = \sigma_i + j\bar{\omega} - i$ -й корень характеристического уравнения

$$F_3(q) = c_n e^{qn} + c_{n-1} e^{q(n-1)} + \dots + c_0 = 0. \quad (8.87)$$

В устойчивой системе, переходный процесс которой имеет затухающий характер, действительные части всех корней q_i характеристического уравнения отрицательны. Быстрота затухания переходного процесса системы определяется наименьшей по абсолютной величине действительной частью корня $\sigma = \min |\operatorname{Re} q_i|$, называемой *степенью устойчивости системы*. В импульсной системе можно добиться бесконечной степени устойчивости, когда все корни характеристического уравнения (8.87) имеют действительные части, равные $-\infty$. Бесконечная степень устойчивости имеет место, если выполняется условие

$$c_0 = c_1 = \dots = c_{n-1} = 0. \quad (8.88)$$

Действительно, в этом случае $F_3(q) = c_n e^{qn} = 0$, и поэтому должно выполняться условие $e^{qn} = e^{\sigma n} e^{\pm j\omega n} = 0$, что возможно лишь при $\sigma = -\infty$.

При бесконечной степени устойчивости переходный процесс в системе заканчивается за конечное время. В этом нетрудно убедиться

z-Изображение переходной функции системы в соответствии с выражениями (8.85) и (8.79) и учетом (8.88) равно

$$\begin{aligned} \beta(z, \varepsilon) &= K_3(z, \varepsilon) \frac{z}{z-1} = \frac{d_k(\varepsilon) z^k + d_{k-1}(\varepsilon) z^{k-1} + \dots + d_0(\varepsilon)}{e_j z^l} = \\ &= \beta[0, \varepsilon] + \beta[1, \varepsilon] z^{-1} + \beta[2, \varepsilon] z^{-2} + \dots, \end{aligned}$$

Рис. 8.41. Монотонная ступенчатая переходная функция системы:

a — соответствующая переходной функции системы; b — соответствующая отклонению переходной функции от ее предельного значения.

откуда

$$\begin{aligned} d_k(\varepsilon) z^k + d_{k-1}(\varepsilon) z^{k-1} + \dots + d_0(\varepsilon) &= \\ = e_l z^l \{ \beta[0, \varepsilon] + \dots + \beta[l-k-1, \varepsilon] z^{-(l-k-1)} + \\ + \beta[l-k, \varepsilon] z^{-(l-k)} + \dots \}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $k \leq l$ и $\beta[0] = \dots = \beta[l-k-1] = 0$, получим

$$\beta[l-k, \varepsilon] = d_k(\varepsilon)/e_l;$$

$$\beta[l-k+1, \varepsilon] = d_{k-1}(\varepsilon)/e_l;$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\beta[k+l-k, \varepsilon] = \beta[l, \varepsilon] = d_0(\varepsilon)/e_l;$$

$$\beta[m, \varepsilon] = 0 \quad \text{при } m > l,$$

т. е. переходный процесс системы при бесконечной степени устойчивости заканчивается за конечное число периодов.

Интегральные оценки качества. Если переходная функция системы имеет монотонный характер (рис. 8.41, a), то для косвенной оценки качества может служить сумма

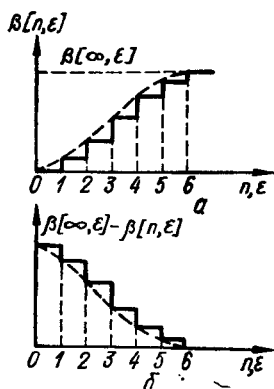
$$I_1 = \sum_{n=0}^{\infty} (\beta[\infty, \varepsilon] - \beta[n, \varepsilon]),$$

где $\beta[n, \varepsilon]$ — ступенчатая функция, соответствующая переходной функции системы; $\beta[\infty, \varepsilon]$ — установившееся значение управляемой величины, являющаяся аналогом соответствующей интегральной оценки в теории непрерывного регулирования. Сумма I_1 равна площади, заключенной между ступенчатой функцией $\beta[n, \varepsilon]$ и установившемся ее значением $\beta[\infty, \varepsilon]$, т. е. площади отклонения ступенчатой функции $\beta[n, \varepsilon]$ от ее предельного значения (рис. 8.41, b).

Для косвенной оценки качества при колебательной переходной функции используется квадратическая суммарная оценка

$$I_2 = \sum_{n=0}^{\infty} (\beta[\infty, \varepsilon] - \beta[n, \varepsilon])^2.$$

Методы вычисления сумм I_1 и I_2 , не требующие решения разностных уравнений, изложены в [78].



8.9. Импульсные системы экстраполяции

Определение экстраполяции. Закон экстраполяции

На практике часто возникает задача выработки упрежденных значений функций, например упрежденных координат цели. Упрежденные координаты используются при наведении перехватчиков и ракет в точку их предполагаемой встречи с целью или стрельбе зенитными снарядами в точку, в которой окажется цель за время полета снаряда. Для определения упрежденных значений функции используются ее предыдущие значения. *Определение значения функции в некоторой (упрежденной) точке по предыдущим значениям называется экстраполяцией*, а устройства, которые решают задачу экстраполяции, называются *экстраполяторами* (экстраполирующими устройствами или системами).

Особенно широко экстраполяция используется при преобразовании дискретных данных в непрерывную функцию. Под преобразованием дискретных данных $x[n]$ в непрерывные понимают создание (генерирование) непрерывной функции $x_g(\bar{t}) = x_g[n, \epsilon]$, совпадающей с дискретными данными в момент их поступления (рис. 8.42). Задача преобразования дискретных данных в непрерывные возникает, например, при необходимости получения непрерывных значений координат цели по дискретным их значениям, выдаваемым радиолокатором кругового обзора. В этом случае с выхода радиолокатора на вход экстраполятора поступает координата цели, например, плоскостная координата $x[n]$, в дискретные моменты времени.

Сложность задачи преобразования состоит в том, что неизвестно, по какому закону изменяется непрерывная входная функция $x(\bar{t})$, соответствующая дискретной входной функции $x[n]$, в промежутках между дискретными моментами времени и, следовательно, неизвестно, по какому закону следует формировать непрерывную функцию $x_g[n, \epsilon]$ на выходе экстраполятора в этих промежутках времени. Поэтому принимают некоторый закон — закон прогноза (экстраполяции), связывающий последующие значения входной функции $x(\bar{t})$ с ее предыдущими значениями. Благодаря этому становится возможным формировать в соответствии с принятым законом прогноза также и выходную величину экстраполятора $x_g[n, \epsilon]$ в последующем интервале времени $n \leq \bar{t} < n + 1$ по предыдущим значениям.

Закон экстраполяции (прогноза). Закон прогноза зависит от тех ограничений, которые накладываются на входную функцию $x(t)$. При определении закона прогноза изменения координат цели необходимо

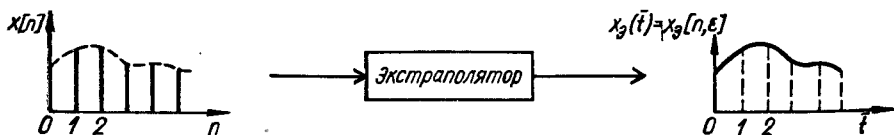


Рис. 8.42. Преобразование дискретных данных $x[n]$ в непрерывные $x_g(\bar{t})$.

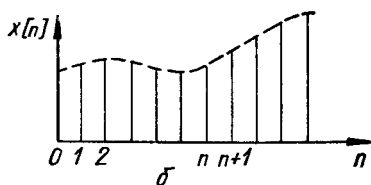
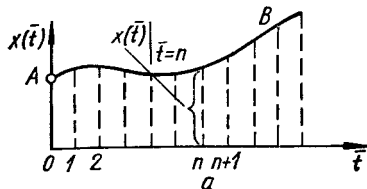


Рис. 8.43. Изменение координаты $x(\bar{t})$ цели (а) и соответствующая ей решетчатая функция $x[n]$ на выходе РЛС (б).

учитывать ограничения на скорость, ускорение и более высокие производные движения цели. Закон прогноза определяется лишь для ограниченного участка траектории цели, соответствующего, например, периоду обзора радиолокатора.

Пусть, например, координата $x(\bar{t})$ цели изменяется во времени по кривой AB (рис. 8.43, а). С выхода РЛС кругового обзора эта координата выдается в дискретные моменты $\bar{t} = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$ с периодом, равным периоду вращения антенны (функция $x[n]$, рис. 8.43, б). Закон прогноза изменения координаты $x(\bar{t})$ в n -й период обзора (на время $\bar{t} = n + \varepsilon$, где смещение $\varepsilon = \Delta t/T$ изменяется от 0 до 1) может быть представлен в виде полинома s -й степени относительно времени, например, частичной суммой ряда Тейлора:

$$x(\bar{t}) = x[n, \varepsilon] = x(\bar{t})|_{\bar{t}=n} + \left. \frac{dx(\bar{t})}{d\bar{t}} \right|_{\bar{t}=n} \varepsilon + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2x(\bar{t})}{d\bar{t}^2} \right|_{\bar{t}=n} \varepsilon^2 + \dots \\ \dots + \frac{1}{s!} \left. \frac{d^s x(\bar{t})}{d\bar{t}^s} \right|_{\bar{t}=n} \varepsilon^s = \sum_{v=0}^s \frac{1}{v!} \left. \frac{d^v x(\bar{t})}{d\bar{t}^v} \right|_{\bar{t}=n} \varepsilon^v, \quad (8.89)$$

где $d^v x(\bar{t})/d\bar{t}^v|_{\bar{t}=n}$ — производная v -го порядка входной непрерывной функции $x(\bar{t}) = x[n, \varepsilon]$ в момент $\bar{t} = n$.

Из формулы (8.89) видно, что, действительно, закон прогноза учитывает значение скорости изменения входной координаты $x(\bar{t})$, ее ускорения и более высоких производных. При определении координаты в последующий период времени $\bar{t} = n + \varepsilon$ принимается, что эта координата продолжает изменяться с теми же значениями скорости, ускорения и т. д., какие она имела в момент времени $\bar{t} = n$.

Очевидно, что в соответствии с законом прогноза (8.89) следует вырабатывать и координату $x[n, \varepsilon]$ на выходе экстраполятора. Однако данные о входной координате $x(\bar{t})$ с выхода РЛС поступают лишь в дискретные моменты времени (рис. 8.43, б) и определение производных $d^v x(\bar{t})/d\bar{t}^v$, а следовательно, и использование закона прогноза (8.89) для определения $x[n, \varepsilon]$ невозможно. Учитывая же, что при медленном изменении $x(\bar{t})$

$$d^v x(\bar{t})/d\bar{t}^v \approx \Delta^v x[n - v], \quad (8.90)$$

благодаря чему производные непрерывной функции $x(\bar{t})$ можно заменить соответствующими разностями дискретной функции $x[n]$, которые легко поддаются измерению. С учетом (8.89) и (8.90) выходную величину экстраполятора в период $\bar{t} = n + \varepsilon$ следует формировать в соответствии со следующим законом экстраполяции

$$x_3[n, \varepsilon] = x[n] + \Delta x[n-1]\varepsilon + (1/2!) \Delta^2 x[n-2]\varepsilon^2 + \dots + (1/s!) \Delta^s x[n-s]\varepsilon^s = \sum_{v=0}^s (1/v!) \Delta^v x[n-v]\varepsilon^v. \quad (8.91)$$

Типы экстраполяторов в зависимости от закона экстраполяции

Значение самой координаты $x[n]$ и разностей меняется от интервала к интервалу при изменении закона движения цели. Вероятно, что во многих случаях удовлетворительное приближение будет достигнуто, если в качестве закона экстраполяции взять несколько первых (например, два, три) членов ряда (8.91).

Если закон экстраполяции имеет вид

$$x_3[n, \varepsilon] = x[n], \quad (8.92)$$

то экстраполятор, реализующий этот закон, называется *экстраполятором нулевого порядка*. В качестве такого экстраполятора обычно применяется фиксатор (рис. 8.44). Для выполнения экстраполяции по закону (8.92) необходимо знание только одного значения входной функции — величины $x[n]$. Если входная координата изменяется, то возникает ошибка экстраполяции, которая к концу периода может достигать значительной величины (см., например, $\Delta x[0]$, рис. 8.44).

Экстраполятор первого порядка имеет линейный закон экстраполяции:

$$X_3[n, \varepsilon] = x[n] + \Delta x[n-1]\varepsilon. \quad (8.93)$$

Так как первая разность $\Delta x[n-1] = x[n] - x[n-1]$ возникает за время $t = T$, т. е. $\bar{t} = t/T = 1$, то она соответствует скорости изменения координаты цели за последний $(n-1)$ -й период. Поэтому выходная величина в следующий n -й период будет изменяться со скоростью, измеренной за предыдущий период (рис. 8.45). Благодаря этому точ-



Рис. 8.44. Экстраполятор нулевого порядка.



Рис. 8.45. Экстраполятор 1-го порядка.

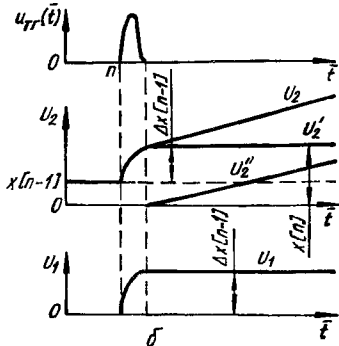
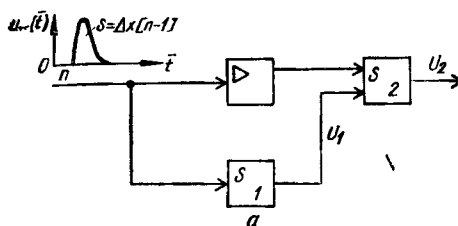


Рис. 8.46. Схема экстраполятора 1-го порядка (а) и формы напряжений на его элементах (б).

ность экстраполяции будет выше по сравнению с экстраполятором нулевого порядка при линейном или более сложном законе изменения координаты цели.

Для экстраполяции по линейному закону (8.93), в частности для определения $\Delta x[n-1] = x[n] - x[n-1]$, необходимо знать два предыдущих значения функции: $x[n]$ и $x[n-1]$. Разность $\Delta x[n-1]$ измеряется в дискретный момент n .

Для формирования непрерывной кривой по линейному закону применяются интегрирующие элементы (рис. 8.46, а). Формирование первого члена закона экстраполяции (8.93) осуществляется в соответствии с выражением $x[n] = x[n-1] + \Delta x[n-1]$. Если на вход схемы рис. 8.46, а подать короткий импульс напряжения $u_{tr}(t)$, площадь которого $s = \Delta x[n-1]$ (т. е. площадь импульса равна первой разности), то этот импульс, поступив на интегратор S2, вызовет изменение напряжения на его выходе от значения $x[n-1]$, соответствующего предыдущему периоду, на $\Delta x[n-1]$ (рис. 8.46, б). Благодаря этому в момент $t = n$ выходное напряжение S2 $U'_2 = x[n] = x[n-1] + \Delta x[n-1]$, т. е. соответствует первому члену закона экстраполяции.

Этот же импульс напряжения поступает на интегратор S1. Так как первая разность $\Delta x[n-1]$ соответствует скорости изменения координаты в предыдущем периоде, то на выходе S1 возникает постоянное напряжение U_1 , пропорциональное этой скорости: $U_1 = \Delta x[n-1]$. Напряжение U_1 , поступая на S2, вызывает на его выходе линейно изменяющуюся составляющую напряжения $U'_2 = \Delta x[n-1] \epsilon$, соответствующую второму члену закона экстраполяции. В результате сложения напряжений U'_2 и U'_2 на выходе S2 получается линейно изменяющееся напряжение U_2 со скоростью, равной скорости изменения координаты в предыдущий период, т. е. реализуется линейный закон экстраполяции (8.93).

Экстраполятор второго порядка осуществляет квадратичный закон экстраполяции

$$x_2[n, \epsilon] = x[n] + \Delta x[n-1] \epsilon + (1/2) \Delta^2 x[n-2] \epsilon^2 \quad (8.94)$$

и может быть выполнен с помощью трех интеграторов.

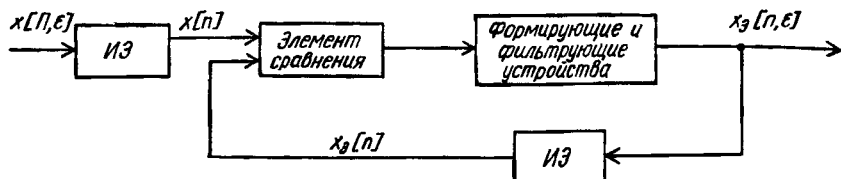


Рис. 8.47. Функциональная схема замкнутой системы экстраполяции.

В общем случае экстраполятор, осуществляющий преобразование дискретной функции в непрерывную в соответствии с законом экстраполяции в виде полинома S -й степени, называется экстраполятором S -го порядка. В технике наибольшее распространение получили экстраполяторы первого порядка. Экстраполирующие устройства выполняются, как правило, в виде систем с обратной связью (рис. 8.47). Сравнение выходного проэкстраполированного сигнала с входными дискретными данными, определение необходимого числа разностей в соответствии с принятым законом экстраполяции может осуществляться автоматически самой системой. Но в технике применяются также полуавтоматические системы, в которых задачу устранения ошибок в дискретные моменты выполняет человек-оператор.

8.10. Полуавтоматические (эргатические) системы управления

Характеристика полуавтоматических систем управления. Математическая модель человека-оператора

В замкнутый контур полуавтоматической системы входит как элемент системы человек-оператор (рис. 8.48). Примером такой системы может служить полуавтоматическая система экстраполяции координат, система управления положением одной из осей летательного аппарата и т. д. Оператор с помощью визуального устройства сравнивает входную и выходную величины (задающее воздействие и управляемую величину), выявляет ошибку и уменьшает или устраняет ее с помощью соответствующих управляющих движений (перемещением рукоятки кноппельного механизма, вращением штурвала). От действия человека-оператора зависят динамические свойства системы в целом. Поэтому его реакция должна быть согласована с требованиями устойчивости, динамической точности системы. Человек, участвующий в каком-либо процессе и имеющий возможность активно вмешиваться,

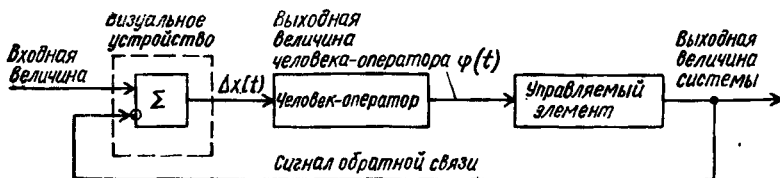


Рис. 8.48. Функциональная схема полуавтоматической системы.

старается оптимизировать этот процесс. Для того чтобы можно было осуществить анализ и синтез замкнутой системы, содержащей человека-оператора, необходимо математически описать выполняемые им функции, представить человека-оператора в виде комбинации известных динамических звеньев и определить его передаточную функцию, т. е. найти математическую модель человека-оператора.

Математическая модель человека-оператора зависит от выполняемых им действий, от условий работы, вида входных воздействий, динамики управляемого процесса и т. д. Поэтому невозможно получить универсальную модель человека-оператора. Однако поведение человека-оператора независимо от выполняемых им операций и условий работы определяется следующими характеристиками [70, 77]:

1) наличием чистого запаздывания τ_3 , равного времени реакции человека-оператора;

2) фильтрацией низких частот (ослаблением высоких частот оператором, выполняющим отслеживание);

3) способностью оператора изменять свою передаточную функцию с изменением задачи управления и в процессе его обучения;

4) способностью оператора чувствовать изменение параметров управляемого объекта и окружающей среды и соответственно изменять свои параметры;

5) способностью человека-оператора предвидеть будущие значения по предыдущим (способность экстраполяции) при отслеживании;

6) относительной стабильностью характеристик оператора при достаточном времени его обучения и работы и при решении сравнительно простых задач.

Полуавтоматическая импульсная система экстраполяции

В рассматриваемой системе (рис. 8.49, а, б) в дискретные моменты времени на экране индикатора кругового обзора ИКО радиолокационной станции РЛС высвечивается отметка от цели Ц и отметка, соответствующая координатам вырабатываемым системой экстраполяции — маркер М. Перемещая рукоятку кноппельного механизма КМ, оператор совмещает маркер с отметкой от цели, т. е. устраняет отклонение.

Найдем передаточную функцию человека-оператора полуавтоматической системы экстраполяции плоскостной координаты $x[n]$ в режиме устранения ошибки по положению и уточнению скорости (в режиме ввода корректуры по координате и по скорости).

Входной величиной оператора является отклонение маркера от отметки от цели $\Delta x(t)$ (ошибка), а выходной — угол поворота $\varphi(t)$ ротора тахогенератора BR. Можно считать, что угловая скорость перемещения рукоятки кноппельного механизма КМ, а следовательно, угловая скорость ротора BR $d\varphi(t)/dt$ пропорциональны отклонению $\Delta x(t)$: $d\varphi(t)/dt = k_1 \Delta x(t - \tau_3)$, где τ_3 — время запаздывания реакции оператора на внезапно появившийся сигнал ошибки. Последнее уравнение в операторной форме имеет вид $p\varphi(p) = k_1 \Delta x(p) e^{-\tau_3 p}$, откуда передаточная функция человека-оператора

$$K_{оп}(p) = \varphi(p)/\Delta x(p) = k_1 e^{-\tau_3 p}/p, \quad (8.95)$$

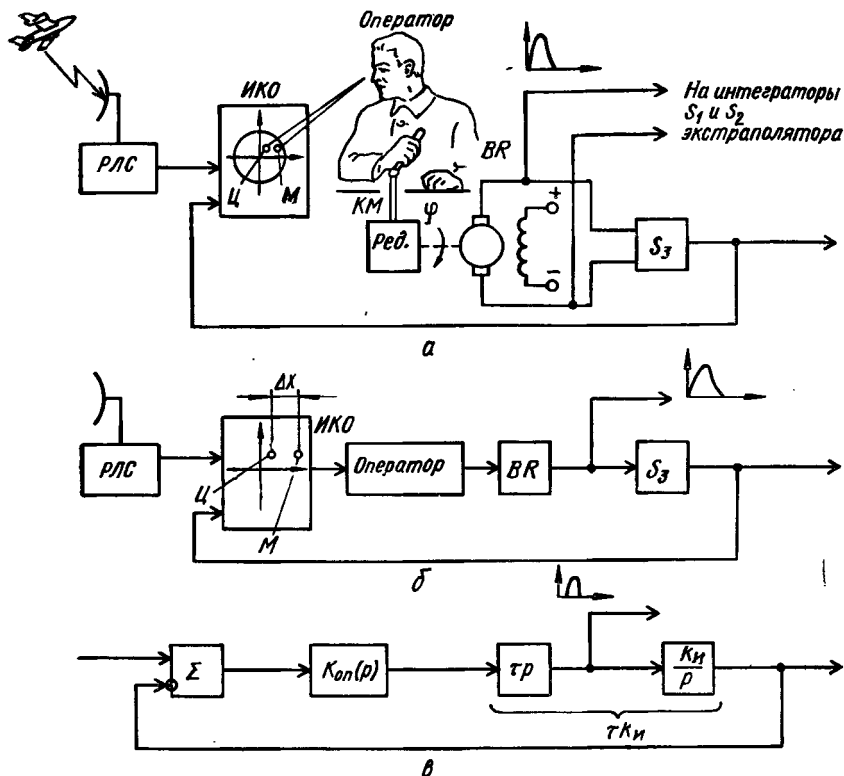


Рис. 8.49. Схемы полуавтоматической системы экстраполяции:
а — принципиальная; б — функциональная; в — структурная.

т. е. оператор представляется интегрирующим звеном и звеном запаздывания.

Наличие интегрирующего звена в передаточной функции оператора можно объяснить, рассматривая работу оператора и системы в целом. Оператор при наличии отклонения маркера от отметки цели (при поступлении ошибки $\Delta x(t)$ на вход оператора) перемещает рукоятку кноппельного механизма и тем самым вращает ротор тахогенератора и изменяет угол его поворота до тех пор, пока зрительно наблюдаемая им на экране ИКО ошибка не станет равной нулю. Из этого следует, что система с оператором является астатической, т. е. содержит интегрирующее звено. Как видно из структурной схемы системы (рис. 8.49, в), часть системы без оператора описывается передаточной функцией $\tau_{тг} p k_n / p = \tau_{тг} k_n$, т. е. представляет собой пропорциональное звено. Поэтому интегрирующее звено относится к оператору.

Передаточная функция системы экстраполяции в режиме ввода корректуры в разомкнутом состоянии в соответствии с ее алгоритмической схемой (рис. 8.49, в) и с учетом формулы (8.95) имеет вид

$$K_p(p) = K_{оп}(p) \tau_{тг} p k_n / p = k_p e^{-\tau_3 p} / p, \quad (k_p = k_1 k_{тг} k_n). \quad (8.96)$$

С приобретением опыта оператор при перемещении рукоятки кноппельного механизма учитывает не только величину, но и скорость изменения ошибки, поэтому его действия в этом случае описываются следующим уравнением:

$$d\varphi(t)/dt = k_1 \Delta x(t - \tau_s) + k_2 d\{\Delta x(t - \tau_s)\}/dt,$$

или в операторной форме

$$p\varphi(p) = k_1 \Delta x(p) e^{-\tau_s p} + k_2 p \Delta x(p) e^{-\tau_s p},$$

откуда передаточная функция опытного оператора

$$K_{\text{оп}}(p) = \frac{\varphi(p)}{\Delta x(p)} = \frac{(k_1 + k_2 p) e^{-\tau_s p}}{p} = \frac{k(1 + Tp) e^{-\tau_s p}}{p}, \quad (8.97)$$

где $k = k_1$; $T = k_2/k_1$.

Коэффициенты k_1 , k_2 зависят от динамических свойств других элементов системы, постоянная времени запаздывания $\tau \approx 0,13$ с [77].

Передаточная функция системы рис. 8.48, в при опытном операторе

$$K_p(p) = K_{\text{оп}}(p) \frac{\tau_{\text{тг}} p k_n}{p} = \frac{k_p(1 + Tp) e^{-\tau_s p}}{p}, \quad (8.98)$$

где $k_p = k\tau_{\text{тг}}k_n$.

Дальнейшее исследование системы в режиме ввода корректуры, а также полной системы экстраполяции можно выполнить с помощью известных методов теории автоматического управления.

Введение в системе экстраполяции корректуры по координате и по скорости. Рассмотрим, как вводится корректура по положению и по скорости в систему экстраполяции с помощью полуавтоматической системы (рис. 8.49). Во время перемещения оператором рукоятки кноппельного механизма с целью устранения ошибки $\Delta x(t)$ на выходе тахогенератора возникает импульс напряжения $u_{\text{тг}}(t) = k_{\text{тг}} d\varphi(t)/dt$. Этот импульс напряжения поступает на интегратор S_3 системы (рис. 8.49). Напряжение на выходе интегратора S_3 пропорционально площади импульса S_n напряжения тахогенератора

$$u_3(t) = k_3 \int_0^t u_{\text{тг}}(t) dt = k_3 S_n.$$

Напряжение $u_3(t)$ поступает на ИКО. Под его влиянием перемещается маркер на величину ошибки $\Delta x(t)$, т. е.

$$\Delta x(t) = k_{\text{ико}} u_3(t) = k_{\text{ико}} k_3 S_n,$$

где $\Delta x(t) = x_{\text{ц}}(t) - x_{\text{м}}(t)$; $x_{\text{ц}}(t)$, $x_{\text{м}}(t)$ — соответственно координаты цели и маркера, или в принятых ранее обозначениях $\Delta x[n-1] = x[n] - x[n-1]$. Отсюда следует, что площадь импульса напряжения тахогенератора $u_{\text{тг}}(t)$ пропорциональна ошибке системы (первой разности), возникающей за время одного оборота антенны РЛС: $\Delta x[n-1] = k_{\text{ико}} k_3 S_n$.

Импульс напряжения тахогенератора $u_{\text{тг}}(t)$ поступает не только на интегратор S_3 рассматриваемой системы (рис. 8.49), но одновременно

подается также на интеграторы $S1$ и $S2$ системы экстраполяции (рис. 8.46, а). При поступлении импульса напряжения $u_{тг}(t)$ на выходной интегратор $S2$ напряжение на его выходе и системы, соответствующее $x[n-1]$, изменяется на величину ошибки $\Delta x[n-1]$ (вводится корректура по координате) (рис. 8.46, в, кривая U'_2) и тем самым устраняется ошибка системы экстраполяции по положению. При этом формируется первый член $x[n]$ закона экстраполяции (8.93): $x[n] = x[n-1] + \Delta x[n-1]$.

Ошибка воспроизведения $\Delta x[n-1]$ возникает за время T одного периода вращения антенны ($n=1$), поэтому, как отмечалось, она соответствует отклонению скорости изменения координаты, вырабатываемой системой экстраполяции, от скорости цели в предыдущий ($n-1$)-й период. При подаче импульса напряжения тахогенератора $u_{тг}(t)$, площадь которого пропорциональна отклонению скорости (первой разности $\Delta x[n-1]$) на интегратор $S1$, изменяется напряжение на его выходе $U_1(t)$ на величину, пропорциональную первой разности $\Delta x[n-1]$, т. е. на величину, пропорциональную ошибке по скорости (рис. 8.46, б). Благодаря этому введению корректуры по скорости, напряжение $U_1(t)$ становится пропорциональным скорости изменения координаты цели в предыдущий ($n-1$)-й период. Подавая напряжение $U_1(t)$ на второй вход интегратора $S2$, на его выходе появляется линейно изменяющаяся во времени составляющая напряжения (кривая U'_2 , рис. 8.46, б), соответствующая второму члену $\Delta x[n-1]$ в закона экстраполяции (8.93). Выходное напряжение интегратора $S2$ и системы в целом $U_2(t)$ в интервале времени $n \leq \bar{t} < n+1$ равно сумме составляющих напряжений U'_2 и U''_2 . Таким образом, реализуется линейный закон экстраполяции (8.93). Напряжение $U_2(t)$ с выхода интегратора $S2$ перед появлением следующей отметки от цели на ИКО и вводом корректуры передается на интегратор S_3 рассмотренной полуавтоматической системы (рис. 8.49).

ГЛАВА 9

Цифровые системы автоматического управления

9.1. Определение цифровой САУ.

Функциональные схемы цифровых систем

Для повышения показателей качества САУ часто в них включают цифровые ЭВМ или цифровые вычислительные устройства (ЦВУ). САУ с цифровыми ЭВМ или ЦВУ называются *цифровыми системами автоматического управления*, или *цифровыми автоматическими системами* (ЦАС).

В ЦАС ЦВУ можно включать вне замкнутого контура управления

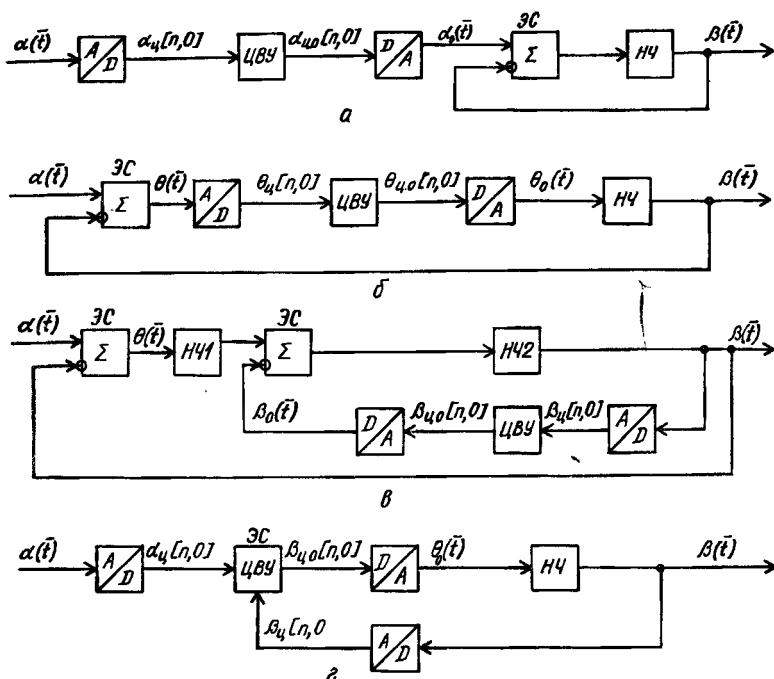


Рис. 9.1. Функциональные схемы цифровых автоматических систем.

(рис. 9.1, а), в замкнутый контур управления (рис. 9.1, б, в) и в качестве элемента сравнения (рис. 9.1, г).

В системах первого типа с помощью аналогово-цифрового преобразователя (АЦП) A/D непрерывное (аналоговое) воздействие $\alpha(\bar{t})$ преобразуется в цифровой код $\alpha_n[n, 0]$. ЦБУ на основании поступающей информации $\alpha_n[n, 0]$ вырабатывает оптимальное задающее воздействие $\alpha_{ц0}[n, 0]$. Последнее с помощью цифро-аналогового преобразователя (ЦАП) D/A преобразуется в непрерывный сигнал $\alpha_0(\bar{t})$ и поступает на элемент сравнения (ЭС) замкнутой системы. Замкнутый контур системы может быть непрерывным (ИЧ) либо импульсным. Достоинство такой ЦАС состоит в простоте изменения программы ЦБУ, в соответствии с которой вырабатывается задающее воздействие.

В системах второго типа (рис. 9.1, б) ЦБУ, включенное в прямую цепь замкнутого контура системы, выполняет роль последовательного корректирующего устройства. В системах третьего типа (рис. 9.1, в) ЦБУ включено в цепь местной обратной связи, охватывающей непрерывную часть ИЧ2 системы и является параллельным корректирующим устройством. Цифровые корректирующие устройства в этих системах позволяют реализовать сложные алгоритмы управления, т. е. значительно улучшить динамические свойства систем.

В системах четвертого типа (рис. 9.1, г) ЦБУ выполняет функции элемента сравнения и корректирующего устройства. В этой системе на цифровой элемент сравнения задающее воздействие $\alpha(\bar{t})$ и управле-

мая величина $\beta(\bar{t})$ поступают в цифровой форме — в виде m -разрядных двоичных цифровых кодов $\alpha_n[n, 0]$ и $\beta_n[n, 0]$. На выходе элемента сравнения сигнал рассогласования также получается в виде m -разрядного двоичного кода $\theta_n[n, 0] = \alpha_n[n, 0] - \beta_n[n, 0]$, который в ЦВУ с целью улучшения динамических свойств системы соответствующим образом преобразуется в другой двоичный цифровой код $\theta_{n0}[n, 0]$. С помощью преобразователя D/A цифровой код преобразуется в непрерывный сигнал $\theta_0(\bar{t})$, поступающий на непрерывную часть НЧ системы. ЦАС четвертого типа обладает всеми качествами первого, второго и третьего типов, а благодаря более высокой разрешающей способности элемента сравнения обладает более высокой точностью.

9.2. Преобразователи непрерывных величин в цифровой код и цифрового кода в непрерывную величину

Преобразователи непрерывных (аналоговых) величин в цифровой код (АЦЦ) A/D

Преобразователи непрерывных величин в цифровой код являются устройствами, которые преобразуют непрерывную физическую величину в дискретную цифровую форму. Цифровой код характеризуется системой счисления. Напомним, что целое число N можно представить в любой системе счисления с основанием B в виде

$$N = a_n B^n + a_{n-1} B^{n-1} + \dots + a_1 B^1 + a_0 B^0,$$

где $a_n, \dots, a_0$ — коэффициенты разряда, принимающие значения от 0 до $B-1$.

Для двоичной системы счисления $B = 2$, $a_i = 0, 1$ и

$$N = a_n 2^n + a_{n-1} 2^{n-1} + \dots + a_1 2^1 + a_0 2^0.$$

Для десятичной системы счисления $B = 10$, $a_i = 0, 1, \dots, 9$ и

$$N = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_1 10^1 + a_0 10^0.$$

Например, число 35 в десятичной системе счисления равно $35 = 3 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$, а в двоичной $35 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$ или 100011.

В настоящее время применяется большое количество преобразователей, которые можно разделить на три группы: 1) преобразователи пространственных перемещений в цифровой код; 2) преобразователи электрических величин (напряжений, токов, сопротивлений) в цифровой код; 3) преобразователи интервалов времени в цифровой код.

Преобразователи пространственных перемещений преобразуют в цифровой код углы поворота и линейные перемещения.

Преобразователи угол-код делятся на преобразователи считывания и преобразователи последовательного счета. В преобразователях считывания угол поворота вала выдается со считывающего устройства непосредственно в двоичном коде. Основным элементом преобразователя является диск или барабан с кодовой шкалой (маской). На

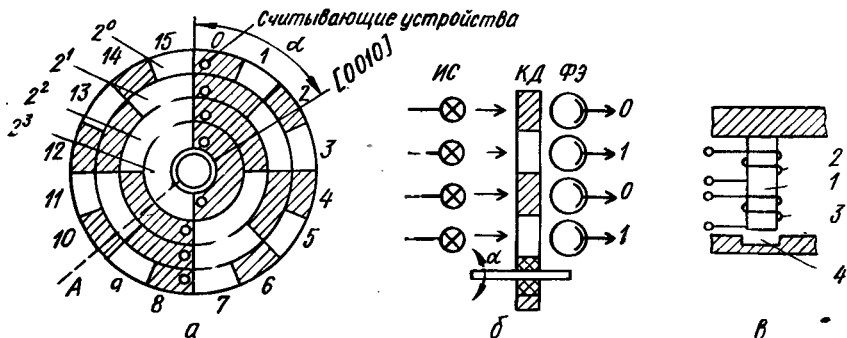


Рис. 9.2. Преобразователи угол-код типа считывания:

а — четырехразрядный кодированный диск с контактным способом съема; б — с фотоэлектрическим способом считывания; в — трансформатор с цилиндрическим сердечником.

рис. 9.2, а изображен четырехразрядный кодированный диск. Диск разбит соответственно по числу разрядов на четыре concentрических кольца. Внешнее кольцо соответствует младшему (2⁰), а внутреннее кольцу старшему (2³) разряду. На окружности наносят изображения кода в виде прозрачных и непрозрачных или проводящих и непроводящих участков, соответствующих 1 и 0. Съем кодированных сигналов осуществляется с помощью фотоэлектрических устройств, контактных щеток, трансформаторов с воздушным зазором и другими способами. На один разряд кода (на одно кольцо) требуется одно считывающее устройство.

При съеме с помощью контактных щеток последние устанавливаются неподвижно в радиальном направлении (рис. 9.2, а). При этом, если щетка находится на проводящем участке (на рис. 9.2, а не заштрихован), то передается 1, а если на непроводящем, то 0. При повороте диска, например, на угол α щетками фиксируется код 0010.

При фотоэлектрическом способе считывания (рис. 9.2, б) кодированный диск КД, выполненный из оптического стекла, устанавливается между источниками света направленного излучения ИС и фоточувствительными элементами ФЭ (фотодиодами или фоторезисторами), размещенными по радиусу диска. При этом освещаться и возбуждаться будут только те фотоэлементы, которые находятся под прозрачными участками диска. Сигналы на выходах фотоэлементов после усиления образуют параллельный код двоичного числа, соответствующего углу поворота вала. С помощью фотоэлектрических преобразователей можно реализовать 14—18-разрядный код, что дает возможность получения высокой точности преобразования.

При трансформаторном съеме сигнала считывающая головка преобразователя (рис. 9.2, в) выполняется в виде трансформатора с цилиндрическим сердечником 1 из мягкого железа, на котором размещены первичная 2 и вторичная 3 обмотки. Код в виде напряжения снимается со вторичной обмотки. Кодовый диск выполняется из железа. Вырезанные участки (канавки) разрядных колец соответствуют коду 0, а невырезанные части — коду 1. При совпадении считывающей головки

Таблица 9.1. Таблица кодов

Десятичные числа	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Двоичные числа	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001
Код Грея	0000	0001	0011	0010	0110	0111	0101	0100	1100	1101

с канавкой 4 во вторичной обмотке индуцируется малое напряжение, что соответствует коду 0. Если же под головкой окажется невырезанный участок, то напряжение на выходе вторичной обмотки увеличивается, что соответствует коду 1. Достоинство преобразователей с трансформаторным съемом состоит в их высокой надежности. Однако их точность преобразования ограничивается семью-восемью разрядами.

Преобразователи угол — код с обычной двоичной кодовой шкалой на практике, как правило, не применяются, так как имеется вероятность появления ложных кодов. Значительная ошибка считывания может возникнуть из-за того, что в двоичной системе счисления при переходе от одного числа к другому могут меняться цифры сразу в нескольких разрядах. Например, при переходе от числа 7 к числу 8



(см. рис. 9.2, а и табл.

9.1) в первых трех разрядах код 1 сменяется кодом 0, а в четвертом код 0 сменяется кодом 1 и поэтому при небольшом сдвиге щетки в старшем разряде, как показано на рис. 9.2, а, будет сниматься код 0000 (т. е. 0), а не код 1000 (т. е. 8). Для устранения этого недостатка применяются диски с масками специальных кодов — двоичного циклического кода (кода Грея) или двоично-сдвинутого кода (кода Баркера).

Два соседних числа, записанные в коде Грея (табл. 9.1), различаются цифрой лишь одного разряда. Благодаря этому вероятность ошибки считывания. Согласно кодо-

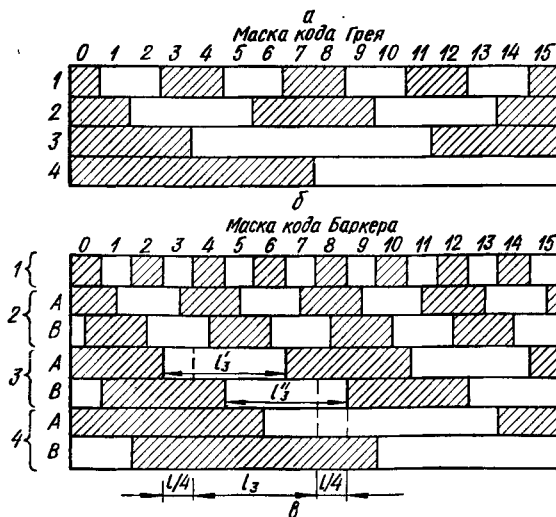


Рис. 9.3. Кодовые маски:

а — двоичного кода; б — кода Грея; в — кода Баркера.

вой маске Грея (рис. 9.3, б), при переходе от одного числа к другому прозрачные и затемненные участки сменяются только в одном разряде. В этом случае ошибка считывания не превышает единицы младшего разряда.

От обычного двоичного кода перейти к коду Грея можно путем логического сложения (сложения без переноса) числа в обычном двоичном коде N_d с тем же числом, но сдвинутым на один элемент вправо:

$$\begin{array}{r} N_d = a_n \ a_{n-1} \dots a_1 \ a_0 \\ \oplus \qquad \qquad a_n \ a_{n-1} \dots a_1 \\ \hline N_r = b_n \ b_{n-1} b_{n-2} \dots b_0 \end{array}$$

Здесь $N_r = b_n b_{n-1} \dots b_0$ — число, записанное в коде Грея; $\oplus$ — знак логического сложения. Например, число 45 в коде Грея будет иметь вид

$$\begin{array}{r} N_d = 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \\ \oplus \qquad \qquad 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \\ \hline N_r = 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \end{array}$$

Для перехода от кода Грея к двоичному можно воспользоваться схемой

$$\begin{array}{r} N_r = b_n b_{n-1} b_{n-2} \dots b_1 b_0 \\ \oplus \qquad \qquad a_n \ a_{n-1} \dots a_2 a_1 \\ \hline N_d = a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0 \end{array}$$

Например, число 45 в коде Грея $N_r = 111011$. Пользуясь приведенной схемой, получим число 45 в двоичном коде

$$\begin{array}{r} N_r = 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \\ \oplus \qquad \qquad 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \\ \hline N_d = 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \end{array}$$

Код Грея преобразуется в обычный двоичный код с помощью специальных схем.

В маске кода Баркера (рис. 9.3, в) каждый разряд двоичного кода, кроме первого, представляется двумя подразрядами A и B . Число элементов считывания равно $n + (n - 1)$, где n — число разрядов обычного двоичного кода. Кодовые участки подразрядов A и B i -го разряда равны по длине кодовым участкам i -го разряда маски обычного двоичного кода (рис. 9.3, а), но сдвинуты соответственно влево и вправо относительно последних на $1/4$ длины кодового участка данного разряда.

Если код i -го разряда 0, то в $i + 1$ разряде код считывается с элемента считывания подразряда A , если же код i -го разряда 1, то в $i + 1$ разряде включается элемент считывания подразряда B . Благодаря этому неоднозначность при считывании с кодовой маски Баркера возможна лишь в младшем разряде, т. е., как и в коде Грея, погрешность считывания не превышает единицы младшего разряда. Однако при считывании с маски кода Баркера получается отсчет в обычном n -раз-

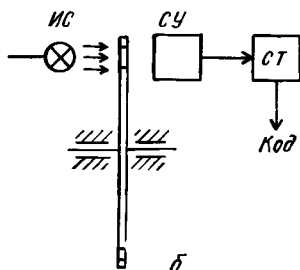
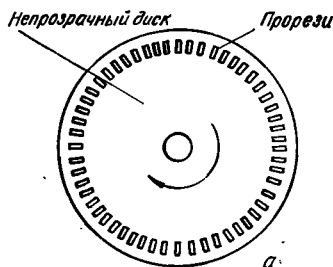


Рис. 9.4. Фотоэлектрический преобразователь угол — число импульсов типа последовательного счета:

а — непрозрачный диск с прорезами; б — схема преобразователя (ИС — источник света).

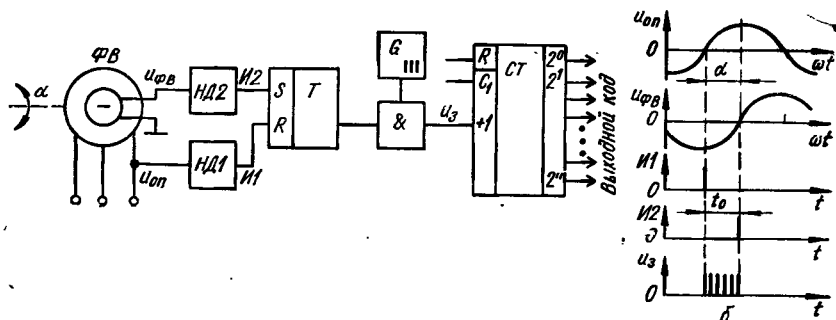


Рис. 9.5. Преобразователь угол — временной интервал — код типа последовательного счета с фазовращателем:

а — блок схема; б — временная диаграмма.

рядном двоичном коде и поэтому отпадает необходимость в дополнительных преобразователях.

В преобразователях, работающих по методу *последовательного счета*, угол поворота вала преобразуется в количество импульсов. В простейшем случае для этого используется закрепленный на валу диск или барабан, разделенный метками на проводящие (прозрачные) и непроводящие (непрозрачные) участки (рис. 9.4). Сигнал может сниматься контактным, фотоэлектрическим, индуктивным и другими способами. При повороте диска в считывающем устройстве СУ формируются импульсы, число которых зависит от угла поворота вала и плотности меток. Импульсы поступают на счетчик СТ.

Более широкое применение нашли преобразователи, работающие по методу счета, осуществляющие последовательное преобразование угол — временной интервал — код. Среди них чаще всего применяются преобразователи с фазовращателями (рис. 9.5, а). Угол поворота вала α равен сдвигу фазы напряжения $u_{\phi в}$ фазовращателя ФВ (сельсина, работающего в фазовращательном режиме, СКВТ) относительно опорного напряжения $u_{оп}$ (рис. 9.5, б): $\alpha = \omega t_0$, где ω — угловая частота опорного напряжения, t_0 — интервал времени, пропорциональный углу поворота ротора фазовращателя ФВ. В момент прохождения напряжений $u_{оп}$ и $u_{\phi в}$ через нуль от отрицательного к положительному

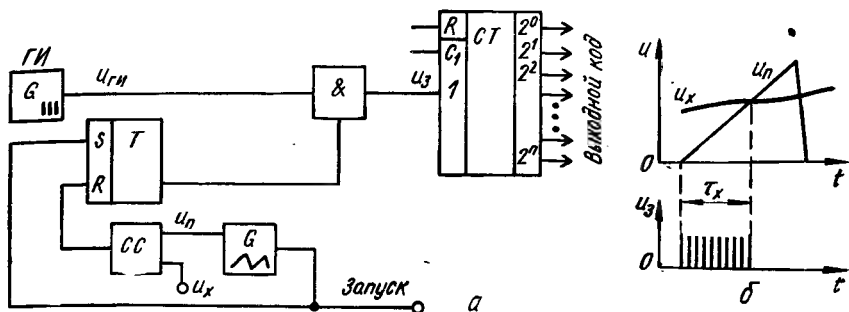


Рис. 9.6. Преобразователь напряжение-код по методу последовательного счета с промежуточным преобразованием напряжения во временной интервал:
а — схема; б — формы сигналов.

периоду нулевые детекторы $НД1$ и $НД2$ формируют управляющие импульсы $И1$ и $И2$, разнесенные во времени на t_0 , т. е. на время, соответствующее углу α поворота ротора $ФВ$. Импульс $И1$ переводит триггер T в состояние 1 и через схему $И$ пропускаются на счетчик $СТ$ импульсы от генератора импульсов G . Импульс $И2$ переводит триггер в состояние 0 и в счетчике $СТ$ зафиксировано число импульсов, пропорциональное временному интервалу t_0 между импульсами $И1$ и $И2$, а следовательно, углу α поворота ротора $ФВ$. С помощью двоичного счетчика число импульсов преобразуется в двоичный код.

Преобразователи напряжения в цифровой код. Преобразователи напряжение-код делятся на преобразователи, работающие по принципу последовательного счета и по принципу сравнения (взвешивания).

Для преобразователей, работающих по *принципу последовательного счета* (рис. 9.6, а), характерно промежуточное преобразование измеряемого напряжения u_x во временной интервал T_x , который затем преобразуется в определенное число импульсов и в двоичный код. Преобразование напряжения во временной интервал осуществляется с помощью генератора пилообразного напряжения G и схемы сравнения $СС$. С приходом импульса запуска на выходе G вырабатывается пилообразное напряжение u_n . Одновременно триггер T открывает элемент $И$ и импульсы от генератора импульсов $ГИ$ поступают на счетчик $СТ$ (рис. 9.6, б). В момент равенства напряжений u_n и u_x срабатывает схема сравнения $СС$, триггер T ставится в нулевое положение и импульсы $ГИ$ перестают поступать на счетчик.

Таким образом, при $u_n = u_x$ имеем

$$T_x = (u_x - u_{n0})/\alpha,$$

где u_{n0} — начальное значение пилообразного напряжения, α — скорость его изменения. Число импульсов, поступающих на счетчик, $A_x = T_x/T_{Г.и.}$, поэтому $A_x = (u_x - u_{n0})/T_{Г.и.}\alpha$, где $T_{Г.и.}$ — период следования импульсов $ГИ$, т. е. число импульсов, поступающих на счетчик, соответствует значению напряжения u_x .

В преобразователях напряжение-код, работающих по *принципу сравнения*, преобразуемое напряжение u_x последовательно сравнива-

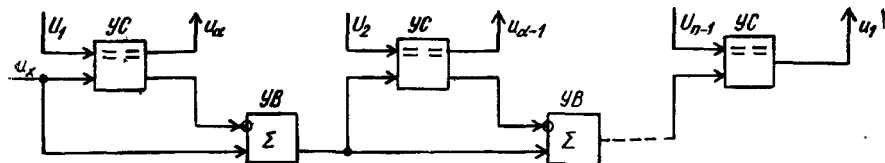


Рис. 9.7. Преобразователь напряжение-код по принципу сравнения.

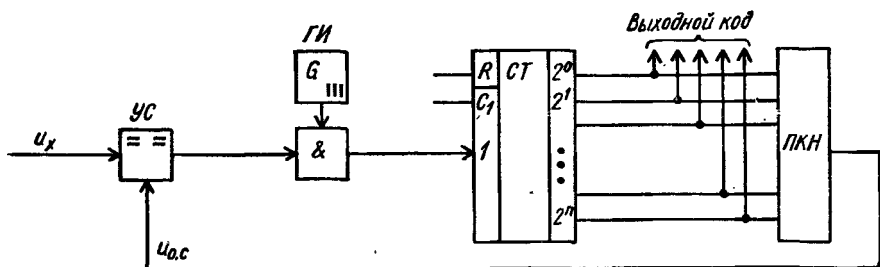


Рис. 9.8. Преобразователь напряжение-код с обратной связью.

ется с эталонными напряжениями U_i , значения которых соответствуют определенным i -м разрядам кода. Вариант функциональной схемы преобразователя приведен на рис. 9.7. Напряжение u_x в устройстве сравнения УС сравнивается с наибольшим из эталонных напряжений U_1 , соответствующим старшему разряду α кода. Если $u_x > U_1$, то в данном разряде вырабатывается сигнал $u_\alpha = 1$, а в устройстве вычитания УВ определяется разность $u_x - U_1$, которая подается на устройство сравнения $(\alpha - 1)$ -го разряда и сравнивается с эталонным напряжением U_2 , соответствующим данному разряду. Если при первом сравнении оказалось $u_x < u_1$, то в α -м разряде вырабатывается код $u_\alpha = 0$, и все напряжение u_x передается на устройства сравнения и вычитания $(\alpha - 1)$ -го разряда и т. д.

Преобразователи с эталонными источниками напряжения обладают высоким быстродействием, но имеют невысокую точность. Поэтому среди преобразователей, работающих по принципу сравнения, нашли применение преобразователи с обратной связью (рис. 9.8). Цикл работы начинается со сброса счетчика СТ в нулевое положение ($u_{o.c} = 0$). При поступлении напряжения u_x на устройство сравнения УС на его выходе возникает сигнал, который открывает схему И и импульсы от генератора импульсов ГИ начинают поступать на счетчик СТ. Напряжение $u_{o.c}$ с выхода преобразователя код-напряжение ПKN через обратную связь поступает на устройство сравнения УС. При поступлении импульсов на СТ напряжение $u_{o.c}$ увеличивается и в момент времени, когда $u_{o.c}$ становится равным напряжению u_x , схема И закрывается и в СТ фиксируется код напряжения u_x .

Преобразователи напряжение-код, построенные по принципу сравнения и вычитания, имеют меньшее время преобразования, чем преобразователи последовательного счета, но более сложны.

Преобразователи цифрового кода в непрерывную величину D/A

Преобразователи код-напряжения. Для преобразования цифрового кода в напряжение используются сопротивления, соединенные по определенной схеме, включение которых на источник эталонного напряжения u_z происходит в соответствии с декодируемым числом. Выходное напряжение $u_{\text{вых}}$, снимаемое с нагрузки, пропорционально декодируемому числу. Основным типом преобразователей код-напряжение являются преобразователи с суммированием напряжений на аттенуаторе сопротивлений. Вариант схемы, обеспечивающей преобразование трехразрядного двоичного кода в напряжение, изображен на рис. 9.9.

Преобразуемый код $A_x = u_3 u_2 u_1$ (где u_i — единица или ноль i -го разряда) в виде напряжений параллельно поступает на разрядные триггеры T_i регистра, которые управляют схемами И и И'. Аттенуатор составлен из резисторов R и $2R$ таким образом, что нагрузка для эталонного напряжения u_z в схеме каждого разряда равна $3R$.

При преобразовании кода $A_x = 1.2^3 + 0.2^2 + 0.2^0$, $u_3 = 1$, $u_2 = u_1 = 0$ напряжением триггера T_3 открывается схема И и u_z подается на схему аттенуатора. При этом $u_{\text{вых}} = (1/3) u_z$. В общем случае напряжение на выходе схемы

$$u_{\text{вых}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^2} U_z (u_3 2^2 + u_2 2^1 + u_1 2^0),$$

для n -разрядного преобразователя

$$u_{\text{вых}} = \frac{1}{3} \frac{1}{2^{n-1}} U_z \sum_{i=1}^n u_i 2^{i-1}.$$

Чтобы преобразовать числа разных знаков, необходимо на входе схемы установить знаковый триггер, а на выходе схемы предусмотреть возможность получения напряжения разной полярности. Данные преобразователи обладают высоким быстродействием (время преобразования не превышает единиц микросекунд), достаточной точностью (точность преобразования может быть доведена до 0,05...0,1 %), имеют сравнительно простую схему и обеспечивают пропорциональное преобразование кодов с числом разрядов $n \leq 10$, что вполне достаточно для цифровых автоматических систем.

Преобразователи код-напряжение с суммированием токов на аттенуаторе могут обеспечить более высокую точность, но для их построения требуется n высокостабильных источников тока, где n — число разрядов преобразуемых кодов.

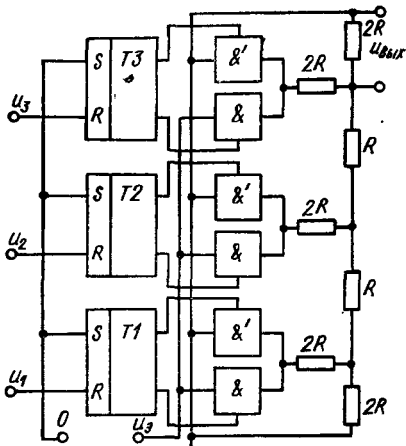


Рис. 9.9. Преобразователь код-напряжение с суммированием напряжений на аттенуаторе сопротивлений.

9.3. Примеры цифровых автоматических систем

Цифровые следящие системы (ЦСС)

Среди цифровых следящих систем получили широкое применение системы, обеспечивающие преобразование цифрового кода в угловое перемещение. В зависимости от типа исполнительного двигателя ЦСС подразделяются на системы с непрерывным и шаговым исполнительными двигателями.

Цифровая следящая система с непрерывным исполнительным двигателем (рис. 9.10, а). Угол поворота $\alpha(t)$ ведущего вала с помощью преобразователя угол-код Y/D преобразуется в цифровой код $\alpha_u[n]$ и поступает на элемент сравнения ЭС системы. При необходимости выработки задающего воздействия по определенной программе после преобразователя Y/D может включаться цифровое вычислительное устройство ЦВУ. На ЭС системы задающее воздействие в виде цифрового кода может поступать также от программного задающего устройства.

Угол поворота приемного вала $\beta(t)$ (управляемая величина) с помощью преобразователя угол-код Y/D , включенного в цепь обратной связи, преобразуется в цифровой код $\beta_u[n]$ и подается на ЭС. На выходе 1 ЭС возникает цифровой код $\theta_u[n]$, равный разности $\alpha_u[n]$ и $\beta_u[n]$. Этот код подается на преобразователь код-напряжение D/H , на выходе которого возникает напряжение $u_\theta(t)$, пропорциональное коду $\theta_u[n]$. Напряжение $u_\theta(t)$ усиливается усилителем $У$ и используется для управления исполнительным двигателем $М$. Последний поворачивает вал рабочего механизма $РМ$ в сторону уменьшения рассогласования $\theta_u[n]$. Отработка прекратится лишь тогда, когда снимаемое с Y/D число $\beta_u[n]$ станет равным задающему числу $\alpha_u[n]$.

На выходе 2 элемента сравнения образуется управляющий сигнал, зависящий от знака кода $\theta_u[n]$. Этот сигнал подается на переключаю-

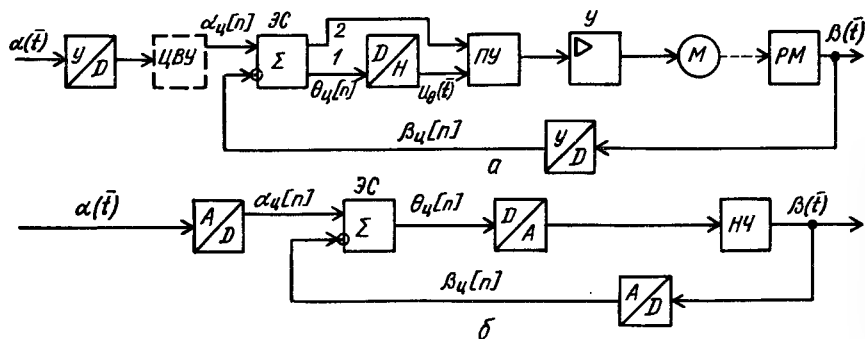


Рис. 9.10. Функциональная схема ЦСС с непрерывным исполнительным двигателем (а) и обобщенная функциональная схема ЦСС (б).

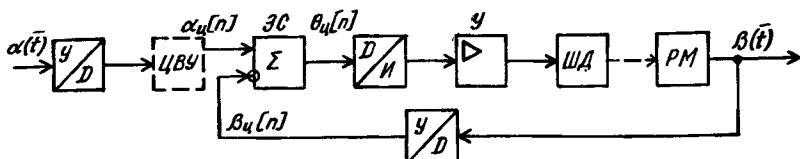


Рис. 9.11. Функциональная схема ЦСС с шаговым двигателем.

щее устройство *ПУ* и соответствующим образом изменяет полярность или фазу напряжения, подаваемого с *D/И* на усилитель *У*.

Не изменяя динамических свойств, функциональную схему ЦСС (рис. 9.10, а) можно преобразовать к виду рис. 9.10, б, в которой преобразователи угол-код *У/D* заменены с целью получения более общей схемы на преобразователи непрерывной величины в цифровой код *A/D*. Непрерывная часть *НЧ* системы включает усилитель *У*, исполнительный двигатель *М* и рабочий механизм *РМ*.

Цифровая следящая система с шаговым двигателем (рис. 9.11). Особенностью ЦСС с шаговым двигателем *ШД* в качестве исполнительного элемента состоит в том, что цифровой код рассогласования на выходе элемента сравнения *ЭС* преобразуется не в непрерывное напряжение, как в системе рис. 9.10, а, а в число импульсов с помощью преобразователя *D/И*. При поступлении импульса напряжения на шаговый двигатель *ШД* с выхода усилителя *У* ротор двигателя поворачивается на определенный угол-шаг. Вращение ротора прекратится, как только двигатель повернет ведомый вал на такой угол, при котором число $\beta_n[n]$ станет равным числу $\alpha_n[n]$.

Устойчивость ЦСС с *ШД* определяется динамикой работы шагового двигателя, в котором время переходного процесса равно времени обработки одного импульса.

САУ с микропроцессором для управления технологическим процессом

Упрощенная схема системы с микропроцессором изображена на рис. 9.12. Аналоговая (непрерывная) информация об управляемых параметрах (например, о температуре, химическом составе, вязкости сырья, влажности, давлении) технологического процесса поступает на автоматические управляющие устройства *АУУ*, осуществляющие стабилизацию того или иного параметра технологического процесса на уровне, заданном уставкой. Эта же информация поступает на микропроцессор *МКП*, где преобразуется в цифровой код и в соответствии с заложенной программой вырабатываются управляющие воздействия. Последние, поступая на *АУУ*, изменяют их уставки таким образом, что при изменении пара-

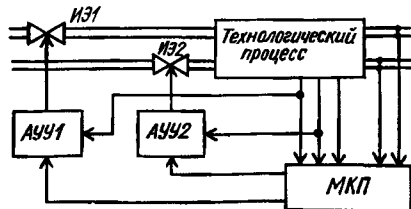


Рис. 9.12. Микропроцессорная система автоматического управления технологическим процессом.

метров поступающего сырья и других факторов обеспечивается управление технологическим процессом, близкое к оптимальному. При необходимости управляющее воздействие из цифровой формы с помощью цифроаналоговых преобразователей (ЦАП) преобразуются в непрерывные сигналы управления. Рассмотренное управление технологическим процессом с помощью микропроцессорной САУ, когда с помощью МКП изменяются только уставки автоматических управляющих устройств, называется супервизорным управлением. Рассмотренная система управления относится к адаптивным САУ.

При непосредственном цифровом управлении сигналы, приводящие в действие исполнительные элементы ИЭ, поступают не от отдельных автоматических управляющих устройств, а непосредственно от управляющего микропроцессора. Система упрощается, так как функции автоматических управляющих устройств отдельных параметров выполняет МКП. Благодаря большим скоростям вычисления число контуров управления в зависимости от вида технологического процесса и типа микропроцессора может меняться от 10 до 400 и более [9]. Такая система должна работать в реальном масштабе времени. Из рассмотренного примера видно, какими большими, качественно новыми (адаптивное управление, управление большим числом параметров) возможностями обладают цифровые системы управления по сравнению с непрерывными САУ.

9.4. Структурные схемы ЦАС

Математическое описание элементов цифровых автоматических систем

Преобразователь непрерывного сигнала в цифровой код A/D . Преобразователь A/D осуществляет три операции: квантование сигнала по времени, квантование по уровню и кодирование. Квантование по времени заключается в измерении непрерывной величины $x(\bar{t})$ в дискретные моменты времени и осуществляется импульсным элементом ИЭ. На выходе импульсного элемента получается решетчатая функция $x[n]$ (рис. 9.13). Период квантования по времени зависит от спектральной характеристики непрерывного сигнала и определяется теоремой Котельникова. Процесс квантования решетчатой функции $x[n]$ по уровню можно представить как прохождение сигнала $x[n]$ через не-

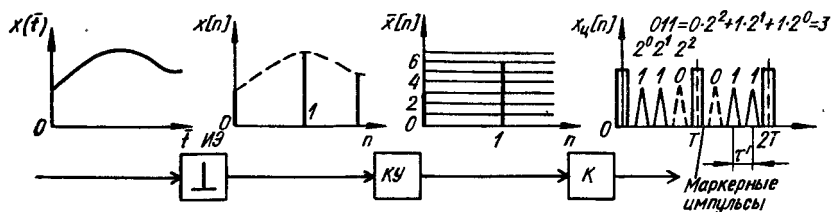


Рис. 9.13. Схема преобразователя непрерывного сигнала в цифровой код A/D .

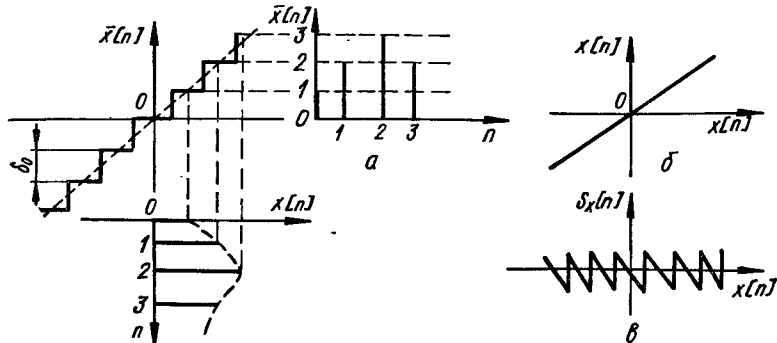


Рис. 9.14. Процесс квантования по уровню.

линейный элемент с многоступенчатой релейной характеристикой (рис. 9.14, а) — квантователь по уровню КУ (рис. 9.13). В результате квантования по уровню точно измеренные значения сигнала $x[n]$ заменяются приближенными ближайшими дискретными значениями $\bar{x}[n]$, т. е. процесс квантования по уровню равносителен округлению сигнала $x[n]$ до целых значений. Шаг квантования δ_0 характеризует точность преобразователя А/Д.

Учет квантования по уровню приводит к необходимости рассмотрения нелинейных цифровых систем. Анализ систем упрощается, если элемент с многоступенчатой релейной характеристикой (рис. 9.14, а) представить в виде параллельного соединения линейного усилительного элемента с коэффициентом $k = 1$, характеристика которого изображена на рис. 9.14, б, и нелинейного элемента с характеристикой (рис. 9.14, в), равной разности между линейной и релейной (рис. 9.14, а) характеристиками. В этом случае квантованный по уровню сигнал можно представить, как сумму точного сигнала $x[n]$ и добавочного сигнала $s_x[n]$, ограниченного по величине половиной ступени квантования:

$$\bar{x}[n] = x[n] + s_x[n]. \quad (9.1)$$

В соответствии с выражением (9.1) квантователь по уровню КУ (рис. 9.15, а) на структурной схеме можно представить эквивалентной схемой, изображенной на рис. 9.15, б.

Прежде чем сигнал $\bar{x}[n]$ поступает на ЦВУ, осуществляется его кодирование — преобразование в цифровой код $x_{ц}[n]$. Если в ЦВУ используется двоичная система счисления, то с помощью кодирующего устройства К (рис. 9.13) каждый импульс, поступающий с квантова-

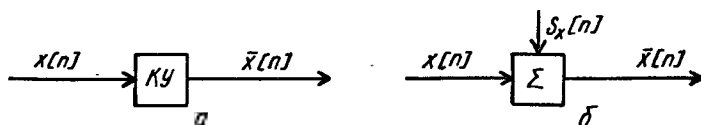


Рис. 9.15. Изображение квантователя по уровню КУ (а) на структурной схеме (б).

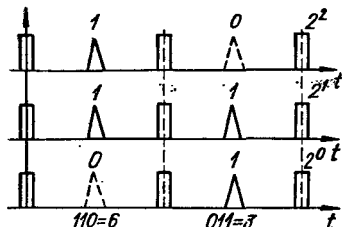


Рис. 9.16. Параллельное представление чисел.

разряде присутствует единица, то в соответствующем интервале возникает импульс. При наличии нуля в данном разряде импульс отсутствует.

На ЦВУ числа могут поступать последовательным или параллельным кодом. В первом случае разряды числа идут последовательно друг за другом по одному каналу, как правило, начиная с младшего (рис. 9.13). Одно число от другого отделяется специальным маркерным импульсом. Минимальный интервал T передачи числа равен $n\tau'$, где n — количество разрядов числа. При параллельном коде все разряды числа поступают одновременно (параллельно) по нескольким каналам, число которых равно числу разрядов (рис. 9.16).

Так как при кодировании сигнала $\bar{x}[n]$ в цифровой (в частности, в двоичный) код $x_{ц}[n]$ не происходит изменения (преобразования) информации, то передаточная функция кодирующего устройства K равна единице. Поэтому преобразователь непрерывной величины в цифровой код A/D (рис. 9.17, а) в соответствии с приведенными выше рассуждениями можно на алгоритмической схеме представить эквивалентной схемой, изображенной на рис. 9.17, б.

Цифровые вычислительные устройства. Цифровое вычислительное устройство ЦВУ (см. рис. 9.1) можно рассматривать как дискретный преобразователь, преобразующий входную последовательность чисел $x_{ц}[n]$ в выходную $y_{ц}[n]$ в соответствии с заложенной программой вычислений, представляющей собой алгоритм переработки информации. Довольно широкий класс алгоритмов переработки информации может быть описан разностным уравнением вида

$$y[n] = a_0 x[n] + a_1 x[n-1] + \dots + a_m x[n-m] - b_1 y[n-1] - \dots - b_l y[n-l], \quad (9.2)$$

т. е. выходной сигнал $y[n]$ дискретного преобразователя в момент $\bar{t} = n$ определяется значением выходного сигнала в тот же момент вре-

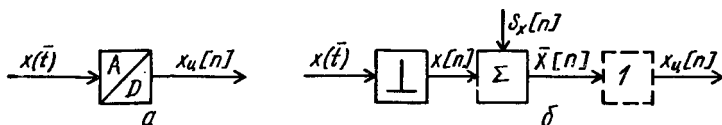


Рис. 9.17. Изображение преобразователя A/D (а) на структурной схеме (б).

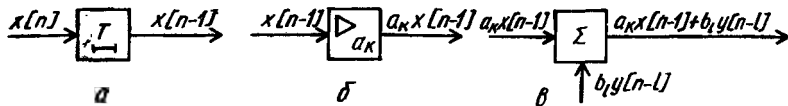


Рис. 9.18. К определению условия физической реализуемости передаточной функции дискретного преобразователя.

мени $x[n]$ и значениями входных и выходных сигналов в предшествующие моменты времени.

Чтобы записать уравнение (9.2) в операционной форме, необходимо подвергнуть операции z -преобразования обе части уравнения. Учитывая, что $Z\{x[n-k]\} = z^{-k} X(z)$ и $Z\{y[n-k]\} = z^{-k} Y(z)$, получаем

$$Y(z) = a_0 X(z) + a_1 z^{-1} X(z) + \dots + a_m z^{-m} X(z) - b_1 z^{-1} Y(z) - \dots - b_l z^{-l} Y(z)$$

$$\text{или } (1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_l z^{-l}) Y(z) = (a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}) X(z), \quad (9.3)$$

откуда находим передаточную функцию дискретного преобразователя

$$K_d(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}}{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_l z^{-l}}. \quad (9.4)$$

Здесь для общности свободный член в знаменателе обозначен b_0 .

Из формулы (9.4) видно, что передаточная функция дискретного преобразователя представляет собой отношение двух многочленов от z^{-1} . Для получения в числителе и знаменателе многочленов по положительным степеням z умножим числитель и знаменатель на z^m , если $m \geq l$

$$K_d(z) = \frac{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_l z^{m-l}}, \quad (9.5)$$

или на z^l , если $l \geq m$

$$K_d(z) = \frac{a_0 z^l + a_1 z^{l-1} + \dots + a_m z^{l-m}}{b_0 z^l + b_1 z^{l-1} + \dots + b_l}. \quad (9.6)$$

Найдем условие физической реализуемости полученных передаточных функций дискретного преобразователя, т. е. условие, при выполнении которого передаточные функции могут быть реализованы в виде схемы, состоящей из физических осуществимых элементов. В соответствии с уравнением (9.2) для получения $y[n]$ необходимо получить сигналы $x[n-1], \dots, x[n-m], y[n-1], \dots, y[n-l]$. Эти сигналы можно получить из $x[n]$ и $y[n]$ с помощью элементов задержки T на один период квантования (рис. 9.18, а), применяющихся в цифровой вычислительной технике. Включая последовательно несколько элементов задержки, можно задержать импульс на необходимое число периодов квантования. Затем полученные сигналы необходимо умножить на соответствующие постоянные коэффициенты a_k и b_k и выполнить их

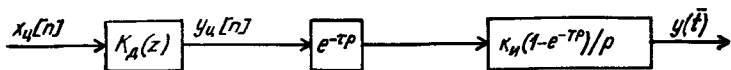


Рис. 9.19. Структурная схема ЦВУ и фиксатора.

суммирование. Умножение может быть осуществлено с помощью цифровых множительных устройств (рис. 9.18, б), а суммирование — с помощью сумматоров (рис. 9.18, в). Таким образом, разностное уравнение (9.2), а следовательно, передаточные функции дискретного преобразователя (9.4) — (9.6) физически реализуемы: в правую часть уравнения (9.2) входят только сигналы в данный и в прошлые моменты времени, получаемые с помощью элементов задержки. Дискретный преобразователь является физически реализуемым, если его выходной сигнал $y[n]$ не зависит от будущих значений входного сигнала. Применительно к передаточной функции это условие проявляется в требовании, чтобы степень полинома числителя не превышала степень полинома знаменателя (т. е. чтобы коэффициент b_0 в выражениях (9.5) и (9.6) не был равен нулю).

При составлении структурной схемы дискретного преобразователя необходимо учитывать время прохождения сигнала через преобразователь, а также время, необходимое для кодирования. Величина запаздывания зависит от быстродействия ЦВУ. Для учета времени запаздывания τ в структурную схему ЦВУ вводится элемент запаздывания с передаточной функцией $e^{-\tau p}$ (рис. 9.19).

Преобразователь числового кода в непрерывную величину D/A (экстраполятор). Выходной сигнал ЦВУ имеет дискретный характер. Во многих случаях информация в форме последовательности коротких импульсов неприменима для элементов, включенных после ЦВУ, так как они обладают узкой полосой пропускания. Поэтому после ЦВУ необходимо включать преобразователь числового кода в непрерывную величину D/A . В ЦАС чаще всего используются преобразователи D/A типа экстраполяторов нулевого порядка — фиксаторы, закон экстраполяции которых имеет вид $x(\bar{t}) = x[n]$ при $n \leq \bar{t} < (n+1)$, т. е. фиксатор «запоминает» площадь мгновенного импульса на период следования импульсов.

Передаточная функция фиксатора определяется выражением

$$K_{\Phi T}(p) = k_n(1 - e^{-\tau p})/p. \quad (9.7)$$

Непрерывная часть системы объединяет все устройства непрерывного действия системы (усилители, корректирующие устройства, исполнительные элементы) и описывается передаточной функцией $K_{\text{нТ}}(p)$.

Структурная схема ЦАС. Представление ЦАС в виде предельной импульсной системы

Структурная схема ЦАС (рис. 9.1, г) в соответствии с приведенным математическим описанием элементов показана на рис. 9.20, а. Как отмечалось, действия сигналов $s_{\alpha}[n]$ и $s_{\beta}[n]$ отражают влияние квантования по уровню. В современных ЭВМ количество разрядов в коде

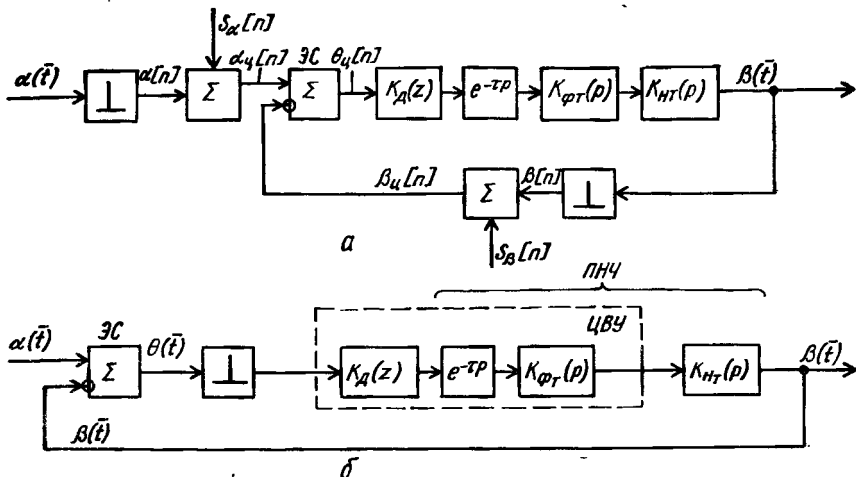


Рис. 9.20. Представление ЦАС предельной импульсной системой:
 а — структурная схема ЦАС; б — структурная схема предельной импульсной системы, соответствующей схеме ЦАС.

составляет $10...20$, что позволяет разбить диапазон изменения сигнала на $2^{10}...2^{20}$ элементарных дискретных значений. По этой причине можно пренебречь квантованием по уровню и считать, что преобразователь A/D состоит из импульсного элемента и кодирующего устройства. Не изменяя динамических свойств ЦАС, структурную схему системы (рис. 9.20, а) можно привести к структурной схеме предельной импульсной системы с запаздыванием (рис. 9.20, б). Это название подчеркивает, что предельная импульсная система получается из цифровой при увеличении до бесконечности числа дискретных значений при квантовании по уровню. Приведение ЦАС к предельной импульсной системе с запаздыванием позволяет использовать для исследования ЦАС все методы, разработанные применительно к импульсным системам с запаздыванием.

9.5. Передаточные функции ЦАС

Передаточная функция разомкнутой ЦАС

Для определения передаточной функции ЦАС (рис. 9.20, б) в разомкнутом состоянии обычно размыкает обратную связь. Входной величиной разомкнутой системы является $\theta(\bar{t})$, а выходной $\beta(\bar{t})$. Для удобства анализа элемент запаздывания, фиксатор и непрерывную часть, описываемые передаточными функциями $e^{-\tau p}$, $K_{фТ}(p)$ и $K_{нТ}(p)$, объединяют в приведенную непрерывную часть ПНЧ системы.

Передаточная функция ПНЧ

$$K_{пнчТ}(p) = e^{-\tau p} K_{фТ}(p) K_{нТ}(p)$$

или после подстановки значений передаточной функции фиксатора из формулы (9.7)

$$K_{\text{пнч}T}(p) = e^{-\tau p} K_{\text{н}T}(p) (1 - e^{-Tp})/p.$$

z-Передаточная функция ПНЧ может быть определена с помощью Z-преобразования

$$K_{\text{пнч}}(z, \varepsilon) = Z \{K_{\text{пнч}}(p)\}.$$

Примем вначале, что запаздывание отсутствует ($\tau = 0$). Тогда

$$K'_{\text{пнч}T}(p) = K_{\text{н}T}(p) (1 - e^{-Tp})/p,$$

соответствующая z-передаточная функция

$$\begin{aligned} K'_{\text{пнч}}(z, \varepsilon) &= Z \left\{ \frac{1 - e^{-Tp}}{p} K_{\text{н}T}(p) \right\} = Z \left\{ \frac{K_{\text{н}T}(p)}{p} - e^{-Tp} \frac{K_{\text{н}T}(p)}{p} \right\} = \\ &= Z \left\{ \frac{K_{\text{н}T}(p)}{p} \right\} - Z \left\{ e^{-Tp} \frac{K_{\text{н}T}(p)}{p} \right\}. \end{aligned}$$

Согласно теореме о смещении аргумента в оригинале

$$Z \{f_T(t \pm \gamma T)\} = Z \{e^{\pm \gamma T p} F_T(p)\} = z^{\pm \gamma} Z \{F_T(p)\},$$

и учитывая, что для фиксатора $\gamma = 1$, получим

$$K'_{\text{пнч}}(z, \varepsilon) = Z \left\{ \frac{K_{\text{н}T}(p)}{p} \right\} - z^{-1} Z \left\{ \frac{K_{\text{н}T}(p)}{p} \right\} = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{K_{\text{н}T}(p)}{p} \right\}. \quad (9.8)$$

С учетом времени чистого запаздывания τ

$$\begin{aligned} K_{\text{пнч}}(z, \varepsilon) &= Z \{K'_{\text{пнч}}(p) e^{-\tau p}\} = Z \left\{ (1 - e^{-Tp}) \frac{K_{\text{н}T}(p)}{p} e^{-\tau p} \right\} = \\ &= \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{K_{\text{н}T}(p)}{p} e^{-\tau p} \right\}. \end{aligned} \quad (9.9)$$

Можно z-передаточную функцию $K_{\text{пнч}}(z, \varepsilon)$ выразить также через $K'_{\text{пнч}}(z, \varepsilon)$ без учета запаздывания (см. формулу (9.8)), используя теорему смещения. При этом следует иметь в виду, что в общем случае чистое запаздывание τ вносится как цифровой машиной, так и непрерывной частью системы и возможны случаи, когда $\tau \geq T$ и $\tau \leq T$, где T — период квантования сигнала по времени. Удобно представить τ суммой $\tau = mT + \bar{\tau}T$, где m — целое число, $0 \leq \bar{\tau} < 1$. На рис. 9.21 показан случай, когда $m = 1$, $\bar{\tau} = 0,4$, т. е. $\tau = 1 \cdot T + 0,4T$, или в относительном времени $\tau/T = m + \bar{\tau} = 1 + 0,4$. Используя теорему смещения, получаем:

$$\begin{aligned} K_{\text{пнч}}(z, \varepsilon) &= Z \{K'_{\text{пнч}T}(p) e^{-\tau p}\} = \\ &= \begin{cases} z^{-(1+m)} K'_{\text{пнч}}(z, 1 + \varepsilon - \bar{\tau}), & \text{если } 0 \leq \varepsilon < \bar{\tau}, \\ z^{-m} K'_{\text{пнч}}(z, \varepsilon - \bar{\tau}), & \text{если } \bar{\tau} \leq \varepsilon < 1, \end{cases} \end{aligned} \quad (9.10)$$

т. е. для получения z -передаточной функции ПНЧ $K_{\text{ПНЧ}}(z, \varepsilon)$ ЦАС с учетом запаздывания τ следует найти z -передаточную функцию ПНЧ без учета запаздывания $K'_{\text{ПНЧ}}(z, \varepsilon)$, а затем применить формулу (9.10). Обратим

внимание, что степень $K_{\text{ПНЧ}}(z, \varepsilon)$ для периода времени $0 \leq \varepsilon < \bar{\tau}$ на единицу меньше, чем для периода времени $\bar{\tau} \leq \varepsilon < 1$.

Рассмотрим частные случаи формулы (9.10).

1. Если запаздывание равно целому числу периодов ($\tau = mT$, $\bar{\tau} = 0$), то

$$K_{\text{ПНЧ}}(z, \varepsilon) = z^{-m} K'_{\text{ПНЧ}}(z, \varepsilon). \quad (9.11)$$

2. Если τ меньше периода дискретности ($\tau = \bar{\tau}T < T$, $\bar{\tau} < 1$, $m = 0$), то

$$K_{\text{ПНЧ}}(z, \varepsilon) = \begin{cases} z^{-1} K'_{\text{ПНЧ}}(z, 1 + \varepsilon - \bar{\tau}), & \text{если } 0 \leq \varepsilon < \bar{\tau}; \\ K'_{\text{ПНЧ}}(z, \varepsilon - \bar{\tau}), & \text{если } \bar{\tau} \leq \varepsilon < 1. \end{cases} \quad (9.12)$$

3. Смещение $\varepsilon = 0$

$$K_{\text{ПНЧ}}(z) = z^{-(1+m)} K'_{\text{ПНЧ}}(z, 1 - \bar{\tau}). \quad (9.13)$$

Передаточная функция ЦАС (рис. 9.20, б) в разомкнутом состоянии

$$K_p(z, \varepsilon) = \frac{\beta(z, \varepsilon)}{z^{-1}\theta(z, 1)} = K_d(z) K_{\text{ПНЧ}}(z, \varepsilon). \quad (9.14)$$

Пример 1. Определить $K_{\text{ПНЧ}}(z, \varepsilon)$ ЦАС (рис. 9.20, б), если в схеме используется фиксатор нулевого порядка, передаточная функция непрерывной части

$$K_{\text{н.т.}}(p) = k/(T_1 p + 1) p, \text{ а } \tau = \bar{\tau}T < T, \quad \bar{\tau} < 1.$$

Находим передаточную функцию ПНЧ без учета запаздывания

$$K'_{\text{ПНЧ}}(p) = [(1 - e^{-Tp})/p] k/(T_1 p + 1) p.$$

Согласно формуле (9.8),

$$K'_{\text{ПНЧ}}(z, \varepsilon) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{k}{p^2 (T_1 p + 1)} \right\}.$$

Разложив дробь $Z_{\text{н.т.}}(p)/p$ на простейшие, получим

$$\frac{K_{\text{н.т.}}(p)}{p} = \frac{k}{p^2 (T_1 p + 1)} = k \left(-\frac{T_1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{T_1}{p + 1/T_1} \right).$$

Нетрудно Z -преобразование каждого слагаемого определить с помощью таблицы z -преобразований (см. табл. 8.2):

$$K'_{\text{ПНЧ}}(z, \varepsilon) = k \frac{z-1}{z} \left[\frac{-T_1 z}{z-1} + \frac{Tz}{(z-1)^2} + \frac{Tz}{z-1} + \frac{T_1 z}{z - e^{-T/T_1}} e^{-T\varepsilon/T_1} \right] =$$

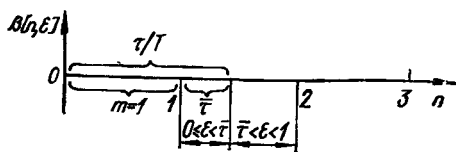


Рис. 9.21. Учет чистого запаздывания τ .

$$= kT \frac{[(d^e - 1) \eta + \varepsilon] z^2 + [1 - \varepsilon (1 + d) + \eta (1 + d - 2d^e)] z + d (\varepsilon - 1) + \eta (d^e - d)}{z^2 - (1 + d) z + d}, \quad (9.15)$$

где $\eta = T_1/T$; $d = e^{-T/T_1}$.
При $\varepsilon = 0$

$$K'_{\text{пнч}}(z, \varepsilon) = kT \frac{[1 - \eta (1 + d)] z + \eta (1 + d) - d}{z^2 - (1 + d) z + d}. \quad (9.16)$$

Теперь определим передаточную функцию ПНЧ с учетом запаздывания τ в соответствии с формулой (9.12): если $0 \leq \varepsilon < \bar{\tau}$, то

$$\begin{aligned} K_{\text{пнч}}(z, \varepsilon) &= kT \frac{[(d^{1+\varepsilon-\bar{\tau}} - 1) \eta + 1 + \varepsilon - \bar{\tau}] z^2 + [1 - (1 + \varepsilon - \bar{\tau})(1 + d) + \eta (1 + d - 2d^{1+\varepsilon-\bar{\tau}})] z + d (\varepsilon - \bar{\tau}) + \eta (d^{1+\varepsilon-\bar{\tau}} - d)}{z [z^2 - (1 + d) z + d]} = \\ &= \frac{b_2^1(\varepsilon, \bar{\tau}) z^2 + b_1^1(\varepsilon, \bar{\tau}) z + b_0^1(\varepsilon, \bar{\tau})}{z (a_2 z^2 + a_1 z + a_0)}, \end{aligned} \quad (9.17)$$

где $b_2^1(\varepsilon, \bar{\tau}) = kT [(d^{1+\varepsilon-\bar{\tau}} - 1) \eta + 1 + \varepsilon - \bar{\tau}]$;

$$b_1^1(\varepsilon, \bar{\tau}) = kT [1 - (1 + \varepsilon - \bar{\tau})(1 + d) + \eta (1 + d - 2d^{1+\varepsilon-\bar{\tau}})];$$

$$b_0^1(\varepsilon, \bar{\tau}) = kT [d (\varepsilon - \bar{\tau}) + \eta (d^{1+\varepsilon-\bar{\tau}} - d)];$$

$$a_2 = 1;$$

$$a_1 = -(1 + d);$$

$$a_0 = d,$$

если $\bar{\tau} \leq \varepsilon < 1$, то

$$\begin{aligned} K_{\text{пнч}}(z, \varepsilon) &= kT \frac{[(d^{\varepsilon-\bar{\tau}} + 1) \eta + \varepsilon - \bar{\tau}] z^2 + [1 - (\varepsilon - \bar{\tau})(1 + d) + \eta (1 + d - 2d^{\varepsilon-\bar{\tau}})] z + d (\varepsilon - \bar{\tau} - 1) + \eta (d^{\varepsilon-\bar{\tau}} - d)}{z^2 - (1 + d) z + d} = \\ &= \frac{b_2''(\varepsilon, \bar{\tau}) z^2 + b_1''(\varepsilon, \bar{\tau}) z + b_0''(\varepsilon, \bar{\tau})}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0}, \end{aligned} \quad (9.18)$$

где

$$b_2''(\varepsilon, \bar{\tau}) = kT [(d^{\varepsilon-\bar{\tau}} + 1) \eta + \varepsilon - \bar{\tau}];$$

$$b_1''(\varepsilon, \bar{\tau}) = kT [1 - (\varepsilon - \bar{\tau})(1 + d) + \eta (1 + d - 2d^{\varepsilon-\bar{\tau}})];$$

$$b_0''(\varepsilon, \bar{\tau}) = kT [d (\varepsilon - \bar{\tau} - 1) + \eta (d^{\varepsilon-\bar{\tau}} - d)].$$

Пример 2. Определить z -передаточную функцию разомкнутой ЦАС $K_p(z, \varepsilon)$ с учетом запаздывания, если z — передаточная функция ПНЧ $K_{\text{пнч}}(z, \varepsilon)$ определяется выражениями (9.17), (9.18), а передаточная функция дискретного фильтра

$$K_d(z) = \frac{k_1 (1 - a)}{1 - b} \frac{z - b}{z - a} = \frac{c}{e} \frac{z - b}{z - a},$$

где $c = k_1 (1 - a)$; $e = 1 - b$.

В разомкнутом состоянии z -передаточная функция ЦАС (рис. 9.20, б) в соответствии с формулой (9.14) равна

$$K_p(z, \varepsilon) = K_d(z) K_{\text{пнч}}(z, \varepsilon).$$

Для $0 \leq \varepsilon < \bar{\tau}$

$$K_p(z, \varepsilon) = \frac{c}{e} \cdot \frac{z-b}{z-a} \cdot \frac{b'_2(\varepsilon, \bar{\tau})z^2 + b'_1(\varepsilon, \bar{\tau})z + b_0(\varepsilon, \bar{\tau})}{z(a_2z^2 + a_1z + a_0)} =$$

$$= \frac{b_3^x(\varepsilon, \bar{\tau})z^3 + b_2^x(\varepsilon, \bar{\tau})z^2 + b_1^x(\varepsilon, \bar{\tau})z + b_0^x(\varepsilon, \bar{\tau})}{z(a_3^x z^3 + a_2^x z^2 + a_1^x z + a_0^x)}, \quad (9.19)$$

где

$$b_3^x(\varepsilon, \bar{\tau}) = cb'_2(\varepsilon, \bar{\tau}); \quad b_2^x(\varepsilon, \bar{\tau}) = c[b'_1(\varepsilon, \bar{\tau}) - bb'_2(\varepsilon, \bar{\tau})];$$

$$b_1^x(\varepsilon, \bar{\tau}) = c[b'_0(\varepsilon, \bar{\tau}) - bb'_1(\varepsilon, \bar{\tau})]; \quad b_0^x(\varepsilon, \bar{\tau}) = -cbb'_0(\varepsilon, \bar{\tau});$$

$$a_3^x = ea_2; \quad a_2^x = e(a_1 - aa_2);$$

$$a_1^x = e(a_0 - aa_1); \quad a_0^x = -eaa_0,$$

для $\bar{\tau} < \varepsilon < 1$

$$K_p(z, \varepsilon) = \frac{c(z-b)}{e(z-a)} \frac{b''_2(\varepsilon, \bar{\tau})z^2 + b''_1(\varepsilon, \bar{\tau})z + b''_0(\varepsilon, \bar{\tau})}{a_2z^2 + a_1z + a_0} =$$

$$= \frac{b_3^{xx}(\varepsilon, \bar{\tau})z^3 + b_2^{xx}(\varepsilon, \bar{\tau})z^2 + b_1^{xx}(\varepsilon, \bar{\tau})z + b_0^{xx}(\varepsilon, \bar{\tau})}{a_3^x z^3 + a_2^x z^2 + a_1^x z + a_0^x}, \quad (9.20)$$

где

$$b_3^{xx}(\varepsilon, \bar{\tau}) = cb''_2(\varepsilon, \bar{\tau}); \quad b_2^{xx}(\varepsilon, \bar{\tau}) = c[b''_1(\varepsilon, \bar{\tau}) - bb''_2(\varepsilon, \bar{\tau})];$$

$$b_1^{xx}(\varepsilon, \bar{\tau}) = c[b''_0(\varepsilon, \bar{\tau}) - bb''_1(\varepsilon, \bar{\tau})]; \quad b_0^{xx}(\varepsilon, \bar{\tau}) = -cbb''_0(\varepsilon, \bar{\tau});$$

$$a_3^x = ea_2; \quad a_2^x = e(a_1 - aa_2);$$

$$a_1^x = e(a_0 - aa_1); \quad a_0^x = -eaa_0.$$

Передаточные функции замкнутой ЦАС

Передаточная функция замкнутой ЦАС (рис. 9.20, б) определяется выражением, аналогичным выражению (8.65) для передаточной функции замкнутой импульсной системы:

при наличии скачков ($\beta[0] \neq 0$)

$$K_s(z, \varepsilon) = \frac{\beta(z, \varepsilon)}{z^{-1}\alpha(z, 1)} = \frac{K_p(z, \varepsilon)}{1 + z^{-1}K_p(z, 1)}; \quad (9.21)$$

без скачков ($\beta[0] = 0$)

$$K_s(z, \varepsilon) = \frac{\beta(z, \varepsilon)}{\alpha(z, 0)} = \frac{K_p(z, \varepsilon)}{1 + K_p(z, 0)}, \quad (9.22)$$

где $K_p(z, \varepsilon) = K_d(z) K_{\text{пнч}}(z, \varepsilon)$.

Передаточная функция ЦАС по ошибке определяется формулами, аналогичными формулам (8.69) и (8.70) для импульсной системы:

$$K_{\theta}(z, -0) = \frac{z^{-1}\theta(z, 1)}{z^{-1}\alpha(z, 1)} = \frac{1}{1 + z^{-1}K_p(z, 1)}; \quad (9.23)$$

без скачков

$$K_{\theta}(z, 0) = \frac{\theta(z, 0)}{\alpha(z, 0)} = \frac{1}{1 + K_p(z, 0)}. \quad (9.24)$$

Таким образом, передаточные функции $K_3(z, \varepsilon)$ и $K_{\theta}(z, -0)$ замкнутой ЦАС без учета квантования сигнала по уровню определяются с помощью формул, аналогичных для импульсных систем с той лишь особенностью, что передаточная функция разомкнутой ЦАС $K_p(z, \varepsilon)$ содержит звено чистого запаздывания.

Пример 3. Определить передаточную функцию $K_3(z, \varepsilon)$ замкнутой ЦАС (рис. 9.20, б), если $K_d(z) = 1$, $K_{\Phi T}(p) = (1 - e^{-Tp})/p$, $K_{HT}(p) = k/(T_1 p + 1)$; время запаздывания $\tau \leq \bar{\tau} T < T$, $\bar{\tau} < 1$.

Для такой ЦАС импульсная передаточная функция ПНЧ $K_{\text{пнч}}(z, \varepsilon)$ была определена в примере 1 (см. формулы (9.17) и (9.18)).

Чтобы выбрать, какой из формул (9.21) или (9.22) пользоваться при определении $K_3(z, \varepsilon)$, найдем начальное значение реакции приведенной непрерывной части системы на мгновенный импульс единичной площади:

$$\beta(t)|_{t=0} = \lim_{p \rightarrow \infty} p \frac{1 - e^{-Tp}}{p} \frac{k}{p(T_1 p + 1)} = 0,$$

т. е. сигналы в системе не претерпевают скачков. Поэтому воспользуемся формулой (9.22). Значение $K_p(z, 0)$ найдем из формулы (9.17), подставив значение $\varepsilon = 0$,

$$K_p(z, 0) = K_{\text{пнч}}(z, 0) =$$

$$\begin{aligned} & [(d^{1-\bar{\tau}} - 1)\eta + 1 - \bar{\tau}]z^3 + [(1+d)\bar{\tau} - d + \eta(1+d - 2d^{1-\bar{\tau}})]z + \\ & + \eta(d^{1-\bar{\tau}} - d) - d\bar{\tau} \\ = kT \frac{z(a_2 z^2 - a_1 z + a_0)}{z(a_2 z^2 + a_1 z + a_0)} = \\ & = \frac{b_2(\bar{\tau})z^2 + b_1(\bar{\tau})z + b_0(\bar{\tau})}{z(a_2 z^2 + a_1 z + a_0)}, \end{aligned} \quad (9.25)$$

где

$$b_2(\bar{\tau}) = kT [(d^{1-\bar{\tau}} - 1)\eta + 1 - \bar{\tau}];$$

$$b_1(\bar{\tau}) = kT [(1+d)\bar{\tau} - d + \eta(1+d - 2d^{1-\bar{\tau}})];$$

$$b_0(\bar{\tau}) = kT [\eta(d^{1-\bar{\tau}} - d) - d\bar{\tau}].$$

Чтобы определить $K_3(z, \varepsilon)$ для случая $0 \leq \varepsilon < \bar{\tau}$, подставим в формулу (9.22) значение $K_p(z, 0)$ из формулы (9.25), а $K_p(z, \varepsilon) = K_d(z)$, $K_{\text{пнч}}(z, \varepsilon) = K_{\text{пнч}}(z, \varepsilon)$ из формулы (9.17):

$$\begin{aligned} K_3(z, \varepsilon) &= \frac{b'_2(\varepsilon, \bar{\tau})z^2 + b'_1(\varepsilon, \bar{\tau})z + b'_0(\varepsilon, \bar{\tau})}{z(a_2 z^2 + a_1 z + a_0) + b_2(\bar{\tau})z^2 + b_1(\bar{\tau})z + b_0(\bar{\tau})} = \\ &= \frac{b'_2(\varepsilon, \bar{\tau})z^2 + b'_1(\varepsilon, \bar{\tau})z + b'_0(\varepsilon, \bar{\tau})}{c_3(\bar{\tau})z^3 + c_2(\bar{\tau})z^2 + c_1(\bar{\tau})z + c_0(\bar{\tau})}, \end{aligned} \quad (9.26)$$

$$c_3(\bar{\tau}) = a_2 = 1;$$

$$c_2(\bar{\tau}) = a_1 + b_2(\bar{\tau}) = kT[(d^{1-\bar{\tau}} - 1)\eta + 1 - \bar{\tau}] - 1 - d;$$

$$c_1(\bar{\tau}) = a_0 + b_1(\bar{\tau}) = kT[(1 + d)\bar{\tau} - d + \eta(1 + d - 2d^{1-\bar{\tau}})] + d;$$

$$c_0(\bar{\tau}) = b_0(\bar{\tau}) = kT[\eta(d^{1-\bar{\tau}} - d) - d\bar{\tau}].$$

Значение $K_3(z, \varepsilon)$ при $\bar{\tau} \leq \varepsilon < 1$ определим, подставив в формулу (9.22) значение $K_p(z, 0)$ из формулы (9.25), а $K_p(z, \varepsilon) = K_{\text{пнч}}(z, \varepsilon)$ — из формулы (9.18):

$$\begin{aligned} K_3(z, \varepsilon) &= \frac{[b_2''(\varepsilon, \bar{\tau})z^2 + b_1''(\varepsilon, \bar{\tau})z + b_0''(\varepsilon, \bar{\tau})]z}{z(a_2z^2 + a_1z + a_0) + b_2(\bar{\tau})z^2 + b_1(\bar{\tau})z + b_0(\bar{\tau})} = \\ &= \frac{b_2''(\varepsilon, \bar{\tau})z^3 + b_1''(\varepsilon, \bar{\tau})z^2 + b_0''(\varepsilon, \bar{\tau})z}{c_3(\bar{\tau})z^3 + c_2(\bar{\tau})z^2 + c_1(\bar{\tau})z + c_0(\bar{\tau})}. \end{aligned} \quad (9.27)$$

Чтобы определить передаточную функцию ЦАС по ошибке, необходимо значение $K_p(z, 0)$ из формулы (9.25) подставить в выражение (9.24):

$$K_0(z, 0) = \frac{1}{1 + K_p(z, 0)} = \frac{a_2z^3 + a_1z^2 + a_0z}{c_3(\bar{\tau})z^3 + c_2(\bar{\tau})z^2 + c_1(\bar{\tau})z + c_0(\bar{\tau})}.$$

9.6. Анализ устойчивости и качества ЦАС

Анализ устойчивости ЦАС

Особенность анализа устойчивости ЦАС, приведенной к предельной импульсной системе, по сравнению с анализом импульсной системы состоит в учете чистого запаздывания. Для определения устойчивости замкнутой ЦАС достаточно исследовать ее характеристическое уравнение.

Если передаточная функция замкнутой системы

$$\begin{aligned} K_3(z, \varepsilon) &= \\ &= \begin{cases} \frac{b_m'(\varepsilon, \bar{\tau})z^n + b_{m-1}'(\varepsilon, \bar{\tau})z^{n-1} + \dots + b_0'(\varepsilon, \bar{\tau})}{c_n(\bar{\tau})z^n + c_{n-1}(\bar{\tau})z^{n-1} + \dots + c_0(\bar{\tau})} = \frac{D_3'(z, \varepsilon, \bar{\tau})}{F_3(z, \bar{\tau})}, & \text{если } 0 \leq \varepsilon < \bar{\tau}; \\ \frac{b_n''(\varepsilon, \bar{\tau})z^n + b_{n-1}''(\varepsilon, \bar{\tau})z^{n-1} + \dots + b_1''(\varepsilon, \bar{\tau})z}{c_n(\bar{\tau})z^n + c_{n-1}(\bar{\tau})z^{n-1} + \dots + c_0(\bar{\tau})} = \frac{D_3''(z, \varepsilon, \bar{\tau})}{F_3(z, \bar{\tau})}, & \text{если } \bar{\tau} \leq \varepsilon < 1, \end{cases} \end{aligned} \quad (9.28)$$

где $n = m + 1$, то характеристическое уравнение получается приравнованием нулю его знаменателя:

$$F_3(z, \bar{\tau}) = c_n(\bar{\tau})z^n + c_{n-1}(\bar{\tau})z^{n-1} + \dots + c_0(\bar{\tau}) = 0. \quad (9.29)$$

Замкнутая цифровая автоматическая система будет устойчива, если корни характеристического уравнения системы (9.29) $z_1, z_2, \dots, z_n$ будут лежать внутри круга единичного радиуса.

Чтобы применить критерии устойчивости непрерывных систем к исследованию устойчивости ЦАС, преобразуем характеристическое уравнение (9.29), подставив $z = (1 + w)/(1 - w)$. Преобразованное уравнение имеет вид

$$F'_3(w, \bar{\tau}) = c'_n(\bar{\tau})w^n + c'_{n-1}(\bar{\tau})w^{n-1} + \dots + c'_0(\bar{\tau}) = 0,$$

где $c'_i(\bar{\tau})$ $i = 1, 2, \dots, n$ — коэффициенты, являющиеся комбинациями сумм и произведений коэффициентов $c_i(\bar{\tau})$.

Для исследования устойчивости ЦАС при использовании преобразованного характеристического уравнения могут быть использованы критерии устойчивости, разработанные применительно к непрерывным системам.

Как видно из преобразованного характеристического уравнения ЦАС, коэффициенты уравнения, а следовательно, устойчивость системы зависят от времени чистого запаздывания τ .

Пример 4. Исследовать устойчивость ЦАС (рис. 9.20, б), передаточные функции которой в замкнутом состоянии определяются выражениями (9.26) и (9.27). В соответствии с этими выражениями характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид

$$F_3(z, \bar{\tau}) = c_3(\bar{\tau})z^3 + c_2(\bar{\tau})z^2 + c_1(\bar{\tau})z + c_0(\bar{\tau}) = 0, \quad (9.30)$$

где

$$c_3(\bar{\tau}) = 1; \quad c_2(\bar{\tau}) = kT[(d^{1-\bar{\tau}} - 1)\eta + 1 - \bar{\tau}] - 1 - d;$$

$$c_1(\bar{\tau}) = kT[(1 + d)\bar{\tau} - d + \eta(1 + d - 2d^{1-\bar{\tau}})] + d;$$

$$c_0(\bar{\tau}) = kT[\eta(d^{1-\bar{\tau}} - d) - d\bar{\tau}].$$

Чтобы получить преобразованное характеристическое уравнение, подставим $z = (1 + w)/(1 - w)$ в (9.30):

$$F'_3(w, \bar{\tau}) = c_3(\bar{\tau}) \frac{(1 + w)^3}{(1 - w)^3} + c_2(\bar{\tau}) \frac{(1 + w)^2}{(1 - w)^2} + c_1(\bar{\tau}) \frac{(1 + w)}{(1 - w)} + c_0(\bar{\tau}) = 0,$$

или

$$F'_3(w, \bar{\tau}) = c'_3(\bar{\tau})w^3 + c'_2(\bar{\tau})w^2 + c'_1(\bar{\tau})w + c'_0(\bar{\tau}) = 0, \quad (9.31)$$

где

$$c'_3(\bar{\tau}) = c_3(\bar{\tau}) - c_2(\bar{\tau}) + c_1(\bar{\tau}) - c_0(\bar{\tau});$$

$$c'_1(\bar{\tau}) = 3[c_3(\bar{\tau}) + c_0(\bar{\tau})] - c_2(\bar{\tau}) - c_1(\bar{\tau});$$

$$c'_1(\bar{\tau}) = 3[c_3(\bar{\tau}) - c_0(\bar{\tau})] - c_2(\bar{\tau}) - c_1(\bar{\tau});$$

$$c'_0(\bar{\tau}) = c_3(\bar{\tau}) + c_2(\bar{\tau}) + c_1(\bar{\tau}) + c_0(\bar{\tau}).$$

Определим устойчивость ЦАС, используя аналог критерия устойчивости Гурвица. Главный определитель Гурвица

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} c'_2(\bar{\tau}) & c'_0(\bar{\tau}) & 0 \\ c'_3(\bar{\tau}) & c'_1(\bar{\tau}) & 0 \\ 0 & c'_2(\bar{\tau}) & c'_0(\bar{\tau}) \end{vmatrix}.$$

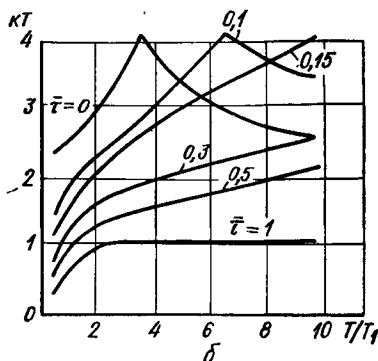
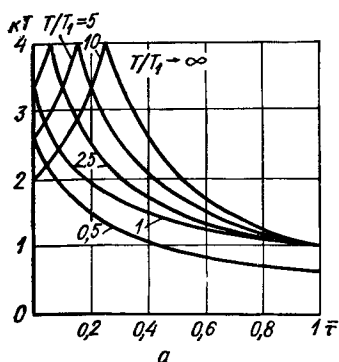


Рис. 9.22. Области устойчивости ЦАС на плоскости параметров kT и $\bar{\tau}$ (а) и параметров kT и T/T_1 (б).

Система будет устойчива, если при $\dot{c}_3(\bar{\tau}) = c_2(\bar{\tau}) - c_2(\bar{\tau}) + c_1(\bar{\tau}) - c_0(\bar{\tau}) > 0$ все определители Гурвица будут больше нуля:

$$\Delta_3 = \dot{c}_0(\bar{\tau}) [\dot{c}_2(\bar{\tau}) \dot{c}_1(\bar{\tau}) - \dot{c}_3(\bar{\tau}) \dot{c}_0(\bar{\tau})] = \dot{c}_0(\bar{\tau}) \Delta_2 > 0,$$

$$\Delta_2 = \dot{c}_2(\bar{\tau}) \dot{c}_1(\bar{\tau}) - \dot{c}_3(\bar{\tau}) \dot{c}_0(\bar{\tau}) > 0;$$

$$\Delta_1 = \dot{c}_2(\bar{\tau}) > 0.$$

Подставив значения коэффициентов $\dot{c}_i(\bar{\tau})$ в соответствии с формулами (9.30) и (9.31), получим:

$$\dot{c}_3(\bar{\tau}) = 2(1+d) + kT[2\eta(1+d-2d^{1-\bar{\tau}}) + (d+1)(2\bar{\tau}-1)] > 0;$$

$$\Delta_2 = 1-d-kT[d^2(\eta d^{-\bar{\tau}}-\eta+\bar{\tau})+\eta-\eta d^{1-\bar{\tau}}-d+\bar{\tau}] - (kT)^2 d[\eta(d^{-\bar{\tau}}-1)-\bar{\tau}][(1-d)(\bar{\tau}+\eta)-1] > 0;$$

$$\Delta_1 = 4 + kT[4\eta(d^{1-\bar{\tau}}-d)-4d\bar{\tau}+d-1] > 0;$$

$$\dot{c}_0(\bar{\tau}) = kT(1-d) > 0 \text{ или } kT > 0.$$

Приравняв нулю $\dot{c}_3(\bar{\tau})$, Δ_2 и Δ_1 , получим уравнения, определяющие границы устойчивости,

$$2(1+d) + kT[2\eta(1+d-2d^{1-\bar{\tau}}) + (d+1)(2\bar{\tau}-1)] = 0;$$

$$1-d-kT[d^2(\eta d^{-\bar{\tau}}-\eta+\bar{\tau})+\eta-\eta d^{1-\bar{\tau}}-d+\bar{\tau}] - (kT)^2 d[\eta(d^{-\bar{\tau}}-1)-\bar{\tau}][(1-d)(\bar{\tau}+\eta)-1] = 0;$$

$$4 + kT[4\eta(d^{1-\bar{\tau}}-d)-4d\bar{\tau}+d-1] = 0. \quad (9.32)$$

В соответствии с уравнениями (9.32) и рис. 9.22, а с помощью ЭВМ построены области устойчивости ЦАС на плоскости параметров kT и $\bar{\tau}$ при $T/T_1 = 0,5; 2,5; 5; 10; \infty$, а на рис. 9.22, б — на плоскости параметров kT и T/T_1 для значений $\bar{\tau} = 0; 0,1; 0,15; 0,3; 1$. Если точка с параметрами $kT, \bar{\tau}$ (рис. 9.22, а), либо $kT, T/T_1$ (рис. 9.22, б) находится в области устойчивости, то система с такими параметрами устойчива.

Для построения кривой переходного процесса ЦАС без учета квантования по уровню можно использовать методы, разработанные для импульсных систем. При этом необходимо лишь учитывать влияние чистого запаздывания τ .

Рассмотрим особенности метода разложения z -изображения переходного процесса $\beta(z, \varepsilon)$ в степенной ряд по z^{-1} (см. п. 8.8) для построения переходного процесса ЦАС. В соответствии с формулой (9.21) изображение переходного процесса ЦАС

$$\beta(z, \varepsilon) = K_3(z, \varepsilon) z^{-1} \alpha(z, 1).$$

Особенностью ЦАС при наличии запаздывания τ является то, что значения $K_3(z, \varepsilon)$ для случаев $0 \leq \varepsilon < \bar{\tau}$ и $\bar{\tau} \leq \varepsilon < 1$, как видно из выражения (9.28), отличаются. Поэтому и изображения $\beta(z, \varepsilon)$, соответствующие указанным периодам времени, будут различны: для периода времени $0 \leq \varepsilon < \bar{\tau}$

$$\begin{aligned} \beta(z, \varepsilon) &= \frac{D'_3(z, \varepsilon, \bar{\tau})}{F_3(z, \bar{\tau})} z^{-1} \alpha(z, 1) = \\ &= \frac{d'_k(\varepsilon, \bar{\tau}) z^k + d'_{k-1}(\varepsilon, \bar{\tau}) z^{k-1} + \dots + d'_0(\varepsilon, \bar{\tau})}{e_l(\bar{\tau}) z^l + e_{l-1}(\bar{\tau}) z^{l-1} + \dots + e_0(\bar{\tau})}; \end{aligned} \quad (9.33)$$

для периода времени $\bar{\tau} \leq \varepsilon < 1$

$$\begin{aligned} \beta(z, \varepsilon) &= \frac{D''_3(z, \varepsilon, \bar{\tau})}{F_3(z, \bar{\tau})} z^{-1} \alpha(z, 1) = \\ &= \frac{d''_{k'}(\varepsilon, \bar{\tau}) z^{k'} + d''_{k'-1}(\varepsilon, \bar{\tau}) z^{k'-1} + \dots + d''_0(\varepsilon, \bar{\tau})}{e_l(\bar{\tau}) z^l + e_{l-1}(\bar{\tau}) z^{l-1} + \dots + e_0(\bar{\tau})}; \quad k' = k + 1. \end{aligned} \quad (9.34)$$

Для построения переходного процесса ЦАС воспользуемся рекуррентным соотношением (8.83), позволяющим определять переходные процессы импульсных систем:

$$\beta[s + l - k, \varepsilon] = \frac{1}{e_l} \left\{ d_{k-s}(\varepsilon) - \sum_{i=0}^{s-1} \beta[i + l - k, \varepsilon] e_{l-s+i} \right\},$$

где k и l — показатели степени числителя и знаменателя $\beta(z, \varepsilon)$. С учетом выражений (9.33) и (9.34) рекуррентное соотношение применительно к ЦАС принимает вид:

для $\bar{t} = s + l - k' + \varepsilon$ и $\bar{\tau} \leq \varepsilon < 1$

$$\beta[s + l - k', \varepsilon] = \frac{1}{e_l(\bar{\tau})} \left\{ d''_{k'-s}(\varepsilon, \bar{\tau}) - \sum_{i=0}^{s-1} \beta[i + l - k', \varepsilon] e_{l-s+i}(\bar{\tau}) \right\}; \quad (9.35)$$

для $\bar{t} = s + l - k + \varepsilon$ и $0 \leq \varepsilon < \bar{\tau}$

$$\beta[s + l - k, \varepsilon] = \frac{1}{e_l(\bar{\tau})} \left\{ d'_{k-s}(\varepsilon, \bar{\tau}) - \sum_{i=0}^{s-1} \beta[i + l - k, \varepsilon] e_{l-s+i}(\bar{\tau}) \right\}. \quad (9.36)$$

Пример 5. Построить кривую переходной функции ЦАС (рис. 9.20, б), передаточные функции которой в замкнутом состоянии определяются формулами (9.26) и (9.27):

$$K_s(z, \varepsilon) = \begin{cases} \frac{b'_2(\varepsilon, \bar{\tau}) z^2 + b'_1(\varepsilon, \bar{\tau}) z + b'_0(\varepsilon, \bar{\tau})}{c_3(\bar{\tau}) z^3 + c_2(\bar{\tau}) z^2 + c_1(\bar{\tau}) z + c_0(\bar{\tau})} & \text{при } 0 \leq \varepsilon < \bar{\tau}; \\ \frac{b''_2(\varepsilon, \bar{\tau}) z^2 + b''_1(\varepsilon, \bar{\tau}) z + b''_0(\varepsilon, \bar{\tau})}{c_3(\bar{\tau}) z^3 + c_2(\bar{\tau}) z^2 + c_1(\bar{\tau}) z + c_0(\bar{\tau})} & \text{при } \bar{\tau} \leq \varepsilon < 1, \end{cases}$$

где

$$b'_2(\varepsilon, \bar{\tau}) = kT [\eta (d^{1+\varepsilon-\bar{\tau}} - 1) + 1 + \varepsilon - \bar{\tau}];$$

$$b'_1(\varepsilon, \bar{\tau}) = kT [1 - (1 + \varepsilon - \bar{\tau})(1 + d) + \eta (1 + d - 2d^{1+\varepsilon-\bar{\tau}})];$$

$$b'_0(\varepsilon, \bar{\tau}) = kT [d(\varepsilon - \bar{\tau}) + \eta (d^{1+\varepsilon-\bar{\tau}} - d)];$$

$$b''_2(\varepsilon, \bar{\tau}) = kT [\eta (d^{\varepsilon-\bar{\tau}} - 1) + \varepsilon - \bar{\tau}];$$

$$b''_1(\varepsilon, \bar{\tau}) = kT [1 - (\varepsilon - \bar{\tau})(1 + d) + \eta (1 + d - 2d^{\varepsilon-\bar{\tau}})];$$

$$b''_0(\varepsilon, \bar{\tau}) = kT [d(\varepsilon - \bar{\tau} - 1) + \eta (d^{\varepsilon-\bar{\tau}} - d)];$$

$$c_3(\bar{\tau}) = 1; \quad c_2(\bar{\tau}) = kT [\eta (d^{1-\bar{\tau}} - 1) + 1 - \bar{\tau}] - 1 - d;$$

$$c_1(\bar{\tau}) = kT [(\bar{\tau} + d)\bar{\tau} - d + \eta (1 + d - 2d^{1-\bar{\tau}})] + d;$$

$$c_0(\bar{\tau}) = kT [\eta (d^{1-\bar{\tau}} - d) - d\bar{\tau}].$$

Для определения переходной функции системы необходимо на ее вход подать единичное степенчатое воздействие, z -преобразование которого $Z\{1[n]\} = z/(z-1)$. В этом случае z -преобразование переходной функции системы для периода времени $0 \leq \varepsilon < \bar{\tau}$:

$$\begin{aligned} \beta(z, \varepsilon) &= K_s(z, \varepsilon) \frac{z}{z-1} = \frac{b'_2(\varepsilon, \bar{\tau}) z^2 + b'_1(\varepsilon, \bar{\tau}) z + b'_0(\varepsilon, \bar{\tau})}{c_3(\bar{\tau}) z^3 + c_2(\bar{\tau}) z^2 + c_1(\bar{\tau}) z + c_0(\bar{\tau})} \frac{z}{z-1} = \\ &= \frac{d'_3(\varepsilon, \bar{\tau}) z^3 + d'_2(\varepsilon, \bar{\tau}) z^2 + d'_1(\varepsilon, \bar{\tau}) z}{e_4(\bar{\tau}) z^4 + e_3(\bar{\tau}) z^3 + e_2(\bar{\tau}) z^2 + e_1(\bar{\tau}) z + e_0(\bar{\tau})}, \end{aligned} \quad (9.37)$$

где

$$d'_3(\varepsilon, \bar{\tau}) = b'_2(\varepsilon, \bar{\tau}) = kT [\eta (d^{1+\varepsilon-\bar{\tau}} - 1) + 1 + \varepsilon - \bar{\tau}];$$

$$d'_2(\varepsilon, \bar{\tau}) = b'_1(\varepsilon, \bar{\tau}) = kT [1 - (1 + \varepsilon - \bar{\tau})(1 + d) + \eta (1 + d - 2d^{1+\varepsilon-\bar{\tau}})];$$

$$d'_1(\varepsilon, \bar{\tau}) = b'_0(\varepsilon, \bar{\tau}) = kT [d(\varepsilon - \bar{\tau}) + \eta (d^{1+\varepsilon-\bar{\tau}} - d)];$$

$$e_4(\bar{\tau}) = c_3(\bar{\tau}) = 1;$$

$$e_3(\bar{\tau}) = c_2(\bar{\tau}) - c_3(\bar{\tau}) = kT [\eta (d^{1-\bar{\tau}} - 1) + 1 - \bar{\tau}] - d - 2;$$

$$e_2(\bar{\tau}) = c_1(\bar{\tau}) - c_2(\bar{\tau}) = kT [2\bar{\tau} - d\bar{\tau} - d - 1 + \eta (2 + d - 3d^{1-\bar{\tau}})] + 1 + 2d;$$

$$e_1(\bar{\tau}) = c_0(\bar{\tau}) - c_1(\bar{\tau}) = kT [d - 2d\bar{\tau} - \bar{\tau} + \eta (3d^{1-\bar{\tau}} - 2d - 1)] - d;$$

$$e_0(\bar{\tau}) = c_0(\bar{\tau}) = kT [\eta (d^{1-\bar{\tau}} - d) - d\bar{\tau}];$$

$$k = 3; \quad l = 4;$$

для периода времени $\bar{\tau} \leq \varepsilon < 1$

$$\beta(z, \varepsilon) = \frac{b_2''(\varepsilon, \bar{\tau}) z^3 + b_1''(\varepsilon, \bar{\tau}) z^2 + b_0''(\varepsilon, \bar{\tau}) z}{c_3(\bar{\tau}) z^3 + c_2(\bar{\tau}) z^2 + c_1(\bar{\tau}) z + c_0(\bar{\tau})} \frac{z}{z-1} =$$

$$= \frac{d_4''(\varepsilon, \bar{\tau}) z^4 + d_3''(\varepsilon, \bar{\tau}) z^3 + d_2''(\varepsilon, \bar{\tau}) z^2}{e_4(\bar{\tau}) z^4 + e_3(\bar{\tau}) z^3 + e_2(\bar{\tau}) z^2 + e_1(\bar{\tau}) z + e_0(\bar{\tau})}, \quad (9.38)$$

где

$$d_4''(\varepsilon, \bar{\tau}) = b_2''(\varepsilon, \bar{\tau}) = kT [\eta (d^{e-\bar{\tau}} - 1) + \varepsilon - \bar{\tau}];$$

$$d_3''(\varepsilon, \bar{\tau}) = b_1''(\varepsilon, \bar{\tau}) = kT [1 - (\varepsilon - \bar{\tau})(1 + d) + \eta (1 + d - 2d^{e-\bar{\tau}})];$$

$$d_2''(\varepsilon, \bar{\tau}) = b_0''(\varepsilon, \bar{\tau}) = kT [d(\varepsilon - \bar{\tau} - 1) + \eta (d^{e-\bar{\tau}} - d)];$$

$$k' = 4, \quad l = 4.$$

В соответствии с формулами (9.38) и (9.37) рекуррентные соотношения (9.35) и (9.36) для рассматриваемого примера соответственно примут вид:

для $\bar{t} = s + l - k' + \varepsilon = s + 1 + \varepsilon, \quad \bar{\tau} \leq \varepsilon < 1$

$$\beta[s, \varepsilon] = \frac{1}{e_4(\bar{\tau})} \left\{ d_{4-s}''(\varepsilon, \bar{\tau}) - \sum_{i=0}^{s-1} \beta[i, \varepsilon] e_{4-s+i}(\bar{\tau}); \right. \quad (9.39)$$

для $\bar{t} = s + l - k + \varepsilon = s + 1 + \varepsilon, \quad 0 \leq \varepsilon < \bar{\tau}$

$$\beta[s+1, \varepsilon] = \frac{1}{e_4(\bar{\tau})} \left\{ d_{3-s}'(\varepsilon, \bar{\tau}) - \sum_{i=0}^{s-1} \beta[i+1, \varepsilon] e_{4-s+i}(\bar{\tau}). \right. \quad (9.40)$$

Для упрощения расчетов и наглядности примем, что $T/T_1 \rightarrow \infty$, т. е. период дискретности во много раз больше постоянной времени (системы), когда $d = e^{-T/T_1} = 0$, $\eta = T_1/T = 0$, и определим переходную функцию при $kT = 1, \bar{\tau} = 0,25$. При принятых упрощениях коэффициенты $d_i'(\varepsilon, \bar{\tau})$ и $e_i(\bar{\tau})$ выражений (9.37) и (9.38) принимают значения:

$$d_3'(\varepsilon, \bar{\tau}) = kT (1 + \varepsilon - \bar{\tau}) = 0,75 + \varepsilon; \quad d_2'(\varepsilon, \bar{\tau}) = kT (\bar{\tau} - \varepsilon) = 0,25 - \varepsilon;$$

$$d_1'(\varepsilon, \bar{\tau}) = 0; \quad d_4''(\varepsilon, \bar{\tau}) = kT (\varepsilon - \bar{\tau}) = \varepsilon - 0,25;$$

$$d_3''(\varepsilon, \bar{\tau}) = kT (1 - \varepsilon + \bar{\tau}) = 1,25 - \varepsilon; \quad d_2''(\varepsilon, \bar{\tau}) = 0;$$

$$e_4(\bar{\tau}) = 1;$$

$$e_3(\bar{\tau}) = kT (1 - \bar{\tau}) - 2 = -1,25;$$

$$e_2(\bar{\tau}) = kT (2\bar{\tau} - 1) = -0,5;$$

$$e_1(\bar{\tau}) = -kT\bar{\tau} = -0,25; \quad e_0(\bar{\tau}) = 0.$$

Переходную функцию системы определяем поэтапно, начиная с интервала времени $\bar{\tau} \leq \varepsilon < 1$, в результате поочередного использования формул (9.39) и (9.40):

$$\beta[0, \varepsilon] = \frac{1}{e_4(\bar{\tau})} d_4''(\varepsilon, \bar{\tau}) = \varepsilon - 0,25 \quad (\text{для } \bar{\tau} \leq \varepsilon < 1; \varepsilon = 0,25 \dots 1);$$

$$\beta[0+1, \varepsilon] = \frac{1}{e_4(\bar{\tau})} d'_3(\varepsilon, \bar{\tau}) = 0,75 + \varepsilon \quad (\text{для } 0 \leq \varepsilon < \bar{\tau}; \varepsilon = 0 \dots 0,25);$$

$$\begin{aligned} \beta[1, \varepsilon] &= \frac{1}{e_4(\bar{\tau})} \left\{ d''_3(\varepsilon, \bar{\tau}) - \sum_{i=0}^0 \beta[i, \varepsilon] e_{4-1+i}(\bar{\tau}) \right\} = \\ &= \frac{1}{e_4(\bar{\tau})} \{ d''_3(\varepsilon, \bar{\tau}) - \beta[0, \varepsilon] e_3(\bar{\tau}) \} = 1,25 - \varepsilon - (\varepsilon - 0,25)(-1,25) = \\ &= 0,94 + 0,25\varepsilon \quad (\text{для } \bar{\tau} \leq \varepsilon < 1; \varepsilon = 0,25 \dots 1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta[1+1, \varepsilon] &= \frac{1}{e_4(\bar{\tau})} \left\{ d'_2(\varepsilon, \bar{\tau}) - \sum_{i=0}^0 \beta[i+1, \varepsilon] e_{4-1+i}(\bar{\tau}) \right\} = \\ &= \frac{1}{e_4(\bar{\tau})} \{ d'_2(\varepsilon, \bar{\tau}) - \beta[0+1, \varepsilon] e_3(\bar{\tau}) \} = 0,25 - \varepsilon - (0,75 + \varepsilon)(-1,25) = \\ &= 1,19 + 0,25\varepsilon; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta[2, \varepsilon] &= \frac{1}{e_4(\bar{\tau})} \left\{ d''_2(\varepsilon, \bar{\tau}) - \sum_{i=0}^1 \beta[i, \varepsilon] e_{4-2+i}(\bar{\tau}) \right\} = \\ &= \frac{1}{e_4(\bar{\tau})} \{ d''_2(\varepsilon, \bar{\tau}) - \beta[0, \varepsilon] e_2(\bar{\tau}) - \beta[1, \varepsilon] e_3(\bar{\tau}) \} = \\ &= 0 - (\varepsilon - 0,25)0,5 - (0,94 + 0,25\varepsilon)(-1,25) = 1,31 - 0,25\varepsilon; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta[2+1, \varepsilon] &= \frac{1}{e_4(\bar{\tau})} \left\{ d'_1(\varepsilon, \bar{\tau}) - \sum_{i=0}^1 \beta[i+1, \varepsilon] e_{3-2+i}(\bar{\tau}) \right\} = \\ &= \frac{1}{e_4(\bar{\tau})} \{ d'_1(\varepsilon, \bar{\tau}) - \beta[0+1, \varepsilon] e_2(\bar{\tau}) - \beta[1+1, \varepsilon] e_3(\bar{\tau}) \} = \\ &= 0 - (0,75 + \varepsilon)0,5 - (1,19 + 0,25\varepsilon)(-1,25) = 1,1 - 0,19\varepsilon; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta[3, \varepsilon] &= \frac{1}{e_4(\bar{\tau})} \left\{ d''_1(\varepsilon, \bar{\tau}) - \sum_{i=0}^2 \beta[i, \varepsilon] e_{4-3+i}(\bar{\tau}) \right\} = \\ &= \frac{1}{e_4(\bar{\tau})} \{ d''_1(\varepsilon, \bar{\tau}) - \beta[0, \varepsilon] e_1(\bar{\tau}) - \beta[1, \varepsilon] e_2(\bar{\tau}) - \beta[2, \varepsilon] e_3(\bar{\tau}) \} = \end{aligned}$$

$$= 0 - (\varepsilon - 0,25)(-0,25) - (0,94 + 0,25\varepsilon)0,5 - (1,31 - 0,25\varepsilon)(-1,25) = 1,1 - 0,14\varepsilon;$$

$$\begin{aligned} \beta[3+1, \varepsilon] &= \frac{1}{e_4(\bar{\tau})} \left\{ d'_0(\varepsilon, \bar{\tau}) - \sum_{i=0}^2 \beta[i+1, \varepsilon] e_{4-3+i}(\bar{\tau}) \right\} = \\ &= \frac{1}{e_4(\bar{\tau})} \{ d'_0(\varepsilon, \bar{\tau}) - \beta[0+1, \varepsilon] e_1(\bar{\tau}) - \beta[1+1, \varepsilon] e_2(\bar{\tau}) - \beta[2+1, \varepsilon] e_3(\bar{\tau}) \} = \\ &= 0 - (0,75 + \varepsilon)(-0,25) - (1,19 + 0,25\varepsilon)0,5 - (1,1 - 0,19\varepsilon)(-1,25) = \\ &= 0,96 - 0,12\varepsilon; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta[4, \varepsilon] &= \frac{1}{e_4(\bar{\tau})} \left\{ d''_0(\varepsilon, \bar{\tau}) - \sum_{i=0}^3 \beta[i+1, \varepsilon] e_{4-4+i}(\bar{\tau}) \right\} = \\ &= \frac{1}{e_4(\bar{\tau})} \{ d''_0(\varepsilon, \bar{\tau}) - \beta[0, \varepsilon] e_0(\bar{\tau}) - \beta[1, \varepsilon] e_1(\bar{\tau}) - \beta[2, \varepsilon] e_2(\bar{\tau}) - \\ &- \beta[3, \varepsilon] e_3(\bar{\tau}) \} = 0 - 0 - (0,94 + 0,25\varepsilon)(-0,25) - (1,31 - 0,25\varepsilon)0,5 - \end{aligned}$$

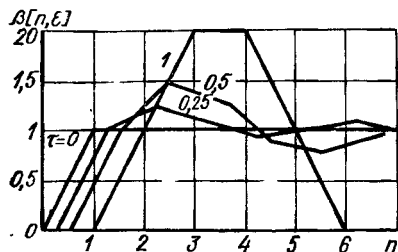


Рис. 9.23. Переходные процессы ЦСС при $kT = 1$, $T/T_1 \rightarrow \infty$ в различных значениях чистого запаздывания $\bar{\tau}$.

$$-(1,1 - 0,14\epsilon) (-1,25) = 0,96 - 0,01\epsilon;$$

$$\beta[4 + 1, \epsilon] = \frac{1}{e_4(\bar{\tau})} \left\{ - \sum_{i=0}^3 \times \right. \\ \left. \times \beta[i + 1, \epsilon] e_{4-i}(\bar{\tau}) \right\} =$$

$$= \frac{1}{e_4(\bar{\tau})} \{ -\beta[0 + 1, \epsilon] e_0(\bar{\tau}) -$$

$$-\beta[1 + 1, \epsilon] e_1(\bar{\tau}) - \beta[3 + 1, \epsilon] e_3(\bar{\tau}) \} = \\ = 0 - (1,19 + 0,25\epsilon) (-0,25) - (1,1 - \\ - 0,19\epsilon) 0,5 - (0,96 - 0,12\epsilon) (-1,25) = \\ = 0,95 + 0,01\epsilon;$$

$$\beta[5, \epsilon] = \frac{1}{e_4(\bar{\tau})} \left\{ - \sum_{i=0}^4 \beta[i, \epsilon] e_{4-i}(\bar{\tau}) \right\} =$$

$$= \frac{1}{e_4(\bar{\tau})} \{ -\beta[1, \epsilon] e_0(\bar{\tau}) - \beta[2, \epsilon] e_1(\bar{\tau}) - \beta[3, \epsilon] e_2(\bar{\tau}) - \beta[4, \epsilon] e_3(\bar{\tau}) \} = \\ = 0 - (1,31 - 0,21\epsilon) (-0,25) - (1,1 - 0,14\epsilon) 0,5 - (0,96 - 0,01\epsilon) (-1,25) = \\ = 0,98 + 0,01\epsilon;$$

$$\beta[5 + 1, \epsilon] = \frac{1}{e_4(\bar{\tau})} \left\{ - \sum_{i=0}^4 \beta[i + 1, \epsilon] e_{4-i}(\bar{\tau}) \right\} =$$

$$= \frac{1}{e_4(\bar{\tau})} \{ -\beta[1 + 1, \epsilon] e_0(\bar{\tau}) - \beta[2 + 1, \epsilon] e_1(\bar{\tau}) - \beta[3 + 1, \epsilon] e_2(\bar{\tau}) - \\ - \beta[4 + 1, \epsilon] e_3(\bar{\tau}) \} = 0 - (1,1 - 0,19\epsilon) (-0,25) - (0,96 - 0,12\epsilon) 0,5 - \\ - (0,95 + 0,01\epsilon) (-1,25) = 0,99 - 0,02\epsilon;$$

.....

$$\beta[s, \epsilon] \approx 1 \text{ при } s > 5;$$

$$\beta[s + 1, \epsilon] \approx 1 \text{ при } s > 5.$$

По расчетным данным на рис. 9.23 построена кривая переходного процесса ($\bar{\tau} = 0,25$). Из кривой видно, что реакция системы запаздывает на $\bar{\tau} = 0,25$, перерегулирование $\sigma = 25\%$, а время регулирования $t_p = (5 \div 6) T$. На этом же рисунке построены переходные функции ЦАС при $kT = 1$ и $\bar{\tau} = 0$; $\bar{\tau} = 0,5$; $\bar{\tau} = 1$. При увеличении чистого запаздывания $\bar{\tau}$ переходный процесс становится более колебательным, а при $\bar{\tau} = 1$ ($\tau = T$) система находится на границе устойчивости.

Нелинейные системы автоматического управления

10.1. Понятие о нелинейных системах

Нелинейной САУ называется система, в состав которой входит один или несколько нелинейных элементов. Нелинейный элемент характеризуется нелинейной (непропорциональной) зависимостью между входным и выходным сигналом (см., например, рис. 1.18, б — з). Статическую характеристику нелинейного элемента нельзя представить одной прямой линией.

На практике строго линейных систем не существует, поскольку характеристики большинства их элементов (например, усилителей, двигателей, измерительных элементов и др.) линейны лишь на определенном участке.

Нелинейности в САУ делятся на естественные и искусственные. Естественные нелинейности возникают в системе как результат конструктивных особенностей оборудования и принципа действия того или иного элемента (например, люфт, зона нечувствительности, насыщение). Искусственные нелинейности вводятся в систему с целью достижения определенных свойств системы или упрощения ее конструкции. Характерным примером нелинейных систем являются релейные системы.

10.2. Релейные системы

Система автоматического управления называется релейной, если в нее входит, по крайней мере, один элемент релейного типа, т. е. элемент, имеющий релейную статическую характеристику. Наиболее общий вид релейной статической характеристики изображен на рис. 10.1, а. Такую характеристику имеет, например, трехпозиционное поляризованное электромагнитное реле. При входном сигнале $x_{вх} \geq x_{ср}$ реле срабатывает и подключает управляемую цепь к источнику напряжения x_0 . При уменьшении входного сигнала отпускание реле произойдет при $x_{вх} \leq x_{отп}$, причем $x_{отп} < x_{ср}$. При изменении знака

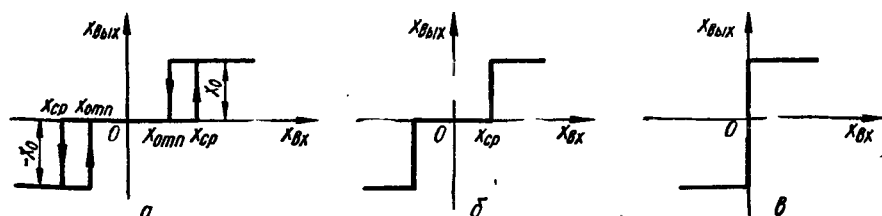


Рис. 10.1 Релейные статические характеристики.

входного сигнала реле срабатывает в другую сторону и переключает полярность подвижного к управляемой цепи напряжения.

Чтобы уяснить действие реле, подадим на его вход сигнал синусоидальной формы (рис. 10.2). При увеличении $x_{вх}$ от 0 до величины срабатывания $x_{ср}$ (что соответствует интервалу времени от 0 до t_1) реле не срабатывает, $x_{вых} = 0$. В момент t_1 $x_{вх}$ достигает значения $x_{ср}$, реле срабатывает и подает на выход в интервале времени от t_1 до t_2 сигнал постоянной величины x_0 . В момент t_2 , когда уменьшающийся сигнал $x_{вх}$ становится равным величине отпущения $x_{отп}$, реле отпускает — разрывает своими контактами цепь подачи напряжения к управляемой цепи, $x_{вых} = 0$. В момент t_3 , когда $x_{вх}$ отрицательной полярности достигает значения $-x_{ср}$, реле срабатывает, $x_{вых} = -x_0$ и т. д. Таким образом, при подаче на вход данного реле синусоидального сигнала на его выходе получается последовательность прямоугольных импульсов различной полярности. Как видим, релейный элемент вносит существенные нелинейные искажения.

Если $x_{ср} = x_{отп}$, то получим безгистерезисную (беспетлевую) релейную характеристику, вид которой изображен на рис. 10.1, б. Зависимость $x_{вых} = f(x_{вх})$ релейного элемента с такой характеристикой описывается формулой

$$x_{вых} = \begin{cases} x_0 & \text{при } x_{вх} \geq x_{ср}; \\ 0 & \text{при } |x_{вх}| < x_{ср}; \\ -x_0 & \text{при } x_{вх} \leq -x_{ср}. \end{cases}$$

Идеальная релейная характеристика (рис. 10.1, в) не имеет зоны нечувствительности, т. е. $x_{ср} = x_{отп} = 0$.

Релейные системы относятся к дискретным системам, поскольку релейный элемент осуществляет квантование сигнала по уровню (гл. 8). Однако характерной особенностью релейных систем, как видно из рассмотрения релейных характеристик, является то, что они относятся к существенно нелинейным системам.

В качестве примера релейной САУ рассмотрим релейную следящую систему (рис. 10.3). В качестве измерительного элемента и элемента сравнения в системе используется потенциометрический мост, состоящий из потенциометров $R1$ и $R2$. Ведущий вал $ВВ$ соединен механически с движком потенциометра $R1$, а приемный вал $ПВ$ — с движком потенциометра $R2$. В диагональ моста включена обмотка поляризованного реле P .

При нулевом угле рассогласования ползунки потенциометров $R1$ и $R2$ находятся в эквипотенциальных точках и ток в обмотке реле равен нулю. Контакты реле разомкнуты, к двигателю M напряжение не подводится. При повороте ведущего вала возникает угол рассогласования, появляется ток в обмотке реле, значение которого пропорционально углу рассогласования. Когда этот ток достигает тока срабатывания, реле срабатывает, замыкает соответствующие контакты и на двигатель подается полное напряжение. Двигатель при этом быстро разгоняется и уменьшает угол рассогласования с постоянной номинальной скоростью. Таким образом, благодаря подключению к двигателю

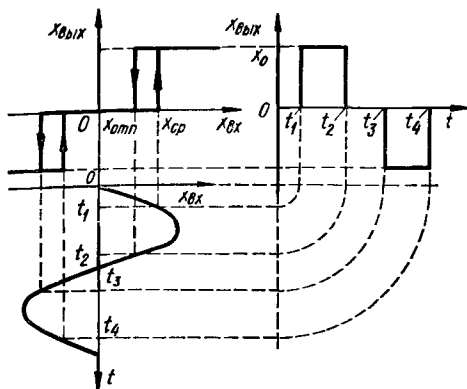


Рис. 10.2 К объяснению действия релейного элемента.

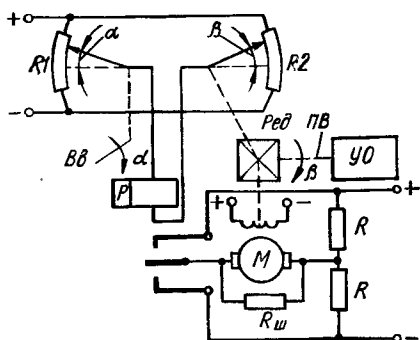


Рис. 10.3. Принципиальная схема простейшей релейной следящей системы.

полного напряжения даже при малых углах рассогласования, в релейной системе обеспечивается быстрое уменьшение угла рассогласования (обеспечивается большое быстродействие). По мере уменьшения угла рассогласования ползунок потенциометра $R2$ приближается к эквипотенциальной точке, ток через обмотку реле уменьшается. Когда значение этого тока становится равным току отпускания, реле отпускает и отключает питание от двигателя. Однако в силу инерционности ротор двигателя, имея в момент выключения номинальную скорость, продолжает вращаться еще некоторое время, перемещая движок потенциометра $R2$ в прежнем направлении. Если при этом движок остановится в пределах зоны нечувствительности системы, то отработка заданного угла на этом заканчивается. Если же движок выйдет за границу зоны нечувствительности, то через обмотку реле ток обратного направления достигает значения тока срабатывания, реле срабатывает и к двигателю подключается напряжение противоположной полярности. Процесс повторяется в обратном направлении. Как видим, в релейной системе имеется возможность появления незатухающих колебаний.

Для устранения или уменьшения амплитуды незатухающих колебаний в рассматриваемой системе служит резистор $R_{ш}$. При выключении питания двигателя последний переходит в режим генератора: резистор $R_{ш}$, будучи нагрузкой этого генератора, создает динамическое торможение ротора, чем способствует более быстрой его остановке. Если демпфирование колебаний эффективно (силы торможения велики), то колебания затухнут и движок потенциометра $R2$ займет положение в пределах угловой погрешности, соответствующей зоне нечувствительности. В случае малых сил торможения колебания, уменьшившись до некоторой величины, сохраняются, т. е. приемный вал, повернувшись на заданный угол, не остановится, а будет совершать колебания около нового положения с постоянной амплитудой и частотой. Управляемой величиной системы в этом случае будет среднее положение приемного вала. Амплитуда колебаний приемного вала $ПВ$ может быть

большого передаточного числа редуктора Ред.

Релейная система, работающая в режиме колебаний с малой амплитудой, может быть сделана более точной, чем система без колебаний, так как благодаря автоколебаниям самое незначительное перемещение командного вала вызовет соответствующее перемещение среднего положения приемного вала, в то время как у системы без автоколебаний отработка возможна только после того, как угол рассогласования превысит значение зоны нечувствительности. Автоколебания как бы делают связь между входным и средним значениями выходной величины системы пропорциональной, т. е. линеаризуют систему.

Рассмотрение релейной системы позволяет сделать выводы о некоторых достоинствах и недостатках, а также об особенностях релейных систем.

Достоинства релейных систем состоят в том, что вместо сложных усилителей применяются сравнительно простые элементы-реле, обладающие большими коэффициентами усиления, и что релейные системы обладают высоким быстродействием: даже при малом рассогласовании, лишь незначительно превышающем зону нечувствительности системы, к двигателю подключается полное напряжение источника и он уменьшает рассогласование с большой скоростью. В линейных же системах скорость вращения двигателя пропорциональна рассогласованию системы и при малых рассогласованиях отработка задания происходит медленнее.

К недостаткам релейных систем относится то, что при повышении точности системы за счет увеличения коэффициента усиления системы и уменьшения зоны нечувствительности реле возможно появление автоколебаний системы, что отрицательно сказывается на механической части системы и для многих систем недопустимо.

При автоколебаниях, как и при вибрационной линеаризации (см. п. 10.8), достигается пропорциональное управление среднего значения управляемой величины системы. Поэтому в тех случаях, где автоколебания допустимы, стремятся уменьшить их амплитуду, чтобы использовать эти автоколебания для линеаризации нелинейности.

10.3. Свойства и методы исследования нелинейных систем

Свойства нелинейных систем

Параметры систем, содержащих нелинейные элементы, зависят от входных величин этих элементов. Поэтому к нелинейным системам неприменим принцип суперпозиции: реакция нелинейной системы не равна сумме реакций на отдельные воздействия. Если, например, имеется нелинейная квадратичная зависимость $x_{\text{вых}} = x_{\text{вх}}^2$, то при $x_{\text{вх}} = x_1 + x_2$, $x_{\text{вых}} = (x_1 + x_2)^2$, что не равно сумме $x_{\text{вых}1} = x_1^2$ и $x_{\text{вых}2} = x_2^2$.

К нелинейным системам неприменимо свойство коммутативности,

т. е. в системе нельзя менять местами между собой нелинейные элементы, а также нелинейные и линейные элементы.

Для исследования нелинейных систем нельзя применять преобразования Лапласа и Фурье и полученные на их основе передаточные функции, так как эти преобразования являются линейными. Анализ работы релейной системы (рис. 10.3) показывает, что особенностью нелинейных систем является возможность возникновения автоколебаний.

Устойчивость нелинейных систем определяется не только их структурой и параметрами (как в линейных системах), но и *зависит от начальных отклонений* относительно состояния равновесия (см. рис. 3.1, в). Это свойство объясняется тем, что параметры системы, определяющие устойчивость, зависят от воздействий.

Методы исследования нелинейных систем

Если система содержит несущественные нелинейности (см., например, рис. 1.18, б), то прибегают к линеаризации по методу касательных (гл. 1, п. 1.4) или по методу наименьших квадратов. Благодаря этому получают линеаризованную систему, которая исследуется с помощью методов, разработанных для линейных систем. Однако в тех случаях, когда требуется высокая точность исследования, возникает задача анализа влияния нелинейностей на процессы в линеаризованных системах.

Можно указать еще две задачи исследования нелинейных систем:

- анализ устойчивости существенно нелинейных систем, выявление автоколебаний и определение их амплитуды и частоты, определение точности системы и ее реакции на внешние воздействия;

- коррекция САУ с помощью нелинейных корректирующих устройств и синтез существенно нелинейных систем, обладающих заданными (желательными) динамическими характеристиками.

Для исследования нелинейных систем непригодны методы, разработанные для линейных систем. Для их исследования разработан ряд методов. Наиболее общим методом анализа и синтеза нелинейных систем является второй (прямой) метод Ляпунова. Однако для инженерной практики он представляется достаточно сложным. К методам исследования нелинейных систем, получивших практическое применение, относятся следующие методы.

Частотные методы, в частности, частотный метод исследования устойчивости В. М. Попова и метод гармонической линеаризации Л. С. Гольдфарба и Е. П. Попова. Эти методы представляют собой реализацию частотных методов в нелинейных системах.

Метод фазовой плоскости (фазовых траекторий). Этот метод основывается на представлении движения системы на фазовой плоскости. Позволяет сравнительно просто исследовать динамику нелинейных систем второго порядка.

Метод припасовывания и его обобщение, метод точечных преобразований А. А. Андропова. Метод припасовывания состоит в том, что нелинейная характеристика заменяется несколькими линейными участ-

ками. Решения, соответствующие этим участкам, сшиваются. Метод отличается сложностью вычислений, особенно, если порядок уравнения системы высок.

Графоаналитические методы. Среди них наиболее распространенным является метод построения переходных процессов Д. А. Башкирова. Он основан на разложении сложного дифференциального уравнения на элементарные уравнения, для которых предложен простой графический способ интегрирования. Метод пригоден для линейных и нелинейных систем практически любого порядка.

Численные методы. Сводятся к численному решению нелинейных дифференциальных уравнений. В последнее время широко применяются в связи с использованием цифровых вычислительных машин для исследования систем автоматического управления.

Метод малого параметра. Применим для анализа псевдолинейных (почти линейных) систем, в нелинейные дифференциальные уравнения которых входит некоторый (малый) параметр μ так, что при нулевом значении μ нелинейные уравнения вырождаются в линейные.

Метод статистической линеаризации, дающий возможность оценить точность нелинейной системы при случайных воздействиях. Сущность метода статистической линеаризации состоит в том, что нелинейный элемент заменяется эквивалентным линейным элементом, который одинаково с нелинейным преобразует два первых статистических момента случайной функции: математическое ожидание (среднее значение) и дисперсию (или среднее квадратическое отклонение). Метод одновременно предложен И. Е. Казаковым (СССР) и Р. Бутоном (США).

Моделирование на электронных моделирующих установках, позволяющее повысить точность и скорость исследования нелинейных систем. Моделирование оказывается наиболее эффективным методом исследования систем, когда из-за их сложности другие методы становятся малоприемлемыми.

Метод пространства состояний. Удобен для исследования нелинейных и сложных линейных систем. Предполагает применение ЭВМ.

Исследуем устойчивость нелинейных систем методом В. М. Попова и рассмотрим метод гармонической линеаризации, позволяющий выявить автоколебания системы и определить их амплитуду и частоту.

10.4 Особенности устойчивости нелинейных систем

Понятие устойчивости для нелинейных систем значительно сложнее, чем для линейных. Это объясняется тем, что процессы в нелинейных системах имеют ряд существенных особенностей. Линейные системы имеют единственное состояние равновесия, которое может быть устойчивым или неустойчивым в зависимости от структуры и параметров системы. В нелинейной системе может быть несколько состояний равновесия. Например, в следящей системе с сельсинами в качестве элемента сравнения (рис. 1.14, а) имеется два состояния равновесия: $\theta = 0^\circ$ и $\theta = 180^\circ$ (θ — угол рассогласования системы); состояние $\theta = 0^\circ$ может быть устойчивым или неустойчивым, а состояние

$\theta = 180^\circ$ является неустойчивым. В нелинейных системах, как и в линейных, возможно появление периодических колебаний, однако в нелинейных системах эти колебания могут быть устойчивыми (автоколебания).

Таким образом, для нелинейных систем необходимо различать два понятия устойчивости: *устойчивость состояния равновесия* и *устойчивость автоколебаний*.

Устойчивость состояния равновесия и устойчивость автоколебаний в нелинейных системах зависят не только от структуры и параметров, но и от начальных отклонений системы относительно состояния равновесия. На рис. 10.4, а, б показаны кривые возможного изменения отклонения $\theta(t)$ нелинейной системы. Если начальное отклонение θ_0 не превышает величины a и процесс затухает (кривые 1), то состояние равновесия $\theta = 0$ устойчиво. Если начальное значение θ_0 превышает величину a и процесс расходится (кривые 2), то состояние равновесия $\theta = 0$ неустойчиво. Величина a является границей устойчивости по начальному отклонению. В зависимости от ее значения различают:

устойчивость «в малом» — система устойчива, если она устойчива только при малых начальных отклонениях (кривые 1, рис. 10.4, а, б);

устойчивость «в большом» — система устойчива (неустойчива) «в большом», если она устойчива при больших (конечных по величине) начальных отклонениях (кривые 2, рис. 10.4, а, б);

устойчивость «в целом» — система устойчива «в целом», если она устойчива при любых больших (неограниченных по величине) начальных отклонениях.

Как видно из рис. 10.4, а, б, состояние равновесия нелинейных систем может быть устойчивым «в малом» и неустойчивым «в большом».

На рис. 10.4, в показан случай, когда состояние равновесия $\theta = 0$ системы неустойчиво «в малом». Из рисунка видно, что оба процесса стремятся к колебаниям с одной и той же амплитудой a и частотой: система будет иметь устойчивые автоколебания с амплитудой a .

На рис. 10.4, г приведен случай, когда система имеет одно состояние равновесия $\theta = 0$ и два состояния колебаний с постоянными амплитудами a и a_1 . Из рисунка видно, что система устойчива «в малом» по отношению к состоянию равновесия $\theta = 0$. При наличии начальных отклонений, превышающих величину a , процессы стремятся к автоколебаниям с амплитудой a_1 . Автоколебания существуют «в большом» (при $\theta_0 > a$). Периодические колебания с амплитудой a являются неустойчивыми.

В нелинейных системах могут быть и более сложные процессы. Например, могут возникать автоколебания различной амплитуды и частоты, соответствующие различным начальным отклонениям. Таким образом, в отличие от линейной одна и та же нелинейная система при различных начальных условиях может совершать разные движения.

Устойчивая линейная система после снятия воздействия возвращается в исходное состояние. Такая устойчивость называется *асимптотической* (или устойчивостью в точке). В нелинейных системах, кроме асимптотической устойчивости, может быть *устойчивость в некоторой области* (неасимптотическая устойчивость), характеризующаяся возвратом системы в определенную область после снятия воздействия.

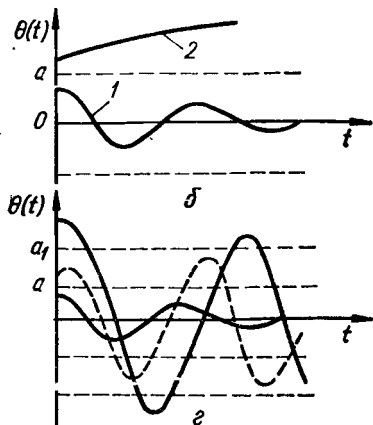
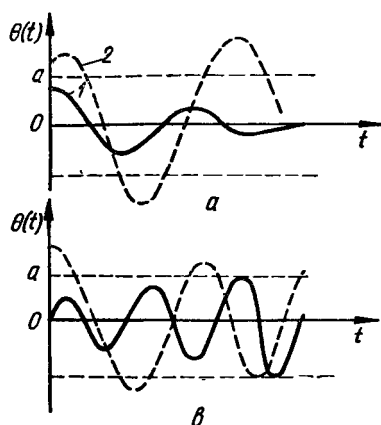


Рис. 10.4. Зависимость устойчивости состояния равновесия и автоколебаний нелинейной системы от начального отклонения θ_0 :

а, б — состояние равновесия $\theta = 0$ устойчиво «в малом» и неустойчиво «в большом»; *в* — состояние равновесия $\theta = 0$ неустойчиво, автоколебания с амплитудой a устойчивы; *г* — состояния $\theta = 0$ устойчиво «в малом», автоколебания с амплитудой a устойчивы «в большом».

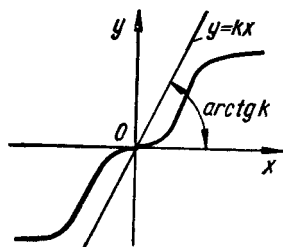


Рис. 10.5. Нелинейная характеристика $y = F(x)$.

В релейной системе (см. рис. 10.3) возникновение этой области объясняется зоной нечувствительности. Асимптотическую устойчивость системы «в целом» для нелинейностей, принадлежащих к определенному классу, называют *абсолютной устойчивостью равновесия*. К этому классу относятся нелинейные

характеристики $y = F(x)$, имеющие любое очертание, но не выходящие за пределы заданного угла $\arctg k$ (рис. 10.5). Этот класс нелинейностей охватывает характеристики подавляющего большинства исполнительных элементов систем автоматического управления.

10.5. Частотный критерий

абсолютной устойчивости равновесия В. М. Попова

Исследование абсолютной устойчивости может быть выполнено при помощи второго метода Ляпунова. Однако более просто эта задача решается с помощью связанного с ним частотного метода, предложенного румынским ученым В. М. Поповым.

Рассмотрим нелинейную систему, состоящую из устойчивой линейной части с передаточной функцией $K(p)$ и одного безынерционного нелинейного элемента с однозначной характеристикой $y = F(x)$ (рис. 10.6).

Пусть в передаточной функции линейной

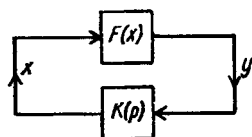


Рис. 10.6. Структурная схема нелинейной системы.

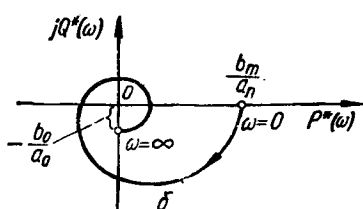
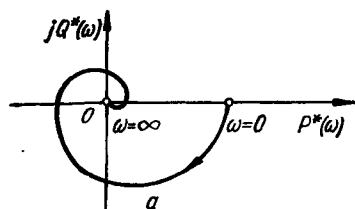


Рис. 10.7. Вид преобразованной АФЧХ системы:
а — $n - m > 1$; б — $n - m = 1$.

части $K(p) = D(p)/F(p)$, где

$$D(p) = b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m;$$

$$F(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n,$$

многочлен $F(p)$ имеет все корни в левой полуплоскости или, кроме них, не более двух корней находятся в начале координат (имеют нулевые значения). Иначе говоря, допускается, чтобы в выражении $F(p)$ коэффициент $a_n = 0$ или $a_n = 0$ и $a_{n-1} = 0$, т. е. кроме статической система может быть астатической первого или второго порядка астатизма. Пусть нелинейность $y = F(x)$ имеет любое очертание, не выходящее за пределы заданного угла $\arctg k$ (см. рис. 10.5), т. е. при любом x $0 < F(x) < kx$.

Приведем критерий Попова без доказательства. Представим комплексную передаточную функцию линейной части системы в алгебраической форме

$$K(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega). \quad (10.1)$$

Представим, что вместо нелинейного элемента включен линейный элемент с коэффициентом усиления k . В этом случае КПФ системы в разомкнутом состоянии

$$K_p(j\omega) = kK(j\omega) = k[P(\omega) + jQ(\omega)]. \quad (10.2)$$

В соответствии с критерием устойчивости Найквиста-Михайлова для устойчивости замкнутой системы необходимо, чтобы АФЧХ (10.2) не охватывала точку $(-1, j0)$. Этот критерий можно сформулировать по другому: для устойчивости замкнутой системы необходимо, чтобы АФЧХ (10.1) не охватывала точку $[-(1/k), j0]$. Введем теперь преобразованную КПФ линейной части

$$K^*(j\omega) = P^*(\omega) + jQ^*(\omega), \quad (10.3)$$

где $P^*(\omega) = P(\omega)$, $Q^*(\omega) = \omega Q(\omega)$, т. е. $K^*(j\omega)$ отличается от $K(j\omega)$ только мнимой частью.

Заметим, что если $n - m > 1$, то АФЧХ $K^*(j\omega)$ имеет такой же вид, что и АФЧХ $K(j\omega)$ (рис. 10.7, а). Если же $n - m = 1$, то АФЧХ $K^*(j\omega)$ при $\omega = \infty$ заканчивается на отрицательной части мнимой оси (рис. 10.7, б).

Критерий устойчивости В. М. Попова формулируется следующим образом: для абсолютной устойчивости равновесия системы с устойчивой линейной частью и одним безынерционным нелинейным элементом,

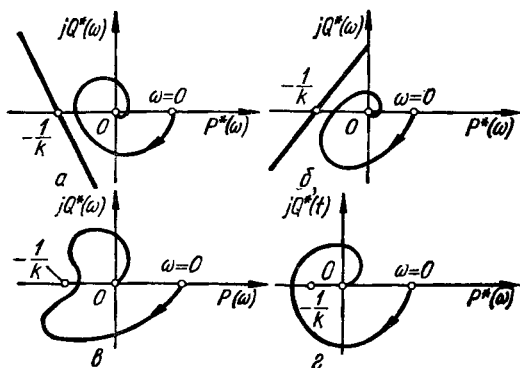


Рис. 10.8. Преобразованные АФЧХ нелинейных систем:

а, б — состояние равновесия абсолютно устойчиво; в, г — системы не обладают абсолютной устойчивостью состояния равновесия.

разованная АФЧХ $K^*(j\omega)$ линейной части лежала справа от этой прямой.

На рис. 10.8, а, б показаны случаи выполнения критерия абсолютной устойчивости, а на рис. 10.8, в, г — случаи, когда системы не обладают абсолютной устойчивостью состояния равновесия.

Выше рассмотрен случай, когда характеристика нелинейного элемента находится в определенном секторе и коэффициент k имеет конечное значение. Если нелинейная характеристика располагается во всем первом (и третьем) квадранте, то, согласно рис. 10.5, имеем $k = \infty$. Поэтому точка $[-(1/k), j0]$ будет совпадать с началом координат и для абсолютной устойчивости состояния равновесия системы прямая Попова должна проходить через начало координат.

Пример 1. Исследовать абсолютную устойчивость состояния равновесия $\theta = 0$ нелинейной системы, структурная схема которой изображена на рис. 10.9. Определить значение k , при котором возможна абсолютная устойчивость.

В соответствии с рис. 10.9 комплексная передаточная функция линейной части

$$K(j\omega) = \frac{k_1 k_{o.c}}{T^2(j\omega)^2 + 2\xi Tj\omega + 1} = P(\omega) + jQ(\omega), \quad (10.4)$$

где

$$P(\omega) = \frac{k_1 k_{o.c} (1 - T^2 \omega^2)}{(1 - T^2 \omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2}; \quad Q(\omega) = -\frac{k_1 k_{o.c} 2\xi T \omega}{(1 - T^2 \omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2}.$$

Преобразованную КПФ линейной части $K^*(j\omega)$ получим, умножив мнимую $Q(\omega)$ (10.4) на ω :

$$K^*(j\omega) = P^*(\omega) + jQ^*(\omega), \quad (10.5)$$

где

$$P^*(\omega) = \frac{k_1 k_{o.c} (1 - T^2 \omega^2)}{(1 - T^2 \omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2}; \quad Q^*(\omega) = -\frac{k_1 k_{o.c} 2\xi T \omega^2}{(1 - T^2 \omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2}.$$

Преобразованная АФЧХ $K^*(j\omega)$, построенная в соответствии с выражением (10.5), изображена на рис. 10.10. Из рисунка видно, что АФЧХ $K^*(j\omega)$ линейной части лежит в нижней части полуплоскости и что можно провести к ней касательную 1 в начале координат под углом α_0 к вещественной оси, т. е. $\tan \alpha_0 = Q^*(\omega)/P^*(\omega)|_{\omega \rightarrow \infty} = -2\xi T$.

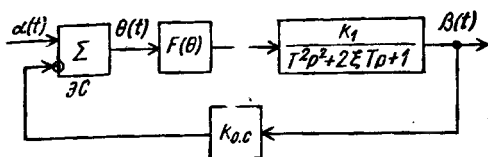


Рис. 10.9. Структурная схема нелинейной системы (к примеру).

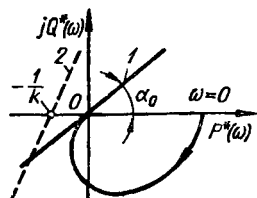


Рис. 10.10. Преобразованная АФЧХ нелинейной системы (к примеру).

Поскольку преобразованная АФЧХ $K^*(j\omega)$ лежит справа от касательной (прямой Попова) и касательная проходит через начало координат, то система обладает абсолютной устойчивостью равновесия при $k = \infty$. Естественно, при конечных значениях k система также обладает абсолютной устойчивостью, так как в этом случае через любую точку $[-(1/k), j0]$ можно провести прямую Попова, лежащую левее преобразованной АФЧХ (например, прямую 2 на рис. 10.10).

10.6. Метод гармонической линеаризации

Сущность метода заключается в замене нелинейного элемента системы эквивалентным линейным, который одинаково с нелинейным элементом преобразует гармоническое колебание и характеризуется эквивалентным комплексным коэффициентом усиления. Такая замена позволяет исследовать нелинейные системы частотными методами. В частности, с помощью частотного метода можно выявить наличие автоколебаний, исследовать их устойчивость и определить их амплитуду и частоту, а также решать задачи коррекции нелинейной системы.

Основы метода гармонической линеаризации (метода гармонического баланса) разработаны академиками Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым. Применительно к теории автоматического управления этот метод развит Л. С. Гольдфарбом и Е. П. Поповым. В иностранной литературе метод гармонической линеаризации называется методом описывающей функции.

Эквивалентный комплексный коэффициент усиления нелинейного элемента

При подаче на вход линейного элемента с КПФ $K(j\omega) = N(\omega)e^{j\psi(\omega)}$ синусоидального колебания $x_{\text{вх}} = A \sin \omega t$, комплексное изображение которого $\dot{x}_{\text{вх}} = Ae^{j\omega t}$, на его выходе, как известно, возникает также синусоидальное колебание, но отличающееся от входного по амплитуде и фазе

$$\dot{x}_{\text{вых}} = K(j\omega) Ae^{j\omega t} = N(\omega) Ae^{j[\omega t + \psi(\omega)]}. \quad (10.6)$$

В случае нелинейного элемента выходная и входная величины связаны между собой нелинейной зависимостью

$$x_{\text{вых}} = f(x_{\text{вх}}). \quad (10.7)$$

Нелинейная зависимость (10.7) может иметь самый различный характер. Предположим, что нелинейная зависимость определяется релейной

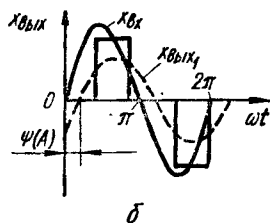
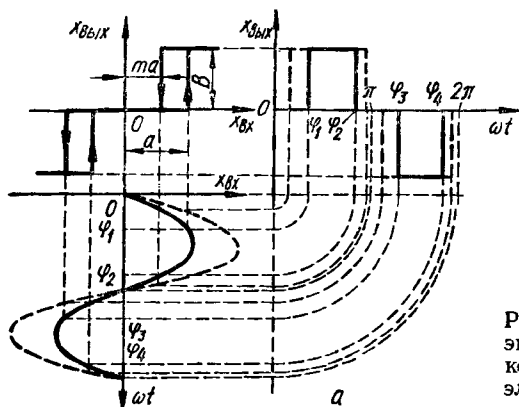


Рис. 10.11. К понятию об эквивалентном комплексном коэффициенте нелинейного элемента.

характеристикой, изображенной на рис. 10.11, а. Если на вход этого нелинейного элемента подавать гармоническое колебание $x_{вх} = A \sin \omega t$, то на его выходе получим периодическую функцию $x_{вых}(t)$ в виде прямоугольных импульсов (рис. 10.11, а), т. е. функцию, отличную от синусоидальной.

Выходная величина нелинейного элемента, обладающего любой другой статической характеристикой, также будет представлять собой соответствующую периодическую функцию, отличную от синусоидальной, т. е. нелинейный элемент вносит искажения сигнала.

Суть метода гармонической линейаризации состоит в том, что выходная периодическая функция нелинейного элемента разлагается в ряд Фурье, т. е. представляется в виде бесконечной суммы гармонических колебаний. Если линейная часть системы является фильтром, ослабляющим высшие гармоники до пренебрежимо малых значений, т. е. выполняется *гипотеза фильтра*, то из рассмотрения отбрасываются все гармоники высшего порядка и считают, что выходная величина нелинейного элемента представляет собой первую гармонику разложения (рис. 10.11, б):

$$x_{вых} = f(x_{вх}) = f(A \sin \omega t) \simeq x_{вых1} = q'(A) \sin \omega t + b'(A) \cos \omega t, \quad (10.8)$$

где $q'(A)$ и $b'(A)$ — коэффициенты первой гармоники ряда Фурье:

$$\left. \begin{aligned} q'(A) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin \omega t) \sin \omega t d\omega t; \\ b'(A) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin \omega t) \cos \omega t d\omega t, \end{aligned} \right\} \quad (10.9)$$

или

$$x_{вых1} = A_1(A) \sin [\omega t + \varphi(A)],$$

где $A_1(A) = \sqrt{q'^2(A) + b'^2(A)}$ — амплитуда первой гармоники; $\varphi(A) = \arctg [b'(A)/q'(A)]$ — сдвиг по фазе первой гармоники относительно входного колебания. Запишем комплексные изображения

входной и выходной (первой гармоники) величин нелинейного элемента:

$$\dot{x}_{\text{вх}} = A e^{j\omega t};$$

$$x_{\text{вых1}} = q'(A) e^{j\omega t} + b'(A) j e^{j\omega t} = A_1(A) e^{j[\omega t + \varphi(A)]}.$$

Отношение комплексных изображений первой гармоники выходной величины и входного колебания называется *эквивалентным комплексным коэффициентом усиления нелинейного элемента* (гармонической передаточной функцией)

$$K_{\text{э.н}}(A) = \frac{x_{\text{вых1}}}{x_{\text{вх}}} = \frac{q'(A) e^{j\omega t} + j b'(A) e^{j\omega t}}{A e^{j\omega t}} = q(A) + j b(A), \quad (10.10)$$

где $q(A) = q'(A)/A$, $b(A) = b'(A)/A$ — коэффициенты гармонической линеаризации.

Эквивалентный комплексный коэффициент усиления (ЭККУ) можно представить в показательной форме

$$K_{\text{э.н}}(A) = N(A) e^{j\psi(A)} = \frac{A_1(A) e^{j[\omega t + \varphi(A)]}}{A e^{j\omega t}} = \frac{A_1(A)}{A} e^{j\varphi(A)}, \quad (10.11)$$

где $N(A) = \sqrt{q^2(A) + b^2(A)} = A_1(A)/A$ — модуль ЭККУ; $\psi(A) = \arctg [b(A)/q(A)] = \varphi(A)$ — аргумент ЭККУ, т. е. модуль $N(A)$ ЭККУ показывает, во сколько раз амплитуда $A_1(A)$ первой гармоники выходного колебания отличается от амплитуды A входного колебания, а аргумент $\psi(A)$ ЭККУ равен разности фаз между этими колебаниями.

С учетом (10.11) комплексное изображение первой гармоники выходной величины нелинейного элемента

$$\dot{x}_{\text{вых1}} = K_{\text{э.н}}(A) \dot{x}_{\text{вх}} = N(A) e^{j\psi(A)} \cdot A e^{j\omega t} = A_1(A) e^{j[\omega t + \psi(A)]},$$

где $A_1(A) = N(A) A$.

Из выражений для $N(A)$ и $\psi(A)$ видно, что модуль и аргумент эквивалентного комплексного коэффициента усиления нелинейного элемента $K_{\text{э.н}}(A)$ зависят от амплитуды A входного колебания и не зависят от частоты. Зависимость модуля $N(A)$ ЭККУ от амплитуды входного колебания можно объяснить зависимостью длительности выходных импульсов нелинейного элемента от амплитуды входного колебания (рис. 10.11, а): с увеличением A длительность импульсов увеличивается, а следовательно, увеличиваются амплитуда первой гармоники выходного колебания и модуль $N(A)$. Зависимость же аргумента $\psi(A)$ ЭККУ от A объясняется зависимостью расположения середины выходных импульсов нелинейного элемента относительно фиксированных точек $\pi/2$, $3\pi/2$, ... на оси ωt . С увеличением A импульсы перемещаются на оси ωt влево и сдвиг по фазе (запаздывание) $\psi(A)$ первой гармоники $x_{\text{вых1}}$ выходного колебания относительно входного колебания уменьшается. Возможный вид зависимости модуля и аргумента ЭККУ нелинейного элемента от амплитуды входного колебания представлен на рис. 10.12.

ЭККУ нелинейного элемента $K_{\text{э.н}}(A)$ геометрически изображается вектором, модуль которого равен $N(A)$, а аргумент $\psi(A)$. С изменением

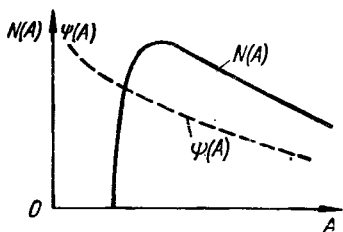


Рис. 10.12. Возможный вид зависимостей модуля $N(A)$ и аргумента $\psi(A)$ ЭККУ от амплитуды входного колебания.

амплитуды A входного колебания $N(A)$ и $\psi(A)$ изменяются. При этом конец вектора $K_{э.н}(A)$ описывает кривую. *Годограф вектора $K_{э.н}(A)$ при изменении амплитуды входного колебания называется эквивалентной амплитудно-фазовой характеристикой нелинейного элемента.*

Таким образом, гармоническая линейаризация состоит в замене нелинейного элемента, описывающего уравнением $x_{\text{вых}} = f(x_{\text{вх}})$, эквивалентным линейным, который осуществляет такое же преобразование гармонического входного сигнала, как и нелинейный элемент; уравнение эквивалентного элемента линейно:

$$\dot{x}_{\text{вых}} = K_{э.н}(A) \dot{x}_{\text{вх}}.$$

Функция $K_{э.н}(A)$ эквивалентного линейного элемента является аналогом функции $K(j\omega)$ линейного элемента. Отличие между ними состоит в том, что первая зависит от амплитуды A входного колебания, а вторая — от частоты ω этого колебания.

В том случае, когда выходной сигнал $x_{\text{вых}}$ нелинейного элемента зависит не только от входного $x_{\text{вх}}$, но и его производной $dx_{\text{вх}}/dt$, т. е. $x_{\text{вых}} = f(x_{\text{вх}}, dx_{\text{вх}}/dt)$, эквивалентный комплексный коэффициент усиления является функцией как амплитуды A , так и частоты ω входного сигнала:

$$K_{э.н}(A, j\omega) = q(A, \omega) + jb(A, \omega) = N(A, \omega) e^{j\psi(A, \omega)}.$$

Методика определения эквивалентного комплексного коэффициента усиления нелинейных элементов

Рассмотрим сперва методику определения $K_{э.н}(A)$ нелинейного элемента с однозначной статической характеристикой на примере релейного элемента (рис. 10.13, а). Для этого на его вход подадим синусоидальное колебание (рис. 10.13, б). На выходе элемента получим последовательность прямоугольных импульсов (рис. 10.13, в). В соответствии с формулой (10.10)

$$K_{э.н}(A) = q(A) + jb(A).$$

Согласно выражениям (10.9) и (10.10),

$$q(A) = \frac{q'(A)}{A} = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} f(A \sin \omega t) \sin \omega t d\omega t.$$

Из рис. 10.13, в, г видно, что на участке от 0 до ωt_1 $x_{\text{вых}} = f(A \sin \omega t) = 0$. Следовательно, при определении $q(A)$ интегриро-

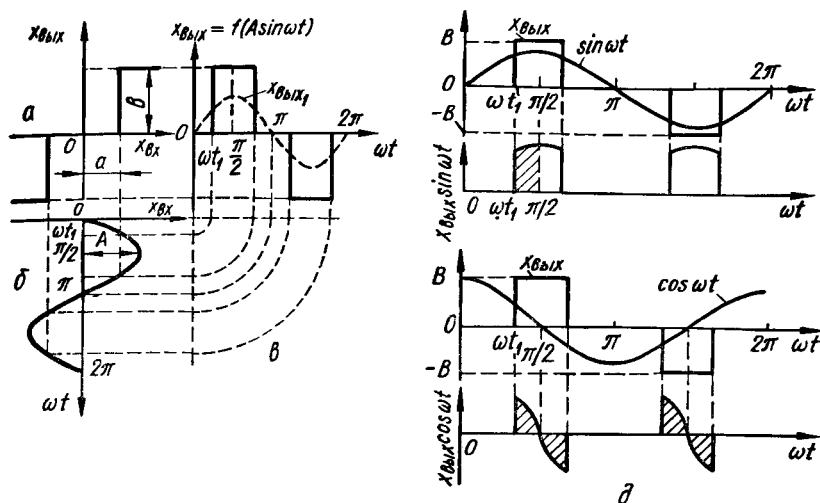


Рис. 10.13. К примеру определения $K_{Э.н}(A)$ нелинейного элемента с однозначной характеристикой.

вание надо осуществлять только с момента ωt_1 . Поскольку выходная функция симметрична, то интегрирование можно выполнить в пределах от ωt_1 до $\pi/2$, а полученный результат учетверить (рис. 10.13, в):

$$q(A) = \frac{4}{\pi A} \int_{\omega t_1}^{\pi/2} B \sin \omega t d\omega t = \frac{4B}{\pi A} [-\cos \omega t]_{\omega t_1}^{\pi/2} = \\ = \frac{4B}{\pi A} \cos \omega t_1 = \frac{4B}{\pi A} \sqrt{1 - \sin^2 \omega t_1}.$$

Из рис. 10.13, а, б замечаем, что значение ωt_1 связано с половиной зоны нечувствительности a реле и амплитудой входного колебания выражением $A \sin \omega t_1 = a$, откуда $\sin \omega t_1 = a/A$.

Подставив полученное значение $\sin \omega t_1$ в выражение для $q(A)$, получим

$$q(A) = \frac{4B}{\pi A} \sqrt{1 - (a/A)^2}.$$

Поскольку в рассматриваемом случае характеристика нелинейного элемента однозначна, то, согласно рис. 10.13, в,

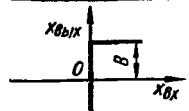
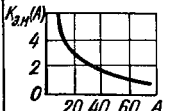
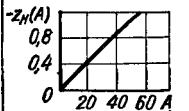
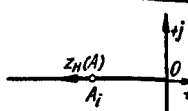
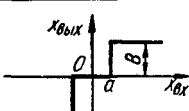
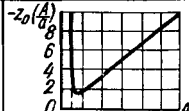
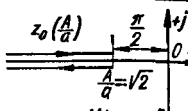
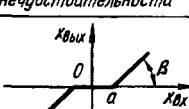
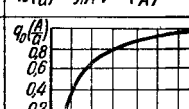
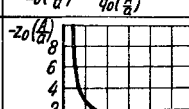
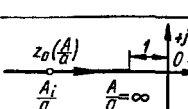
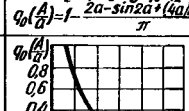
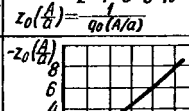
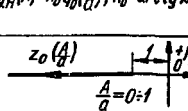
$$b(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} f(A \sin \omega t) \cos \omega t d\omega t = 0, \quad (10.12)$$

и поэтому выражение для $K_{Э.н}(A)$ упрощается

$$K_{Э.н}(A) = q(A) = \frac{4B}{\pi A} \sqrt{1 - (a/A)^2}. \quad (10.13)$$

В этом случае $\psi(A) = \arctg b(A)/q(A) = 0$, т. е. первая гармоника выходного колебания нелинейного элемента совпадает по фазе с входным колебанием (рис. 10.13, б, в).

Таблица 10.1. Типовые нелинейности и их характеристики

 Релейная идеальная	 $K_{ЭН}(A) = q(A) = \frac{4B}{\pi A}$	 $z_Н(A) = -\frac{1}{K_{ЭН}(A)} = -\frac{\pi A}{4B}$	 $z_Н(A)$ A_1
 Релейная с зоной нечувствительности	 $q_0(A/a) = \frac{4a}{\pi A} \sqrt{1 - (a/A)^2}$	 $z_0(A/a) = -\frac{1}{q_0(A/a)}$	 $z_0(A/a)$ $A/a = \sqrt{2}$ $K_{ЭН}(A) = k_0 q_0(A/a); k_0 = \frac{B}{a}$
 Зона нечувствительности	 $q_0(A/a) = 1 - \frac{2a - \sin 2a + (4a/A) \cos a}{\pi}$	 $z_0(A/a) = -\frac{1}{q_0(A/a)}$	 $z_0(A/a)$ $A/a = \infty$ $K_{ЭН}(A) = k_0 q_0(A/a); k_0 = \arctg B$
 Насыщение (ограничение)	 $q_0(A/a) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{a}{2} - \frac{\sin 2a}{4} + \frac{\arcsin a}{A} \right)$	 $z_0(A/a) = -\frac{1}{q_0(A/a)}$	 $z_0(A/a)$ $A/a = 0$ $K_{ЭН}(A) = k_0 q_0(A/a); k_0 = \frac{B}{a}$

Чтобы характеристики нелинейного элемента стали универсальными, пригодными при любых значениях B и a , рационально B/a отнести к линейной части и ввести относительную амплитуду A/a :

$$K_{ЭН} \left(\frac{A}{a} \right) = q \left(\frac{A}{a} \right) = \frac{B}{a} \frac{4}{\pi A/a} \sqrt{1 - \frac{1}{(A/a)^2}} = k_0 K_0 \left(\frac{A}{a} \right),$$

где $k_0 = B/a$ — нормирующий множитель;

$$K_0 \left(\frac{A}{a} \right) = q_0 \left(\frac{A}{a} \right) = \frac{4}{\pi A/a} \sqrt{1 - \frac{1}{(A/a)^2}} \quad (10.14)$$

нормированный ЭККУ нелинейного элемента.

Нормирующий множитель определяется из нелинейной характеристики (рис. 10.13, а) и для каждого нелинейного элемента имеет свое значение. График же $q_0(A/a)$ в функции A/a для всех нелинейностей данного типа один и тот же. Для рассматриваемых релейных характеристик с зоной нечувствительности он изображен в табл. 10.1.

При амплитудах A входного колебания, меньших зоны нечувствительности реле a ($A/a < 1$), выходной сигнал равен нулю. Следовательно, при значениях A от 0 до a $q_0(A/a) = 0$. При $A/a > 1$ отношение амплитуды A_1 первой гармоники выходного колебания к амплитуде входного колебания A при увеличении A/a вначале растет, а затем при $A \rightarrow \infty$ уменьшается, так как амплитуда A_1 стремится к постоянной величине. Максимум $q_0(A/a)$, равный 0,637, имеет место при $A/a =$

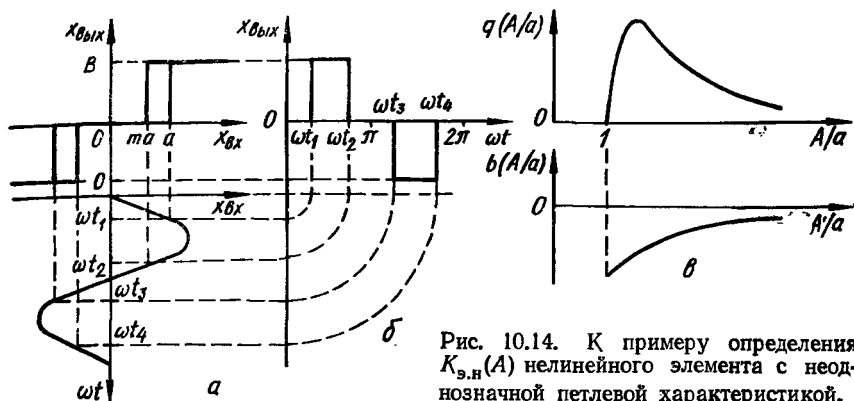


Рис. 10.14. К примеру определения $K_{э.н}(A)$ нелинейного элемента с неоднозначной петлевой характеристикой.

$\approx 1,41$, в чем можно убедиться, если исследовать выражение (10.14) на стремум.

Для идеального релейного элемента (см. табл. 10.1) значение $q(A)$ легко получить из формулы (10.13), подставив $a = 0$:

$$K_{э.н}(A) = q(A) = 4B/\pi A.$$

Методику определения $K_{э.н}(A)$ для нелинейных элементов с неоднозначной петлевой статической характеристикой рассмотрим на примере трехпозиционного релейного элемента (рис. 10.14, а). В выражении для $K_{э.н}(A) = q(A) + jb(A)$ вещественная составляющая в соответствии с рис. 10.14, а, б

$$q(A) = \frac{2}{\pi A} \int_{\omega t_1}^{\omega t_2} B \sin \omega t d\omega t = \frac{2B}{\pi A} [\cos \omega t_1 - \cos \omega t_2],$$

или, учитывая, что $\omega t_2 > \pi/2$, $\cos \omega t_2 < 0$,

$$q(A) = \frac{2B}{\pi A} [\sqrt{1 - \sin^2 \omega t_1} + \sqrt{1 - \sin^2 \omega t_2}].$$

На основании рис. 10.14, а записываем

$$a = A \sin \omega t_1 \text{ или } \sin \omega t_1 = a/A,$$

$$ma = A \sin(\pi - \omega t_2) \text{ или } \sin \omega t_2 = \sin(\pi - \omega t_2) = ma/A.$$

Подставив значения $\sin \omega t_1$ и $\sin \omega t_2$ в выражение для $q(A)$, получим

$$q(A) = \frac{2B}{\pi A} [\sqrt{1 - (a/A)^2} + \sqrt{1 - (ma/A)^2}].$$

Мнимая составляющая

$$b(A) = \frac{2}{\pi A} \int_{\omega t_1}^{\omega t_2} B \cos \omega t d\omega t = -\frac{2B}{\pi A} [\sin \omega t_1 - \sin \omega t_2] = -\frac{2Ba(1-m)}{\pi A^2}.$$

Полученные выражения для $q(A)$ и $b(A)$ в нормированной форме имеют вид

$$\left. \begin{aligned} q(A/a) &= k_0 \frac{2}{\pi A/a} \left[\sqrt{1 - \frac{1}{(A/a)^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{(A/ma)^2}} \right]; \\ b(A/a) &= -k_0 \frac{2}{\pi (A/a)^2} (1 - m), \end{aligned} \right\} \quad (10.15)$$

где $k_0 = B/a$. Графики $q(A/a)$ и $b(A/a)$ представлены на рис. 10.14, в. Выражения (10.14) и (10.12) для однозначной релейной характеристики с зоной нечувствительности получаются как частный случай из приведенных формул для $q(A/a)$ и $b(A/a)$ при $m = 1$.

Аналогично можно определить эквивалентные комплексные коэффициенты усиления и для других типов нелинейностей. Коэффициенты гармонической линейризации и соответствующие графики для некоторых однозначных нелинейных характеристик приведены в табл. 10.1.

Годограф вектора нормированного эквивалентного комплексного коэффициента усиления нелинейного элемента

В общем случае $K_0(A/a)$ определяется следующим выражением:

$$K_0(A/a) = q_0(A/a) + jb_0(A/a) \quad (10.16)$$

или

$$K_0(A/a) = N_0(A/a) e^{j\psi_0(A/a)}, \quad (10.17)$$

где $N_0(A/a) = \sqrt{q_0^2(A/a) + b_0^2(A/a)}$ — модуль нормированного эквивалентного комплексного коэффициента усиления нелинейного элемента $K_0(A/a)$,

$$\psi_0(A/a) = \operatorname{arctg} \frac{b_0(A/a)}{q_0(A/a)} \text{ — аргумент } K_0(A/a). \quad (10.18)$$

Поскольку для нелинейных элементов, имеющих неоднозначную характеристику с петлей гистерезиса, аргумент $\psi_0(A/a) \neq 0$, то первая гармоника выходного колебания элемента сдвинута по фазе относительно колебания на входе. Для естественных нелинейностей (см., например, рис. 10.11, рис. 10.14, формулу (10.15)) всегда $b_0(A/a) < 0$, поэтому они вносят запаздывание колебаний по фазе, что приводит к уменьшению запаса устойчивости системы.

Как видно из формул (10.16) и (10.17), $K_0(A/a)$ является комплексным числом и геометрически представляет собой вектор. Поскольку модуль $N_0(A/a)$ и аргумент $\psi_0(A/a)$ этого вектора являются функциями относительной амплитуды A/a , то при изменении A/a конец вектора $K_0(A/a)$ будет описывать кривую — годограф (рис. 10.15). Годограф вектора $K_0(A/a)$ называется нормированной эквивалентной амплитудно-фазовой характеристикой (АФХ) нелинейного элемента. Он позво-

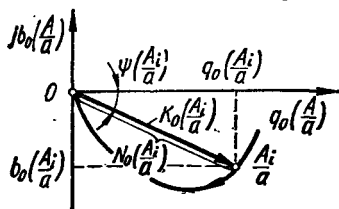


Рис. 10.15. Возможный вид годографа нормированного эквивалентного комплексного коэффициента усиления $K_0(A/a)$ нелинейного элемента.

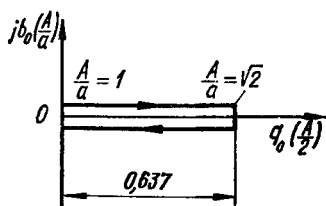


Рис. 10.16. Годограф вектора $K_0(A/a)$ нелинейного элемента с однозначной характеристикой (рис. 10.13, а).

ляет определять амплитуду и фазу первой гармоники на выходе нелинейного элемента в зависимости от амплитуды входного колебания. Параметром годографа является относительная амплитуда A/a .

Эквивалентную АФХ можно строить в декартовой и полярной системах координат. При построении характеристики в декартовой системе координат по вещественной оси накладывают значения $q_0(A/a)$, а по мнимой — $jb_0(A/a)$, как показано на рис. 10.15. На этом же рисунке показано построение амплитудной характеристики в полярной системе координат.

В качестве примера построим годограф вектора $K_0(A/a)$ релейного элемента с однозначной характеристикой и зоной нечувствительности (рис. 10.13) в соответствии с формулой (10.14).

Поскольку в рассматриваемом случае $b_0(A/a) = 0$, то годограф вектора $K_0(A/a)$ совпадает с вещественной осью (рис. 10.16). Он занимает участок вещественной оси от 0 до 0,637 соответственно при $A/a = 1$ и $A/a = \sqrt{2}$. Каждой точке годографа соответствуют два значения A/a .

Эквивалентные АФХ типовых нелинейных элементов приводятся в литературе [57, 67].

Рассмотренный метод гармонической линеаризации является довольно простым и распространенным методом исследования нелинейных систем. Его универсальность состоит в том, что он применим к самым разнообразным нелинейностям. Однако следует иметь в виду, что метод гармонической линеаризации является приближенным методом исследования. Его недостаток состоит в том, что он не даёт возможности количественно оценить погрешность, которая получается в результате отбрасывания высших гармоник. Эту погрешность можно оценить лишь качественно: чем выше порядок линейной части системы, т. е. чем более строго выполняется гипотеза фильтра, тем эффективнее в ней будут подавляться высшие гармоники и тем с большим правом имеется возможность ограничиться рассмотрением только первой гармоники выходного колебания нелинейного элемента.

10.7. Исследование устойчивости автоколебаний нелинейных систем методом гармонической линеаризации

Благодаря методу гармонической линеаризации становится возможным применение частотных методов для исследования нелинейных систем. Наиболее хорошо разработанными являются частотные методы исследования устойчивости автоколебаний — метод Л. С. Гольдфарба, являющийся аналогом амплитудно-фазового критерия устойчивости, и метод Е. П. Попова, основывающийся на критерии устойчивости Михайлова. Задача исследования устойчивости автоколебаний методом Гольдфарба упрощается, если пользоваться логарифмическими частотными характеристиками. Ниже решается задача выявления возможных автоколебаний, исследования их устойчивости, определения амплитуды и частоты автоколебаний применительно к системе с одним безынерционным нелинейным элементом методом ЛЧХ.

Исследование автоколебаний методом логарифмических частотных характеристик

Предварительно структурную схему системы преобразуют так, что все линейные элементы объединяют в линейную часть с комплексной передаточной функцией $K_{\text{л}}(j\omega)$ и систему представляют в виде последовательного соединения нелинейного элемента $HЭ$ и линейной части $ЛЧ$ (рис. 10.17). Нелинейный элемент заменяют эквивалентным линейным с эквивалентным комплексным коэффициентом усиления $k_0 K_0(A/a)$. Общая комплексная передаточная функция нелинейной системы в разомкнутом состоянии

$$K_p(j\omega, A/a) = k_0 K_0(A/a) K_{\text{л}}(j\omega).$$

Предположим, что замкнутая нелинейная система находится на границе устойчивости и в ней имеют место незатухающие колебания. АФЧХ разомкнутой системы в этом случае, согласно амплитудно-фазовому критерию устойчивости, должна проходить через точку с координатами $(-1, j0)$, т. е. $K_p(j\omega, A/a) = -1$. Отсюда условие существования в замкнутой системе колебаний имеет вид

$$k_0 K_0(A/a) K_{\text{л}}(j\omega) = -1 \quad (10.19)$$

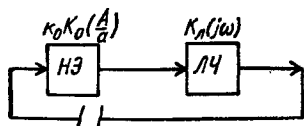
или

$$k_0 K_{\text{л}}(j\omega) = Z_0(A/a), \quad (10.20)$$

где $Z_0(A/a) = -(1/K_0(A/a))$.

Левая часть уравнения (10.20) является комплексной передаточной функцией линейной части системы с учетом нормирующего множителя k_0 нелинейного элемента, а правая — выражением, обратным нормированному ЭККУ нелинейного элемента. Записывая в показательной форме левую и правую части выражения (10.20): $k_0 K_{\text{л}}(j\omega) =$

Рис. 10.17. Представление нелинейной САУ в виде последовательного соединения нелинейного элемента НЭ и линейной части ЛЧ системы.



$$= k_0 N_n(\omega) e^{j\psi_n(\omega)}; Z_0(A/a) = N_0(A/a) e^{j\psi_0(A/a)}, \text{ получим} \\ k_0 N_n(\omega) e^{j\psi_n(\omega)} = N_0(A/a) e^{j\psi_0(A/a)}. \quad (10.21)$$

Из последней формулы видно, что в системе возможны колебания, если одновременно удовлетворяются два условия:

$$k_0 N_n(\omega) = N_0(A/a), \quad \psi_n(\omega) = \psi_0(A/a) \quad (10.22)$$

или в логарифмическом масштабе

$$20 \lg k_0 N_n(\omega) = 20 \lg N_0(A/a) \quad (10.23)$$

и

$$\psi_n(\omega) = \psi_0(A/a). \quad (10.24)$$

Первое условие будет выполняться при пересечении логарифмических амплитудных характеристик линейной части и нелинейного элемента, а второе условие — при пересечении их фазовых характеристик. Колебания в системе будут возможны, если точка пересечения амплитудных характеристик и точка пересечения фазовых характеристик соответствуют одной и той же частоте.

Методика построения логарифмических частотных характеристик линейной части системы не требует пояснений. Для построения логарифмических частотных характеристик нелинейного элемента найдем выражения для ее амплитудной и фазовой характеристик. Имея в виду, что

$$N_0(A/a) = \left| -\frac{1}{k_0(A/a)} \right| = \frac{1}{\sqrt{q_0^2(A/a) + b_0^2(A/a)}},$$

получаем следующее выражение для логарифмической амплитудной характеристики нелинейного элемента:

$$L_0(A/a) = 20 \lg N_0(A/a) = -20 \lg \sqrt{q_0^2(A/a) + b_0^2(A/a)}. \quad (10.25)$$

Выражение для фазовой характеристики нелинейного элемента

$$\psi_0(A/a) = \arg(-1/K_0(A/a)) = \arg(1/K_0(A/a)) - 180^\circ,$$

следовательно,

$$\psi_0\left(\frac{A}{a}\right) = \arctg\left(-\frac{b_0(A/a)}{q_0(A/a)}\right) - 180^\circ. \quad (10.26)$$

В случае безынерционных нелинейных элементов, как следует из формул (10.25) и (10.26), амплитудные и фазовые характеристики не зависят от частоты и представляют собой прямые, параллельные оси абсцисс.

На рис. 10.18. изображены ЛАЧХ $L_n(\omega) = 20 \lg k_0 N_n(\omega)$ и фазо-частотная характеристика $\psi_n(\omega)$ линейной части системы, а также

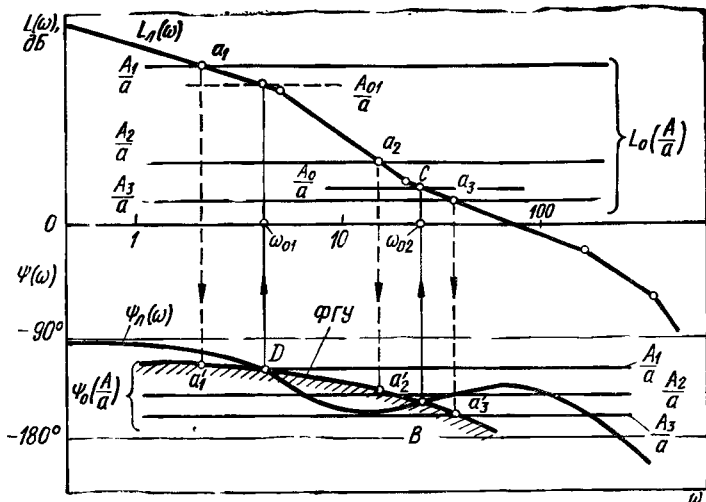


Рис. 10.18. Исследование автоколебаний нелинейной системы методом ЛЧХ.

нанесено семейство амплитудных $L_0(A/a) = 20N_0(A/a)$ и фазовых $\psi_0(A/a)$ характеристик нелинейного элемента при различных значениях A/a .

Для исследования возможности автоколебаний, определения их устойчивости и параметров удобно пользоваться *фазовой границей устойчивости* (ФГУ) колебаний [59]. Для построения ФГУ, в соответствии с условием (10.23), отмечаются точки пересечения амплитудных характеристик линейной части и нелинейного элемента (точки $a_1, a_2, \dots$) и сносятся по вертикали на соответствующие фазовые характеристики нелинейного элемента в точки $a'_1, a'_2, \dots$. Кривая, проведенная через эти точки, и является фазовой границей устойчивости колебаний. Если фазовая характеристика линейной части пересекает кривую ФГУ (см., например, точку B , рис. 10.18), то это значит, что амплитудные характеристики и фазовые характеристики линейной части и нелинейного элемента пересекаются в точках (C и B), соответствующих одной и той же частоте ω_{02} . Следовательно, при этом одновременно удовлетворяются условия возникновения колебаний (10.23) и (10.24).

Частота автоколебаний ω_{02} определяется непосредственно по шкале частот, а относительная амплитуда A_0/a — интерполяцией между значениями A/a на ближайших характеристиках нелинейного элемента, расположенных выше и ниже точки пересечения C . Согласно рис. 10.18 в нелинейной системе возможно возникновение автоколебаний с частотами и относительными амплитудами соответственно ω_{01} , A_{01}/a и ω_{02} , A_0/a .

Условие устойчивости автоколебаний рассмотрим на примере автоколебаний ω_{02} и A_0/a (точки пересечения характеристик B, C). Оно состоит в следующем. При увеличении амплитуды автоколебаний до

$A_3/a = A_0/a + \Delta A/a$ (пересечение амплитудных характеристик перемещается из точки C в точку a_3) система должна стать устойчивой, чтобы амплитуда автоколебаний уменьшилась до прежнего значения A_0/a . Это требование будет выполняться, если на частоте ω_{02} , соответствующей точке a_3 пересечения амплитудных характеристик, фазовая характеристика линейной части $\psi_L(\omega)$ идет выше кривой ФГУ, как показано на рис. 10.18. При уменьшении же относительной амплитуды до $A_2/a = A_0/a - \Delta A/a$ (пересечение амплитудных характеристик перемещается из точки C в точку a_2) система должна стать неустойчивой, чтобы амплитуда автоколебаний увеличилась до A_0/a . Данное требование будет выполняться, если на частоте ω_{02} , соответствующей точке a_2 пересечения амплитудных характеристик, фазовая характеристика $\psi_L(\omega)$ проходит ниже кривой ФГУ, как показано на рис. 10.18. Таким образом, согласно приведенному условию автоколебания с параметрами ω_{02} и A_0/a будут устойчивы, а с параметрами ω_{01} и A_{01}/a — неустойчивы. Применительно к САУ, у которых ЛАЧХ линейной части не имеет участников с положительным наклоном, это общее правило дает простой способ исследования устойчивости автоколебаний. Если при увеличении A/a амплитудная характеристика нелинейного элемента перемещается вниз, то кривая ФГУ штрихуется снизу (как показано на рис. 10.18), если же она перемещается вверх, то — сверху. Автоколебания будут устойчивыми, если фазовая характеристика линейной части системы при увеличении ω пересекает фазовую границу устойчивости, переходя с заштрихованной стороны на незаштрихованную.

На рис. 10.18 точка B пересечения фазовой характеристики линейной части системы с кривой ФГУ при ω_{02} соответствует устойчивым автоколебаниям с относительной амплитудой A_0/a , а точка пересечения D соответствует неустойчивым колебаниям на частоте ω_{01} с относительной амплитудой A_{01}/a .

В случае применения безынерционных нелинейных элементов с однозначной нелинейностью исследование автоколебаний системы несколько упрощается. В этом случае коэффициент гармонической линеаризации $b_0(A/a) = 0$, поэтому в соответствии с формулами (10.25) и (10.26)

$$L_0(A/a) = -20 \lg q_0(A/a), \quad (10.27)$$

$$\varphi_0(A/a) = -180^\circ, \quad (10.28)$$

т. е. амплитудные характеристики будут представлять собой семейство параллельных оси абсцисс прямых, соответствующих различным значениям A/a , а фазовая характеристика, а следовательно, ФГУ для всех однозначных нелинейностей совпадают с линией $\psi(\omega) = -180^\circ$.

В качестве примера исследуем устойчивость и автоколебания системы с релейным элементом, имеющим однозначную характеристику с зоной нечувствительности (см. табл. 10.1). Пусть ЛАЧХ $L_L(\omega) = 20 \lg k_0 N_L(\omega)$ и фазо-частотная характеристика $\psi_L(\omega)$ линейной системы имеют вид, изображенный на рис. 10.19.

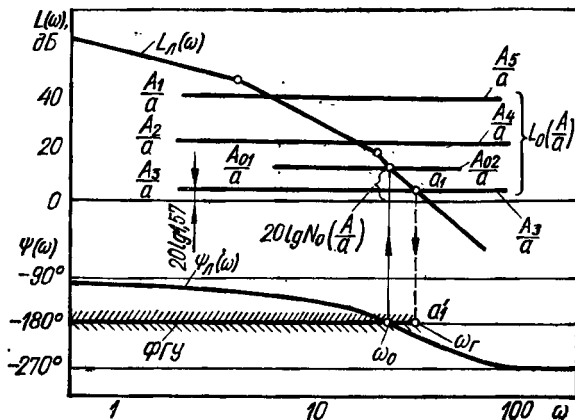


Рис. 10.19. К примеру исследования автоколебаний системы с релейным элементом, имеющим однозначную характеристику с зоной нечувствительности.

Пользуясь выражением для логарифмической амплитудной характеристики нелинейного элемента

$$L_0(A/a) = -20 \lg q_0(A/a) = -20 \lg \frac{4}{\pi A/a} \sqrt{1 - \frac{1}{(A/a)^2}},$$

полученной на основании формулы (10.14), или с помощью кривой $Z_0(A/a)$ (табл. 10.1), можно построить семейство логарифмических характеристик нелинейного элемента. Особенностью релейного элемента с зоной нечувствительности является то, что с увеличением A/a значение $L_0(A/a)$ вначале уменьшается — амплитудная характеристика нелинейного элемента перемещается вниз (характеристики A_1/a , A_2/a , A_3/a) до значения $L_0(A_3/a) = 20 \lg 1,57$ при $A_3/a = \sqrt{2}$, а затем при дальнейшем увеличении A/a $L_0(A/a)$ увеличивается — амплитудная характеристика перемещается вверх (характеристики A_3/a , A_4/a , A_5/a). Фазовые характеристики $\psi_0(A/a)$ нелинейного элемента при любом значении A/a и ФГУ совпадают с линией -180° .

Для определения правой граничной частоты ФГУ точку пересечения ЛАЧХ линейной части с нижней граничной амплитудной характеристикой (A_3/a) семейства амплитудных характеристик нелинейного элемента (точка a_1) сносим по вертикали на фазовую характеристику нелинейного элемента в точку a_1' . ФГУ совпадает с отрезком линии $\psi(\omega) = -180^\circ$ до частоты ω_r , соответствующей найденной точке a_1' . Штриховка ФГУ снизу соответствует перемещению амплитудной характеристики нелинейного элемента вниз с увеличением A/a , а штриховка сверху — перемещению характеристики вверх.

Из рис. 10.19 видно, что фазо-частотная характеристика линейной части $\psi_n(\omega)$ пересекается с ФГУ, следовательно, в системе возможны автоколебания на частоте ω_0 .

В рассматриваемой системе возможны автоколебания с относительной амплитудой A_{01}/a , значение которой находится между A_2/a и A_3/a ,

и с относительной амплитудой A_{02}/a , которая определяется интерполяцией между значениями A_3/a и A_4/a . Амплитудная характеристика $L_0 (A_{01}/a)$ относится к той части семейства амплитудных характеристик нелинейного элемента, в которой амплитудная характеристика с увеличением A/a перемещается вниз, а характеристика $L_0 (A_{02}/a)$ — к той части, где с увеличением A/a амплитудная характеристика перемещается вверх. Поэтому, учитывая, что фазовая характеристика линейной части при увеличении ω пересекает ФГУ сверху, в соответствии с приведенным выше правилом, автоколебания системы с относительной амплитудой A_{02}/a будут устойчивы, а с относительной амплитудой A_{01}/a — неустойчивы.

На практике не обязательно строить семейство амплитудных характеристик нелинейного элемента, а можно ограничиться построением лишь характеристики с наименьшим значением $L_0 (A/a)$ (в рассматриваемом примере $L_0 (A/a) = 20 \lg 1,57$). В этом случае для нахождения амплитуды автоколебаний непосредственно по рисунку определяют ординату ЛАЧХ линейной части системы на частоте ω_0 : $20 \lg k_0 N_n (\omega_0) = 12$ дБ. По условию (10.23) $20 \lg N_0 (A/a) = 20 \lg k_0 N_n (\omega_0) = 12$ дБ, откуда $N_0 (A/a) = 4$. По графику $Z_0 (A/a)$ для релейной характеристики с зоной нечувствительности (табл. 10.1) определяем значения относительной амплитуды возможных автоколебаний: $A_{01}/a = 1,6$ и $A_{02}/a = 4,6$. Пользуясь правилом определения устойчивости автоколебаний, находим, что автоколебания с относительной амплитудой $A_{02}/a = 4,6$ являются устойчивыми, а с относительной амплитудой $A_{01}/a = 1,6$ — неустойчивыми. Амплитуда устойчивых автоколебаний на входе нелинейного элемента $A_{02} = 4,6a$.

10.8. Способы устранения автоколебаний нелинейных САУ и уменьшения их амплитуды

Как отмечалось, в нелинейных системах возможно появление автоколебаний. Если эти автоколебания желательны или допустимы, возникает задача уменьшения их амплитуды. В тех же случаях, когда автоколебания недопустимы, стоит задача их устранения.

Один из способов устранения автоколебаний или уменьшения их амплитуды заключается в соответствующей деформации логарифмических частотных характеристик линейной части системы. Автоколебания можно устранить, если добиться, чтобы фазо-частотная характеристика линейной части системы $\psi_n(\omega)$ не пересекала кривую ФГУ. Вид деформированной ФЧХ показан на рис. 10.20 пунктирной кривой 1. Для уменьшения амплитуды автоколебаний нужно стремиться к тому, чтобы кривая $\psi_n(\omega)$ пересекала ФГУ в точке, соответствующей меньшим значениям относительной амплитуды автоколебаний. Для уменьшения амплитуды автоколебаний обычно следует перемещать точку пересечения характеристик в область более высоких частот, например из точки В в точку С (рис. 10.20): $20 \lg N_0 (A_{02}/a) <$

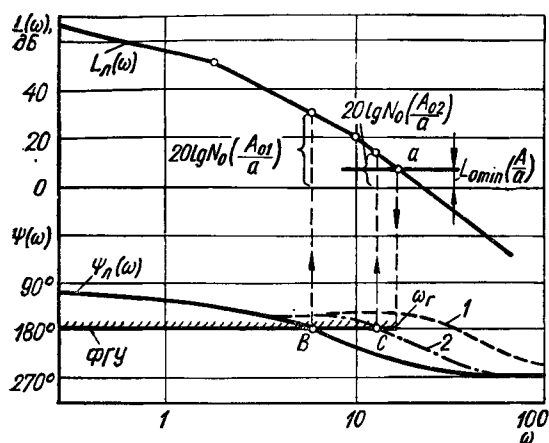


Рис. 10.20. К устранению автоколебаний и уменьшению их амплитуды за счет деформации частотных характеристик линейной части системы.

$< 20 \lg N_0 (A_{01}/a)$,
 $N_0 (A_{02}/a) < N_0 (A_{01}/a)$;
 в соответствии с графиком $Z_0 (A/a) = N_0 (A/a)$ (табл. 10.1) $A_{02}/a < A_{01}/a$.

Желаемая деформация частотных характеристик линейной части системы осуществляется

обычно с помощью линейных или нелинейных корректирующих устройств.

Эффективным способом подавления автоколебаний является наложение на релейный элемент вынужденных колебаний достаточно высокой частоты по сравнению с частотой автоколебаний. Такой метод подавления называют *вибрационной линеаризацией* нелинейной характеристики релейного элемента.

Вариант схемного осуществления вибрационной линеаризации характеристики реле изображен на рис. 10.21, а. На дополнительную обмотку реле P подается переменное напряжение u_d от постороннего источника. Период колебания этого напряжения должен быть значительно больше времени срабатывания реле, чтобы обеспечить четкий режим работы реле. С другой стороны, частота колебаний должна быть по возможности выше, чтобы гармоники выходного колебания реле (в том числе первая гармоника) имели более высокую частоту и лучше подавлялись системой.

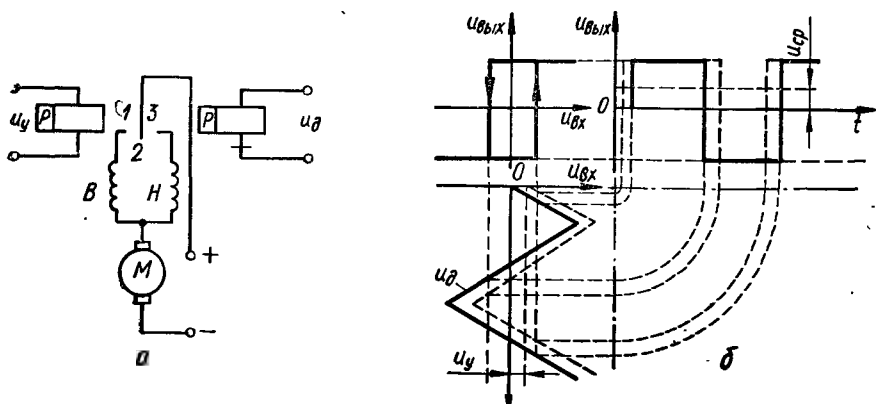


Рис. 10.21. К понятию о вибрационной линеаризации.

При вибрационной линеаризации обеспечивается плавная зависимость среднего значения (постоянной составляющей) выходного напряжения реле от значения медленно меняющейся входной величины (рис. 10.21, б). При напряжении управления $u_y = 0$ якорь реле колеблется около нейтрального положения и подключает к обмоткам B (вперед) и H (назад) возбуждения двигателя M напряжение питания на равные промежутки времени. Двигатель совершает колебания, имея нулевую среднюю скорость вращения. При подаче напряжения управления u_y время замыкания контактов 2—1 и 2—3 становится различным. Среднее значение напряжения $u_{ср}$, подаваемого на двигатель, будет отлично от нуля. Средняя скорость двигателя будет пропорциональная напряжению управления u_y .

Вид зависимости значения выходного напряжения реле $u_{ср}$ от напряжения управления u_y определяется формой колебаний u_d . Линейная зависимость обеспечивается при пилообразной форме колебаний [32, 67].

В многих случаях для вибрационной линеаризации используются собственные колебания (автоколебания) системы. В этом случае применяются специальные меры для повышения частоты и уменьшения амплитуды автоколебаний. Одним из способов получения автоколебаний высокой частоты является охват нелинейного элемента такой обратной связью, благодаря которой местный замкнутый контур сам становится генератором колебаний высокой частоты.

10.9. Нелинейные корректирующие устройства

Все корректирующие устройства, применяемые в системах автоматического управления, можно разделить на линейные и нелинейные. Линейные корректирующие устройства имеют ряд достоинств и широко применяются для улучшения динамических свойств как линейных (см. гл. 5), так и нелинейных автоматических систем. Вместе с тем линейным корректирующим устройствам присущи и недостатки. К ним, в частности, следует отнести жесткую зависимость между амплитудными и фазовыми частотными характеристиками. Так, например, дифференцирующие фазопережающие цепи создают положительный сдвиг, но одновременно вносят ослабление в области низких частот, т. е. в области спектра полезного сигнала (рис. 5.6). Этим объясняется низкая помехоустойчивость дифференцирующих цепей. Интегрирующие корректирующие контуры подавляют высокие частоты, но при этом создают запаздывание колебаний по фазе (рис. 5.12), что приводит к ухудшению переходных процессов и т. д. В то же время было бы желательно, чтобы корректирующие устройства создавали опережение по фазе без изменения амплитудной характеристики, подавляли высокие частоты без изменения фазовой характеристики, обеспечивали опережение по фазе и одновременно ослабляли высокие частоты. Эти задачи могут быть решены с помощью нелинейных корректирующих устройств.

Кроме указанных недостатков, линейные корректирующие устройства имеют ограниченные возможности в получении высоких показа-

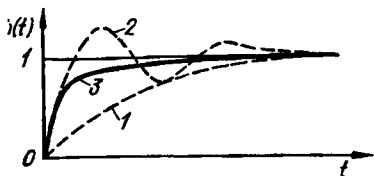


Рис. 10.22. Переходные процессы САУ при линейной (1 и 2) и нелинейной (3) коррекции.

сказанного на рис. 10.22 приведены кривые 1 и 2 переходных процессов линейной САУ при k_{p1} и k_{p2} соответственно ($k_{p2} > k_{p1}$). Применение линейных корректирующих устройств позволяет повысить в некоторых пределах значение коэффициента усиления системы, однако это не снимает указанного противоречия и необходимости компромиссного решения при выборе коэффициента усиления системы и настройке корректирующего устройства.

Указанное противоречие можно устранить применением нелинейных корректирующих устройств, изменяющих свое влияние на систему в зависимости от величины отклонения от установившегося режима (ошибки системы).

В результате применения такой нелинейной коррекции может быть получен желаемый процесс, изображенный, например, на рис. 10.22 кривой 3. Как видно из рисунка, он сочетает полезные свойства процессов 2 и 1: начальная часть процесса 3 совпадает с процессом 2 линейной системы, благодаря чему обеспечивается большое быстродействие системы, а окончание процесса 3 подобно окончанию процесса 1, т. е. является монотонным. Такой процесс может быть достигнут, например, изменением коэффициента усиления разомкнутой системы, k_p в зависимости от величины ошибки θ . При больших θ значение k_p должно быть большим, чтобы обеспечить быстрое уменьшение ошибки (начальный участок кривой 3), а по мере уменьшения θ значение k_p должно уменьшаться для завершения переходного процесса без перерегулирования. Такое изменение k_p может быть реализовано, например, с помощью простейшего последовательного нелинейного корректирующего устройства (рис. 10.23, а). При больших значениях напряжения ошибки u_θ нелинейное сопротивление $R1$ мало и поэтому коэффициент усиления цепи $k_1 = R_2/(R_1 + R_2)$ велико. По мере уменьшения u_θ нелинейное сопротивление $R1$ увеличивается, а коэффициент

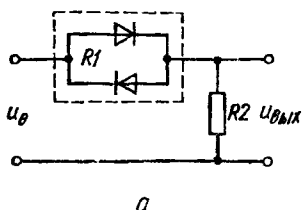


Рис. 10.23. Последовательное нелинейное корректирующее устройство (а) и его характеристика $k_1 = f(u_\theta)$ (б).

усиления k_1 уменьшается. Примерный график зависимости k_1 от u_0 изображен на рис. 10.23, б. По такому же графику будет изменяться и коэффициент усиления системы k_p . Недостаток коррекции с помощью рассматриваемого корректирующего устройства состоит в том, что оно изменяет лишь k_p системы, не компенсируя при этом вредное влияние инерционностей ее элементов. Из-за этого получаются малые значения k_p в установившихся динамических режимах, а следовательно, большие динамические ошибки системы. Ниже рассматриваются некоторые разновидности нелинейных корректирующих устройств.

Нелинейные корректирующие устройства с опережающими петлевыми характеристиками

У естественных нелинейных элементов с петлевыми характеристиками (см., например, рис. 10.11, а) при возрастании входной величины ($p x_{\text{вх}} > 0$, $p = d/dt$) выходная величина изменяется в соответствии с правой ветвью петли, а при убывании — в соответствии с ее левой ветвью. Коэффициент гармонической линейаризации b_0 (A/a) таких нелинейных элементов, независимо от вида характеристики, имеет отрицательное значение ($b_0 (A/a) < 0$). Поэтому они, как уже отмечалось, в соответствии с формулой (10.18) вносят запаздывание колебаний по фазе (рис. 10.11, б).

Если искусственно создать нелинейность с опережающей петлевой характеристикой, отличающейся от естественной (запаздывающей) порядком следования процесса (рис. 10.24, а), то первая гармоника выходного колебания $x_{\text{вых1}}$ будет опережать по фазе входное колебание (рис. 10.24, б). Для рассматриваемой релейной характеристики общего вида с зоной нечувствительности и опережающей петлей при $A/a \geq 1$ коэффициенты гармонической линейаризации равны:

$$q\left(\frac{A}{a}\right) = \frac{2}{\pi A} \int_{\omega t_1}^{\omega t_2} B \sin \omega t d\omega t = \frac{k_0 2}{\pi (A/a)^2} \sqrt{(A/a)^2 - 1} + \sqrt{(A/a)^2 - m^2}, \quad (10.29)$$

$$b\left(\frac{A}{a}\right) = \frac{2}{\pi A} \int_{\omega t_1}^{\omega t_2} B \cos \omega t d\omega t = k_0 \frac{2}{\pi (A/a)^2} (1 - m); \quad k_0 = \frac{B}{a}. \quad (10.30)$$

При выводе формул (10.29) и (10.30) принималось во внимание, что значения аргумента в точках переключения реле $x_{\text{вх}} = ma$ и $x_{\text{вх}} = a$ равны $\omega t_1 = \arcsin (ma/A)$, $\omega t_2 = \pi - \arcsin (A/a)$. Эквивалентный комплексный коэффициент усиления релейного элемента

$$K_{\text{э.н}}(A/a) = q(A/a) + jb(A/a) = N(A/a) e^{j\psi(A/a)},$$

где

$$N\left(\frac{A}{a}\right) = k_0 \frac{2}{\pi (A/a)^2} \sqrt{(\sqrt{(A/a)^2 - 1} + \sqrt{(A/a)^2 - m^2})^2 + (1 - m)^2}, \quad (10.31)$$

$$\psi\left(\frac{A}{a}\right) = \arctg\left(\frac{1 - m}{\sqrt{(A/a)^2 - 1} + \sqrt{(A/a)^2 - m^2}}\right). \quad (10.32)$$

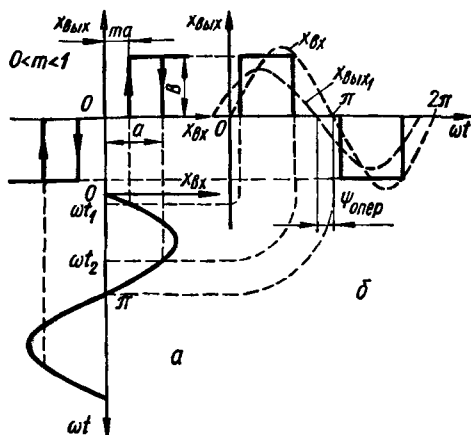
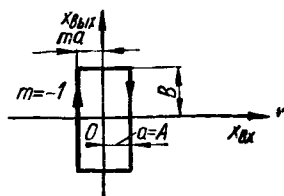


Рис. 10.24. Релейная характеристика общего вида с зоной нечувствительности и опережающей петлей (а) и форма выходного сигнала (б).

Рис. 10.25. Релейная опережающая петлевая характеристика с переменной шириной петли, имеющей $m = -1$.



Из формул (10.31) и (10.32) видно, что амплитудная и фазовая характеристики рассматриваемого релейного элемента являются функциями относительной амплитуды и не зависят от частоты. В соответствии с формулой (10.32) релейный элемент с опережающей петлей создает положительный сдвиг фазы. Значение этого сдвига зависит от относительной амплитуды A/a и коэффициента возраста реле m . Фазовый сдвиг увеличивается по мере приближения A/a к единице.

Изменяя m , можно в определенных пределах изменять фазовую характеристику. Рассмотрим релейный элемент с опережающей петлей, имеющий $m = -1$ и переменную ширину петли: ширина петли равна двум амплитудам входного сигнала (или $a = A$) и изменяется с изменением амплитуды (рис. 10.25). Подставив значения $m = -1$ и $A/a = 1$ в формулы (10.29) и (10.30), как для частного случая, получаем:

$$q(A/a) = 0; \quad b(A/a) = 4B/\pi A.$$

Модуль и аргумент ЭККУ нелинейного элемента

$$N(A/a) = 4B/\pi A; \quad \psi(A/a) = +90^\circ, \quad (10.33)$$

т. е. релейный элемент с опережающей петлевой характеристикой переменной ширины создает опережение по фазе во всем диапазоне частот, равное 90° . Амплитудная характеристика элемента не зависит от частоты входного сигнала, а является функцией только его амплитуды.

Ряд способов получения релейных характеристик с опережающей петлей предложен В. В. Бурляевым [67]. Область использования рассмотренных корректирующих устройств ограничена системами, в которых имеют место автоколебания или переходный процесс носит колебательный характер.

Среди нелинейных корректирующих устройств можно выделить класс таких устройств, эквивалентные амплитудно-фазовые характеристики которых не зависят от амплитуды входного сигнала и являются только функциями частоты. У этих устройств отсутствует жесткая связь между амплитудной и фазовой характеристиками, как это имеет место у линейных корректирующих устройств. На этом основании нелинейные корректирующие устройства данного класса можно рассматривать как псевдолинейные. Возможность формирования амплитудной и фазовой характеристик псевдолинейных корректирующих устройств независимо друг от друга открывает широкие возможности изменения частотных характеристик САУ в желаемом направлении.

Псевдолинейные корректирующие устройства выполняются двух- и трехканальными. Рассмотрим двухканальное псевдолинейное корректирующее устройство (рис. 10.26). Входной сигнал разветвляется и проходит по двум каналам. Один из каналов (верхний) служит для формирования амплитудной характеристики и называется амплитудным, второй — фазовый канал формирует фазовую характеристику устройства. Амплитудный канал состоит из линейного элемента с передаточной функцией $K_A(p)$, модульного элемента МЭ (например, двухполупериодного выпрямителя) и фильтра Φ . Амплитудная характеристика линейного элемента определяет амплитудную характеристику всего корректирующего устройства. Модульный элемент дает на выходе величину, пропорциональную амплитуде колебания на его входе и исключает прохождение информации о фазе входного сигнала $x_{вх}$. Фильтр служит для выделения постоянной составляющей выпрямленного напряжения. В фазовый канал входят линейный элемент с передаточной функцией $K_\Phi(p)$ и блок сигнатуры (блок знака) БС. Фазовая характеристика линейного элемента определяет фазовую характеристику всего корректирующего устройства. Блок сигнатуры исключает прохождение информации об амплитуде через фазовый канал и представляет собой релейное устройство с характеристикой, близкой к идеальной. При изменении знака сигнала на входе изменяется знак выходного сигнала блока БС, а величина его принимает лишь два фиксированных значения ± 1 , независимо от значения амплитуды входного сигнала. Выходная величина $x_{вых}$ корректирующего устройства получается в результате перемножения выходных величин амплитудного и фазового каналов в блоке умножения БУ.

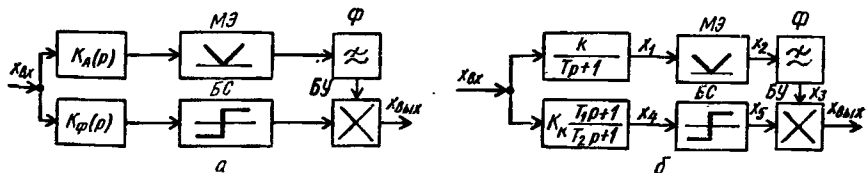


Рис. 10.26. Структурные схемы двухканальных псевдолинейных корректирующих устройств:

а — общая схема; б — схема устройства, создающего опережение по фазе и подавляющего высокие частоты.

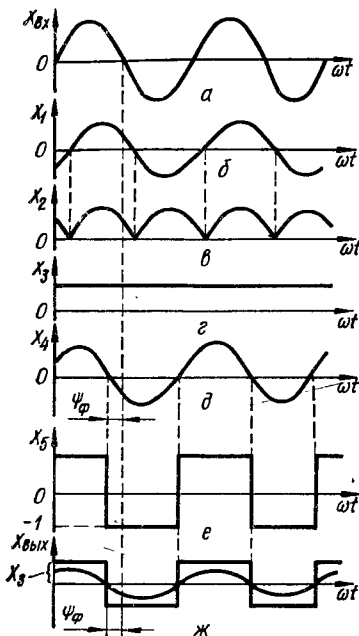


Рис. 10.27. Формы сигналов псевдолинейного корректирующего устройства (рис. 10.26, б).

При $x_{вх} = A \sin \omega t$ (рис. 10.27, а) напряжение x_1 на выходе апериодического звена является также синусоидальной функцией (рис. 10.27, б)

$$x_1 = A_1 \sin [\omega t + \psi_A(\omega)], \quad (10.36)$$

где

$$A_1 = kA / \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}, \quad \psi_A = -\arctg \omega T. \quad (10.37)$$

Выпрямленное напряжение x_2 (рис. 10.27, в) с выхода модульного элемента проходит через фильтр Φ , на выходе которого выделяется его постоянная составляющая x_3 (рис. 10.27, г). Напряжение x_3 пропорционально амплитуде A_1 :

$$x_3 = k_m A_1 = k_m kA / \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}, \quad (10.38)$$

где при применении в качестве элемента взятия модуля двухполупериодного выпрямителя $k_m = 2/\pi$.

Напряжение x_4 (рис. 10.27, д) на выходе дифференцирующей фазопередающей цепи в фазовом канале

$$x_4 = A_4 \sin [\omega t + \psi_\Phi(\omega)], \quad (10.39)$$

где

$$A_4 = k_\Phi A \sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1} / \sqrt{T_2^2 \omega^2 + 1}, \quad \psi_\Phi(\omega) = \arctg \omega T_1 - \arctg \omega T_2, \quad (10.40)$$

Выбирая линейные элементы с соответствующими передаточными функциями $K_A(p)$ и $K_\Phi(p)$, можно реализовать псевдолинейное корректирующее устройство с желаемыми, независимыми друг от друга амплитудой и фазовой частотными характеристиками.

Для примера рассмотрим псевдолинейное корректирующее устройство, создающее опережение по фазе и ослабляющее высокие частоты. Для реализации такого корректирующего устройства в амплитудный канал включается элемент, ослабляющий высокие частоты, например апериодическое звено, имеющее передаточную функцию

$$K_A(p) = k/(Tp + 1), \quad (10.34)$$

а в фазовый канал — элемент, создающий положительный сдвиг по фазе, например дифференцирующая фазопередающая цепь (см. рис. 5.6, а) с передаточной функцией

$$K_\Phi(p) = k_\Phi(T_1 p + 1)/(T_2 p + 1), \quad k_\Phi = T_2/T_1 < 1. \quad (10.35)$$

т. е. напряжение x_4 сдвинуто по фазе в сторону опережения относительно входного на угол $\psi_\phi(\omega)$. Это напряжение, поступая на идеальный релейный элемент, формирует на его выходе переключающее напряжение x_5 вида прямоугольной волны (рис. 10.27, е). Амплитуда напряжения x_5 не зависит от A_4 (т. е. не пропускается информация об амплитуде) и равна единице, а фаза (моменты переключения) сдвинута по сравнению с напряжением $x_{вх}$ в сторону опережения на угол $\psi_\phi(\omega)$. В результате перемножения сигналов x_3 и x_5 получается выходное напряжение корректирующего устройства $x_{вых}$ вида прямоугольной волны (рис. 10.27, ж), амплитуда импульсов которого равна значению напряжения x_3 на выходе амплитудного канала (10.38), а моменты переключения (фаза) соответствует моментам переключения напряжения x_5 на выходе фазового канала.

Зная форму выходного сигнала $x_{вых}$ корректирующего устройства, можно определить его эквивалентный комплексный коэффициент усиления. Прямоугольную волну $x_{вых}$ можно рассматривать как выходной сигнал идеального релейного элемента с $B = x_3$, лишь сдвинутый по фазе на угол $\psi_\phi(\omega)$ в сторону опережения. Поэтому модуль ЭККУ псевдолинейного корректирующего устройства (ее амплитудная характеристика) равен коэффициенту гармонической линейаризации $q(A)$ этого релейного элемента, а следовательно, в соответствии с формулой (10.13) при $a = 0$ определяется выражением

$$N(\omega) = \frac{4x_3}{\pi A} = \frac{4k_m k A}{\pi A \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}} = \frac{8k}{\pi^2 \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}} = \frac{k_3}{\sqrt{T^2 \omega^2 + 1}},$$

где $k_3 = 8k/\pi^2$.

Фаза первой гармоники выходного напряжения корректирующего устройства $x_{вых1}$ (рис. 10.27, ж) равна фазе прямоугольной волны $x_{вх}$, поэтому аргумент ЭККУ (фазовая характеристика) корректирующего устройства определяется формулой

$$\psi(\omega) = \psi_\phi(\omega) = \arctg \omega T_1 - \arctg \omega T_2 = \arctg [\omega (T_1 - T_2) / (1 + \omega^2 T_1 T_2)].$$

Таким образом, эквивалентная амплитудная характеристика практически совпадает с амплитудной характеристикой линейного элемента $K_A(p)$, а эквивалентная фазовая характеристика — с фазовой характеристикой линейного элемента $K_\phi(p)$. Обе характеристики не зависят от амплитуды и являются лишь функциями частоты входного колебания.

Полученные выражения для эквивалентных амплитудной и фазовой характеристик являются приближенными. При их выводе не учитывалось, что напряжение на выходе фильтра Φ не является строго постоянным. Из-за трудности создания фильтра Φ , выделяющего постоянную составляющую выпрямленного напряжения на всех частотах, на практике его часто из схемы исключают. В этих случаях амплитудный канал оказывает некоторое влияние на фазовую характеристику корректирующего устройства.

Приведенная на рис. 10.26 структурная схема псевдолинейного корректирующего устройства является довольно общей. Если принять $K_A(p) = k$, а $K_\phi(p)$ оставить в виде (10.35), то корректирующее

устройство будет создавать опережение по фазе, не изменяя амплитудной характеристики системы. Для того чтобы получить ослабление высших частот, не изменяя фазовой характеристики, необходимо в амплитудный канал включить аperiodическое, а в фазовый канал — пропорциональное звено.

Анализ системы при использовании эквивалентных амплитудных и фазовых характеристик псевдолинейных корректирующих устройств аналогичен анализу линейных систем.

Таким образом, с помощью нелинейных корректирующих устройств возможно удовлетворение повышенным требованиям к показателям качества САУ. Нелинейную коррекцию можно рассматривать как более общее средство коррекции, чем линейную коррекцию, которую можно отнести к частному случаю нелинейной коррекции. Построение оптимальных по быстродействию систем (гл. 11) возможно только благодаря применению нелинейных устройств управления. С помощью нелинейных корректирующих устройств решается задача компенсации вредных естественных нелинейностей [23]. Вместе с тем следует отметить, что нелинейная коррекция является более специализированной (менее универсальной) по отношению к внешним воздействиям. Нелинейная коррекция, выбранная для определенного класса внешних воздействий, может оказаться малоэффективной или даже вредной при других воздействиях (режимах работы системы). Поэтому при широком диапазоне внешних воздействий может оказаться лучшей линейная коррекция. Следует отметить, что общей методики синтеза нелинейных корректирующих устройств в настоящее время нет. Приходится прибегать к применению частных приемов и схем нелинейных корректирующих устройств.

10.10. Методы оценки динамической точности и качества переходных процессов в нелинейных системах

Основные положения по оценке динамической точности линейных систем справедливы и для нелинейных систем. В частности, характер зависимости точности в установившемся динамическом режиме в нелинейной системе от коэффициента усиления, порядка астатизма, разомкнутых компенсационных связей по задающему и возмущающему воздействиям такой же, как и в линейных системах. Однако наличие естественных нелинейностей оказывает влияние на динамическую точность САУ, вызывая дополнительные ошибки. Если, например, зону нечувствительности имеет элемент сравнения, то при ошибках системы, меньших этой зоны, система оказывается разомкнутой и не отрабатывает задающее воздействие. Это приводит к тому, что возникает статическая ошибка, равная зоне нечувствительности. В тех случаях, когда элемент с зоной нечувствительности включен за усилителем с коэффициентом усиления k , статическая ошибка системы уменьшается в k раз. При включении интегрирующего звена до элемента с зоной нечувствительности статическая ошибка не возникает. Это объясняется

памятью интегрирующего звена, благодаря чему его выходная величина удерживается равной зоне нечувствительности.

Качество переходных процессов и нелинейных САУ оценивается теми же показателями, что и в линейных системах, т. е. временем регулирования t_p , перерегулированием σ , количеством колебаний и т. д. Однако эти показатели в нелинейных системах в отличие от линейных зависят от величины входного воздействия. Период колебаний переходной функции в нелинейных системах не является постоянной величиной и зависит от входного воздействия.

Имеется ряд методов определения показателей качества переходного процесса нелинейной системы. Если нелинейные элементы, входящие в систему, не оказывают определяющего влияния на ее динамику, то вначале в порядке первого приближения можно построить кривую переходного процесса как для линейной системы, не принимая во внимание нелинейности. Такое исследование возможно, например, при наличии незначительной зоны нечувствительности, насыщения, неопределенной характеристики с узкой петлей и т. д. Если система имеет несущественные нелинейности и рассматривается как линеаризованная, то при определении переходной функции ступенчатое воздействие на входе системы должно быть ограничено по значению, чтобы элементы системы не входили в область насыщения. После исследования системы в линейном плане, в случае необходимости, оценивается влияние на динамику САУ неучтенных нелинейностей.

Для построения переходного процесса системы с учетом нелинейностей могут быть использованы методы численного интегрирования, метод фазовых траекторий, частотные, графоаналитические, методы моделирования, метод пространства состояний и др.

10.11. Компенсация естественных нелинейностей САУ

Естественные нелинейности (зона нечувствительности, насыщение, люфт) вносят дополнительные статические и динамические ошибки, уменьшают быстродействие САУ и не позволяют реализовать те потенциальные возможности повышения точности, которые имеются в классе комбинированных систем. Поэтому стремятся компенсировать влияние этих нелинейностей. Наиболее универсальным является метод компенсации путем подачи на вход и выход компенсируемой нелинейности сигналов смещения, формируемых с помощью компенсирующих нелинейностей из входного или выходного сигналов компенсируемой нелинейности [22, 23]. Схема компенсации нелинейности $F(x^*)$ изображена на рис. 10.28, а. В соответствии с рисунком имеем

$$\left. \begin{aligned} x^*(t) &= x(t) + F_1(x); \\ x_{\text{вых}} &= F_1(x^*) + F_2(x). \end{aligned} \right\} \quad (10.41)$$

Требуется найти такие нелинейные функции прямых связей $F_1(x)$ и $F_2(x)$, чтобы обеспечивалась линейная зависимость $x_{\text{вых}}(t) = kx(t)$. Вид компенсирующих нелинейностей зависит от типа компенсируемой нелинейности. Синтез компенсирующих нелинейностей рассмотрим на примере компенсации зоны нечувствительности и насыщения.

Компенсация зоны нечувствительности

Необходимо компенсировать зону нечувствительности (см. рис. 1.18, з), описываемой выражением

$$F(x^*) = x_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } |x^*(t)| \leq b_n; \\ -k_n b_n \operatorname{sign} x^* + k_n x^*(t) & \text{при } |x^*(t)| \geq b_n, \end{cases} \quad (10.42)$$

где k_n , b_n — коэффициент усиления нелинейного элемента на линейном участке характеристики и половина зоны нечувствительности соответственно, т. е. необходимо добиться линейной зависимости

$$x_{\text{вых}}(t) = k_n x(t). \quad (10.43)$$

Подставив значение $x^*(t)$ из (10.41) в (10.42), получим

$$F(x^*) = F_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } |x(t) + F_1(x)| \leq b_n; \\ -k_n b_n + k_n F_1(x) + k_n x(t) & \text{при } [x(t) + F_1(x)] \geq b_n; \\ k_n b_n + k_n F_1(x) + k_n x(t) & \text{при } [x(t) + F_1(x)] \leq -b_n, \end{cases} \quad (10.44)$$

где $F_2(x)$ — эквивалентная характеристика цепи между точками А и В. Из (10.44) следует, что при выполнении условий

$$\left. \begin{aligned} -k_n b_n + k_n F_1(x) &= 0 & \text{при } [x(t) + F_1(x)] \geq b_n; \\ k_n b_n + k_n F_1(x) &= 0 & \text{при } [x(t) + F_1(x)] \leq -b_n \end{aligned} \right\} \quad (10.45)$$

нелинейная функция

$$F(x^*) = k_n x(t) \text{ при } |x(t) + F_1(x)| \geq b_n. \quad (10.46)$$

Условия (10.45) будут выполнены, если $F_1(x)$ представляет собой знаковую функцию сигнала $x(t)$:

$$F_1(x) = b_n \operatorname{sign} x(t), \quad (10.47)$$

т. е. если на вход компенсируемой нелинейности будет подаваться

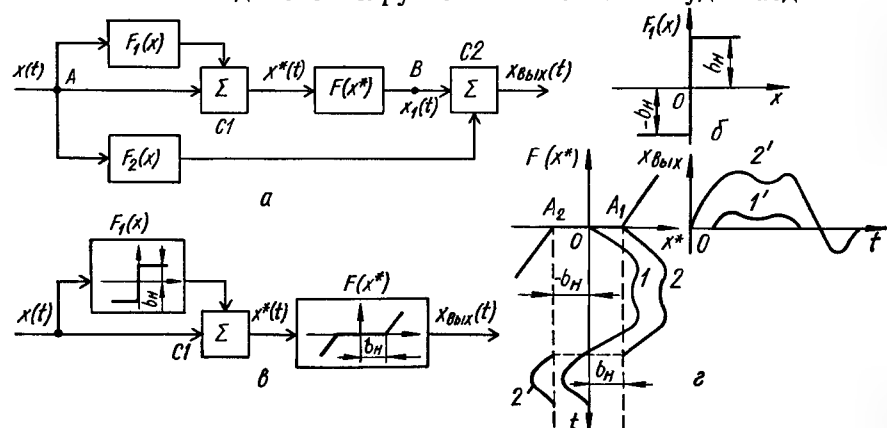


Рис. 10.28. Компенсация нелинейности $F(x^*)$ введением нелинейных прямых связей: а — общая схема компенсации; б — статическая характеристика компенсирующей нелинейности $F_1(x)$; в — схема компенсации зоны чувствительности $F(x^*)$; г — графическая иллюстрация компенсации зоны нечувствительности.

сигнал смещения, определяемой формулой (10.47), который можно получить с помощью идеального релейного элемента со статической характеристикой, изображенной на рис. 10.28, б.

Очевидно, если $F_1(x)$ определяется формулой (10.47), то при всех значениях $x(t)$ будет выполняться неравенство

$$|x(t) + F_1(x)| = |x(t) + b_n \operatorname{sign} x(t)| \geq b_n$$

и, следовательно, в соответствии с (10.44) линейная зависимость $F_2(x) = k_n x(t)$ будет иметь место при любых значениях входного сигнала, в том числе и при $|x(t)| < b_n$. Выходной сигнал соединения элементов (рис. 10.28, а)

$$x_{\text{вых}}(t) = F_2(x) + F_1(x) = k_n x(t) + F_1(x).$$

Из сравнения последнего выражения и (10.43) следует, что линейная зависимость будет достигнута при $F_2(x) = 0$, т. е. для компенсации зоны нечувствительности достаточно одной нелинейной компенсирующей связи, как показано на рис. 10.28, в. В соответствии с формулой (10.47) и рис. 10.28, в условие компенсации зоны нечувствительности можно записать в виде

$$x^*(t) = x(t) + F_1(x) = x(t) + b_n \operatorname{sign} x(t),$$

т. е. на вход нелинейного элемента вместе с сигналом должна поступать его знаковая функция.

Графически метод компенсации зоны нечувствительности иллюстрируется на рис. 10.28, г. При $x(t) > 0$ с выхода компенсирующего релейного элемента $F_1(x)$ на сумматор С1 подается сигнал смещения, равный половине зоны нечувствительности b_n , благодаря чему рабочая точка перемещается из точки O в точку A_1 . При $x(t) < 0$ рабочая точка перемещается из точки O в точку A_2 . Графики входного I и выходного I' сигналов нелинейного элемента с зоной нечувствительности свидетельствуют о вносимых нелинейных искажениях. Для случая компенсированной зоны нечувствительности входной и выходной сигналы изображены кривыми 2 и 2' соответственно. Из рисунка видно, что при подаче на вход нелинейного элемента, соответствующего смещению, нелинейный элемент превращается в линейный.

Расширение линейной зоны статической характеристики нелинейности типа насыщения

Схема расширения линейной зоны статической характеристики нелинейности $F(x^*)$ типа насыщения (рис. 1.18, в) с помощью компенсирующих нелинейных прямых связей $F_1(x)$ и $F_2(x)$ изображена на рис. 10.29, а. Компенсирующие нелинейности, синтезированные рассмотренным выше методом, представляют собой релейные элементы. Зоны нечувствительности реле равны зоне b_n линейного участка статической характеристики, а выходные сигналы релейных элементов $F_1(x)$ и $F_2(x)$ при $x(t) \geq b_n$ равны b_n и значению насыщения c соответственно. При $x(t) < b_n$ реле не срабатывают, $x^*(t) = x(t)$ и работа происходит на линейном участке статической характеристики I (рис. 10.29, б). При $x(t) \rightarrow b_n$ $x_1(t) = x_{\text{вых}}(t) \rightarrow c$. При $x(t) \geq$

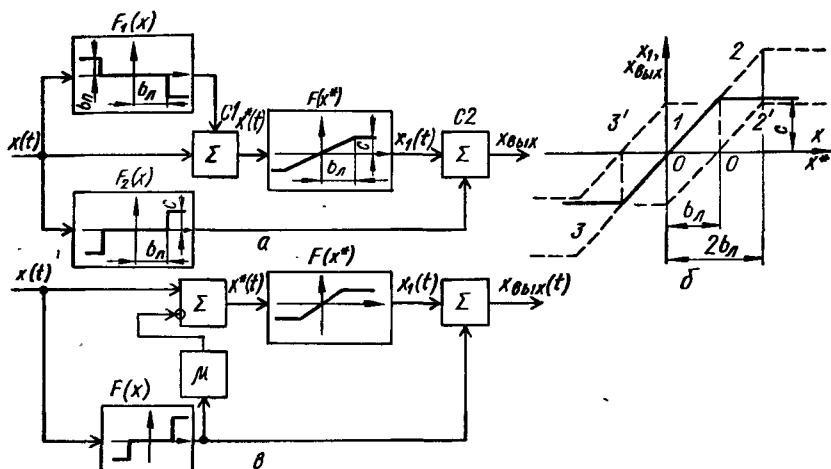


Рис. 10.29. Расширение линейной зоны нелинейности типа насыщения:
 а — схема расширения линейной зоны статической характеристики в два раза; б — построение статической характеристики соединения элементов (а); в — упрощенная схема расширения линейной зоны.

$\geq b_n$ $x^*(t) = x(t) - b_n$, т. е. на вход компенсируемой нелинейности поступает разностный сигнал. Если $x(t) = b_n$, то $x^*(t) = 0$, $x_1(t) = 0$. Это соответствует переносу начала координат и всей статической характеристики из положения 1 вправо на величину b_n в положение 2'. Для того чтобы восстановить сигнал на выходе при $x(t) = b_n$, одновременно с подачей сигнала смещения на вход нелинейного элемента $F(x^*)$ с компенсирующего релейного элемента $F_2(x)$ сигнал смещения, равный c , подается в сумматор C2 на его выходе, где складывается с выходным сигналом $x_1(t)$ компенсируемой нелинейности. В результате такого сложения при $x(t) = b_n$, когда $x_1(t) = 0$, выходной сигнал схемы $x_{\text{вых}}(t) = c$. Это соответствует перемещению характеристики 2' вверх на величину сигнала смещения c в положение 2. Аналогично при поступлении сигнала отрицательной полярности в случае $x(t) \leq -b_n$ работа будет происходить на участке 3 статической характеристики. Таким образом, благодаря подаче соответствующих сигналов смещения на вход и выход компенсируемой нелинейности его линейная зона расширяется в два раза.

Включая параллельно n компенсирующих цепей, можно расширить линейную зону нелинейности типа насыщения в $n + 1$ раз. Принимая во внимание, что релейные элементы $F_1(x)$ и $F_2(x)$ имеют равные зоны нечувствительности и отличаются лишь значениями выходных напряжений, можно два компенсационных реле заменить одним релейным элементом $F(x)$ и усилительным элементом μ (рис. 10.29, в).

В тех случаях, когда нельзя использовать входной сигнал (фазовые, частотные, временные дискриминаторы), для формирования компенсирующих смещений используется выходной сигнал компенсируемой нелинейности, т. е. компенсация нелинейности достигается введением обратной и прямой нелинейных компенсирующих связей [23].

Оптимальные системы автоматического управления

11.1. Постановка задачи оптимального управления

Определение и необходимость построения оптимальных систем автоматического управления

Системы автоматического управления обычно проектируют, исходя из требований обеспечения тех или иных показателей качества. Во многих случаях необходимое повышение динамической точности и улучшение переходных процессов систем автоматического управления достигается с помощью корректирующих устройств.

Особенно широкие возможности повышения показателей качества дает введение в САУ разомкнутых компенсационных каналов и дифференциальных связей, синтезированных из того или иного условия инвариантности ошибки относительно задающего или возмущающих воздействий [18, 22]. Однако эффект влияния корректирующих устройств, разомкнутых компенсационных каналов и эквивалентных им дифференциальных связей на показатели качества САУ зависит от уровня ограничения сигналов нелинейными элементами системы. Выходные сигналы дифференцирующих устройств, обычно кратковременные по длительности и значительные по амплитуде, ограничиваются элементами системы и не приводят к улучшению показателей качества системы, в частности ее быстродействия. Лучшие результаты решения задачи повышения показателей качества САУ при наличии ограничений сигнала дает так называемое оптимальное управление.

Задача синтеза оптимальных систем строго сформулирована сравнительно недавно, когда было дано определение понятия критерия оптимальности. В качестве критерия оптимальности в зависимости от цели управления могут быть выбраны различные технические или экономические показатели управляемого процесса. В оптимальных системах обеспечивается не просто некоторое повышение того или иного технико-экономического показателя качества, а достижение минимально или максимально возможного его значения.

Если критерий оптимальности выражает технико-экономические потери (ошибки системы, время переходного процесса, расход энергии, средств, стоимость и т. п.), то оптимальным будет такое управление, которое обеспечивает минимум критерия оптимальности. Если же он выражает рентабельность (к. п. д., производительность, прибыль, дальность полета ракеты и т. д.), то оптимальное управление должно обеспечить максимум критерия оптимальности.

Задача определения оптимальной САУ, в частности синтез оптимальных параметров системы при поступлении на ее вход задающего

воздействия и помехи, являющихся стационарными случайными сигналами, рассматривалась в гл. 7. Напомним, что в данном случае в качестве критерия оптимальности принято среднеквадратическое значение ошибки (СКО). Условия повышения точности воспроизведения полезного сигнала (задающего воздействия) и подавления помехи носят противоречивый характер, и поэтому возникает задача выбора таких (оптимальных) параметров системы, при которых СКО принимает наименьшее значение.

Синтез оптимальной системы при среднеквадратическом критерии оптимальности является частной задачей. Общие методы синтеза оптимальных систем основываются на вариационном исчислении. Однако классические методы вариационного исчисления для решения современных практических задач, требующих учета ограничений, во многих случаях оказываются непригодными. Наиболее удобными методами синтеза оптимальных систем автоматического управления являются метод динамического программирования Беллмана и принцип максимума Понтрягина.

Таким образом, наряду с проблемой улучшения различных показателей качества САУ возникает задача построения оптимальных систем, в которых достигается экстремальное значение того или иного технико-экономического показателя качества.

Разработка и внедрение оптимальных систем автоматического управления способствует повышению эффективности использования производственных агрегатов, увеличению производительности труда, улучшению качества продукции, экономии электроэнергии, топлива, сырья и т. п.

Понятия о фазовом состоянии и фазовой траектории объекта

В технике часто возникает задача перевода управляемого объекта (процесса) из одного состояния в другое. Например, при целеуказании необходимо антенну радиолокационной станции (РЛС) повернуть из начального положения с начальным азимутом β_n в заданное положение с азимутом β_k . Для этого на электродвигатель, связанный с антенной через редуктор, подают управляющее напряжение u . В каждый момент времени состояние антенны характеризуется текущим значением угла поворота β и угловой скоростью ω . Эти две величины изменяются в зависимости от управляющего напряжения u . Таким образом, существуют три связанных между собой параметра β , ω , u (рис. 11.1).

Величины β и $\omega = d\beta/dt$, характеризующие состояние антенны, называются фазовыми координатами, u — управляющим воздействием. При целеуказании РЛС типа станции орудийной наводки возникает задача поворота антенны по азимуту и углу места. В этом случае будем иметь четыре фазовые координаты объекта и два управляющих воздействия. У летящего самолета можно рассматривать шесть фазовых координат (три пространственные координаты x , y , H и три компоненты скорости $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{H}$) и несколько управляющих воздействий (тяга двигателя, величины, характеризующие положение рулей вы-



Рис. 11.1. Схема объекта с одним управляющим воздействием и двумя фазовыми координатами.

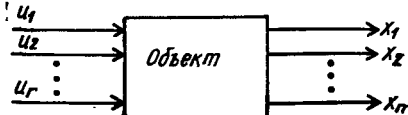


Рис. 11.2. Схема объекта с r управляющими воздействиями и n фазовыми координатами.

Рис. 11.3. Схема объекта с векторным изображением управляющего воздействия u и фазового состояния объекта x .



соты и направления, элеронов). В общем случае в каждый момент времени состояние объекта характеризуется n фазовыми координатами $x_1, x_2, \dots, x_n$, а к объекту может быть приложено r управляющих воздействий $u_1, u_2, \dots, u_r$ (рис. 11.2).

Под переводом управляемого объекта (процесса) из одного состояния в другое следует понимать не только механическое перемещение (например, антенны РЛС, самолета), но также требуемое изменение различных физических величин: температуры, давления, влажности кабины, химического состава того или иного сырья при соответствующем управляемом технологическом процессе.

Управляющие воздействия $u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$ удобно считать координатами некоторого вектора $u = (u_1, u_2, \dots, u_r)$, называемого вектором управляющего воздействия. Фазовые координаты (переменные состояния) объекта $x_1, x_2, \dots, x_n$ также можно рассматривать, как координаты некоторого вектора или точки $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ в n -мерном пространстве с координатами $x_1, x_2, \dots, x_n$. Эту точку называют фазовым состоянием (вектором состояния) объекта, а n -мерное пространство, в котором в виде точек изображаются фазовые состояния, называется фазовым пространством (пространством состояний) рассматриваемого объекта. При использовании векторных изображений управляемый объект можно изобразить, как показано на рис. 11.3, где u — вектор управляющего воздействия u ($u_1, u_2, \dots, u_r$), x представляет собой точку x ($x_1, x_2, \dots, x_n$) в фазовом пространстве, характеризующую фазовое состояние объекта. Под влиянием управляющего воздействия u ($u_1, u_2, \dots, u_r$) фазовая точка x ($x_1, x_2, \dots, x_n$) перемещается, описывая в фазовом пространстве некоторую линию, называемую фазовой траекторией рассматриваемого движения объекта.

Если состояние объекта характеризуется двумя фазовыми координатами x_1, x_2 (см. рис. 11.1), то речь идет о фазовой плоскости, на которой фазовая траектория изображается особенно наглядно. Пусть, например, при подаче постоянного по величине напряжения u на двигатель, представляющий собой апериодическое звено, угловая частота вращения его ротора $\omega(t) = x_1(t)$ изменяется по кривой, изображенной на рис. 11.4, а, а производная (ускорение) $d\omega(t)/dt = x_2(t)$ по кривой, изображенной на рис. 11.4, б. Тогда фазовая траектория $x(t)$ имеет вид, изображенный на рис. 11.4, в.

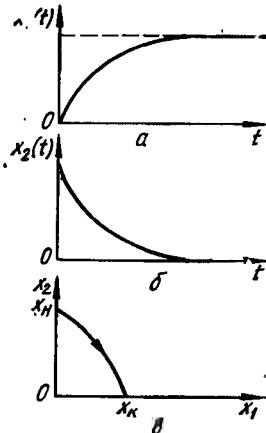


Рис. 11.4. Связь между фазовой траекторией $x(t)$ (в) и временными характеристиками $x_1(t)$ (а) и $x_2(t)$ (б).

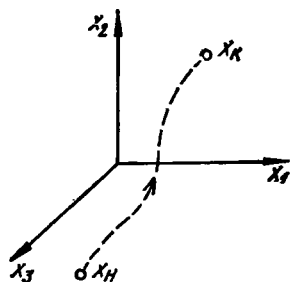


Рис. 11.5. К задаче о переводе управляемого объекта из точки x_H в x_K фазового пространства.

Уточним задачу о переводе управляемого объекта. Пусть в начальный момент времени t_0 фазовое состояние объекта соответствует точке x_H (рис. 11.5); требуется выбрать такое управление $u(t)$, которое переведет объект в заранее заданное конечное фазовое состояние x_K . Для решения этой задачи необходимо знать уравнение движения (динамики), т. е. математическую модель управляемого объекта (процесса).

Уравнения движения управляемого объекта

Рассмотрим электродвигатель, который представляется двумя аperiodическими звеньями (рис. 11.6). На вход двигателя поступает напряжение u , на выходе двигателя — угловая частота вращения ротора $\omega = x_1$. Уравнение двигателя

$$(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) x_1 = k u, \quad p = d/dt, \quad k = k_1 k_2,$$

или

$$T_1 T_2 \ddot{x}_1 + (T_1 + T_2) \dot{x}_1 + x_1 = k u.$$

Для анализа процессов в фазовом пространстве уравнение объекта представляют в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка. Обозначив ускорение через x_2 , т. е. положив $x_2 = \dot{x}_1$, запишем уравнение двигателя в виде следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{T_1 T_2} x_1 - \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} x_2 + \frac{k}{T_1 T_2} u. \end{aligned} \right\} \quad (11.1)$$

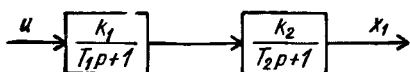


Рис. 11.6. Структурная схема двигателя, управляемой величиной которого является угловая частота вращения ротора $\omega = x_1$.

Переход к описанию объекта в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка от линейного уравнения n -го порядка осуществляется путем замены переменных $x_k = d^{k-1}x/dt^{k-1}$ и подстановки их в исходное уравнение. Пусть уравнение объекта с одним управляющим воздействием u таково:

347

Зная управляющее воздействие $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t))$, можно из системы уравнений (11.2) или векторного уравнения (11.3), а при наличии возмущений из уравнения (11.4) однозначно определить движение объекта при $t > t_0$, если известно его начальное фазовое состояние при $t = t_0$. Если изменить управление $u(t)$, то движение фазовой точки будет происходить по другой траектории, т. е. для разных управлений получаем разные траектории, исходящие из одной точки (рис. 11.7). Поэтому перевод объекта из начального фазового состояния x_n в конечное x_k можно осуществить по разным фазовым траекториям в зависимости от управления. Среди множества траекторий существует наилучшая в определенном смысле, т. е. оптимальная траектория. Например, если поставлена задача минимального расхода топлива в течение интервала полета самолета, то следует подойти к выбору управления и соответствующей траектории именно с этой точки зрения. Удельный расход топлива G зависит от развиваемой тяги — управляющего воздействия $u(t)$, т. е. $G(u)$. Интересуемый суммарный расход топлива — основной в данном случае показатель качества систем управления полетом самолета — определяется интегральным функционалом

$$Q(u) = \int_{t_0}^t G(u) dt. \quad (11.5)$$

Интегральный функционал (11.5), характеризующий основной показатель качества системы управления (в рассматриваемом примере расход топлива), называется *критерием оптимальности*. Каждому управлению $u(t)$, а следовательно, траектории полета самолета соответствует свое численное значение критерия оптимальности (11.5). Возникает задача выбора такого управления $u(t)$ и траектории движения $x(t)$, при которых достигается минимальное значение критерия оптимальности.

Обычно используются критерии оптимальности, величина которых определяется не текущим состоянием объекта (в рассматриваемом примере удельным расходом топлива), а изменением его в течение всего процесса управления. Поэтому для определения критерия оптимальности требуется, как и в приведенном примере, интегрировать какую-либо функцию, величина которой в общем случае зависит от текущих значений фазовых координат x объекта и управляющего воздействия u , т. е. такой критерий оптимальности является интегральным функционалом вида

$$Q(x, u) = \int_0^{t_k} G(x, u) dt. \quad (11.6)$$

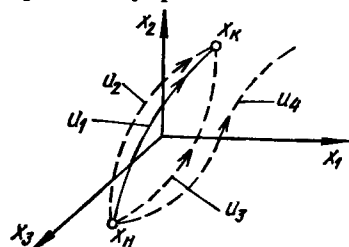


Рис. 11.7. Фазовые траектории движения объекта, соответствующие различным управляющим воздействиям.

Здесь $G(x, u)$ — функция выходной величины x объекта и управляющего воздействия u , являющихся в общем случае векторами; t_k — длительность процесса управления. Согласно формуле (11.6), критерий оптимальности $Q(x, u)$ является числовой величиной, зависящей от функции $G(x, u)$.

Частным случаем критерия оптимальности (11.6) являются интегральные оценки качества переходных процессов:

$$I_1 = \int_0^{\infty} (x_{уст} - x) dt, \quad I_2 = \int_0^{\infty} (x_{уст} - x)^2 dt. \quad (11.7)$$

Подынтегральная функция в этих критериях содержит только координаты объекта — установившееся $x_{уст}$ и текущее x значения выходной величины. Примером критерия, в котором подынтегральная функция содержит управление, является критерий (11.5), применяемый при минимизации расхода топлива, и интеграл

$$Q(u) = \int_0^{t_k} G(u^2) dt. \quad (11.8)$$

Квадрат управляющего воздействия (например, электрического тока, потребляемого объектом) определяет мощность, расходуемую при управлении объектом. Поэтому интеграл (11.8) будет мерой расхода энергии и применяется в задачах на минимизацию расходуемой энергии.

В тех случаях, когда фазовые координаты объекта представляют стационарные случайные функции, критерий оптимальности представляет собой интегральный функционал не во временной, а в частотной области. Такие критерии оптимальности используются при решении задачи оптимизации систем по минимуму дисперсии ошибки.

В простейших случаях критерий оптимальности может представлять собой не интегральный функционал, а просто функцию. Такой критерий используется при оптимизации конечного состояния объекта, например, в задаче минимизации отклонения (промаха) при наведении истребителя-перехватчика или ракеты на цель.

При решении поставленной выше задачи перевода объекта (процесса) из начального фазового состояния x_n в конечное x_k следует, очевидно, выбирать такое управление, для которого принятый критерий

оптимальности — функционал $Q(x, u) = \int_{t_0}^{t_k} G(x, u) dt$ — принимает наименьшее возможное значение.

Во многих случаях к системе управления предъявляются противоречивые требования (например, требования минимума расхода топлива и максимальной скорости полета самолета). При выборе управления, отвечающего одному требованию (критерию минимума расхода топлива), не будут удовлетворяться другие требования (максимальная скорость полета). Поэтому из всех требований выбирают одно основное, которое должно удовлетворяться наилучшим образом, а другие

требования учитываются в виде ограничений их значений. Например, при удовлетворении требования минимального расхода топлива ограничивается минимальное значение скорости полета самолета. Если имеются несколько равных показателей качества, которые не удается объединить в общий комбинированный показатель, выбор оптимальных управлений, соответствующих этим показателям в отдельности при ограничении остальных дает варианты решения, которые могут (при проектировании) помочь при выборе оптимального компромиссного варианта.

В общем случае ограничиваемые величины могут иметь, как и критерий оптимальности, вид функционалов $Q(x, u)$ от x и u , а соответствующие ограничения — вид неравенства $Q_m(x, u) \leq 0$, $m = 1, 2, \dots$

Ограничения управляющего воздействия и фазовых координат управляемого объекта

При выборе управляющего воздействия u следует иметь в виду, что оно не может принимать произвольные значения, так как на него наложены реальные ограничения, определяемые техническими условиями. Например, значение управляющего напряжения, подаваемого на двигатель, ограничено его предельным значением, определенным условиями эксплуатации двигателя.

Таким образом, в соответствии с конструкцией объекта и условиями его эксплуатации в пространстве переменных $u_1, u_2, \dots, u_r$ имеется некоторое множество U допустимых управляющих воздействий и выбираемое управляющее воздействие должно принадлежать этому множеству $u \in U$. На рис. 11.8 изображено множество U для случая $r = 2$. Для технических задач характерна замкнутая область допустимых управлений, когда точка $u(u_1, u_2, \dots, u_r)$ может находиться не только внутри множества, но и на его границе.

На фазовые координаты объекта также налагаются определенные ограничения $x \in X$ (при повороте антенны высотомера на заданный азимут максимальная угловая скорость и ускорение ограничены механической прочностью антенны).

Оптимальное управление может быть достигнуто, если объект является *управляемым*, т. е. существует хотя бы одно допустимое управление, переводящее объект из начального состояния в заданное конечное.

Постановка задачи. Задача оптимального управления может быть сформулирована следующим образом. В фазовом пространстве объекта X даны две точки x_n и x_k . Среди всех допустимых управлений $u(t)$, переводящих объект из точки x_n фазового пространства в точку x_k , найти такое, для которого критерий оптимальности $Q(x, u) = \int_{t_0}^{t_1} G(x(t), u(t)) dt$ принимает наименьшее возможное значение. Здесь $x(t)$ — решение уравнения (11.2) с начальным условием $x(t_0) = x_n$. Такое управление называется *оптимальным управлением*, а соответствующая траектория — *оптимальной траекторией*.

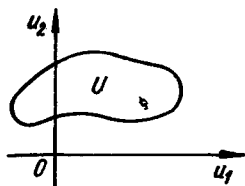


Рис. 11.8. Множество U допустимых управляющих воздействий для случая $r = 2$.

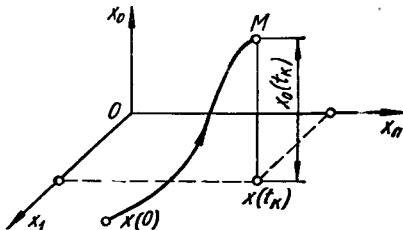


Рис. 11.9. Геометрическая интерпретация критерия оптимальности $Q' = x_0(t_k)$.

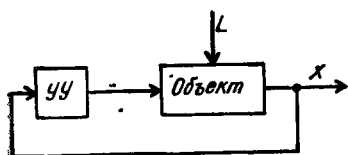
Требование минимизации критерия оптимальности Q может быть формально заменено требованием минимизации конечного значения одной из координат объекта управления. Для этого в уравнения (11.2) объекта вводится дополнительная координата, которой является функционал Q . Это делается добавлением к уравнениям (11.2) нового уравнения

$$dx_0/dt = G(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_r), \quad (11.9)$$

причем $x(0) = 0$. Размерность фазового пространства при этом увеличивается на единицу, т. е. становится равной $n + 1$. С учетом (11.6) из (11.9) следует, что $Q = x_0(t_k)$, т. е. значение критерия оптимальности Q равно значению x_0 в конечный момент времени $t = t_k$. Геометрически это означает следующее (рис. 11.9). В $(n + 1)$ -мерном пространстве с координатами $x_0, x_1, \dots, x_n$ фазовая траектория проходит от точки $x(0)$, расположенной в гиперплоскости $(x_1, x_2, \dots, x_n, x_0(t=0) = 0)$, до точки M , у которой фиксированы координаты $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (они определены конечной точкой $x(t_k)$ траектории объекта). Точка M лежит на перпендикуляре, восстановленном из точки $x(t_k)$ гиперплоскости $x_0 = 0$ и параллельном оси x_0 . Требуется найти такое управление $u(t)$, чтобы минимизировать конечное значение $x_0(t_k)$ координаты x_0 .

Найти оптимальное управление $u_{\text{опт}}$ означает определить его математическое описание, т. е. найти оператор A_{yy} , в соответствии с которым формируется управляющее воздействие u . В большинстве случаев u формируется из фазовых координат объекта x (для чего вводится обратная связь), внешних воздействий L с учетом принятого критерия оптимальности $u = A_{yy}(x, L, G)$. Управляющее воздействие u формируется с помощью управляющего устройства УУ (рис. 11.10).

Если граничные условия в задаче оптимального управления заданы начальной и конечной точками траектории (см. рис. 11.7), то имеем задачу с фиксированными концами. В том случае, когда одно или оба граничных условия заданы не точкой, а конечной областью или совсем не заданы, то имеем задачу со свободными концами или одним свободным концом. Примером задачи с одним свободным концом является задача устранения отклонения в системе автоматического управления, вызванного, например, скачкообразным изменением задающего или возмущающего воздействия.



Важным частным случаем оптимального управления является задача об *оптимальном быстродействии*. Среди всех допустимых управлений $u = u(t)$, под воздействием которых управляемый объект переходит из начального фазового состояния x_n в заданное конечное состояние x_k , найти такое, для которого этот переход осуществляется за кратчайшее время. В этом случае подынтегральная функция $G(x, u) = 1$, а критерий оптимальности принимает вид

$$Q(x, u) = \int_{t_0}^{t_1} 1 \cdot dt = t_1 - t_0.$$

11.2. Методы решения задач синтеза оптимального управления

Как следует из постановки задачи, при реализации оптимального управления u критерий оптимальности — функционал $Q(x, u) =$

$= \int_{t_0}^{t_1} G(x(t), u(t)) dt$ — принимает экстремальное значение. Обычно критерий оптимальности составляется так, чтобы условием оптимальности был минимум, когда $Q(x, u)$ можно трактовать как обобщенную «стоимость» достижения цели управления, показатель «потерь».

Задача определения оптимального управления u и оптимальной траектории x сводится к определению функции $G(x(t), u(t))$, которая придает функционалу $Q(x, u)$ экстремальное значение. Если имеется несколько функций $G(x(t), u(t))$ и при одной из них функционал имеет экстремум, то эту функцию следует принять в качестве решения задачи.

В случае сравнительно простых задач с одним или двумя управляющими воздействиями определение управляющего воздействия возможно методом прямого поиска путем многократного нахождения процесса на вычислительной машине при вариации управляющего воздействия.

Метод динамического программирования Беллмана

В основу метода динамического программирования решения вариационных задач положен следующий принцип оптимальности: *участок оптимальной траектории от любой ее промежуточной до конечной точки также является оптимальной траекторией между этими точками*. Например, если траектория 1—2 между точками H и K (рис. 11.11) является оптимальной, то оптимальным будет и любой ее участок от произвольной точки I до точки K . Справедливость прин-

ципа оптимальности очевиден: если траектория 1—2 оптимальна (на ней достигается минимум критерия оптимальности), то оптимальной будет и траектория 2. В противном случае, если бы оптимальной траекторией между точками l и K оказалась какая-то другая траектория $2'$, то оптимальной траекторией между точками H и K была бы траектория 1— $2'$, так как для нее критерий оптимальности имел бы меньшее значение, чем для траектории 1—2 за счет меньшего приращения критерия на участке $2'$. Данный принцип оптимальности справедлив для систем, у которых оптимальная траектория не зависит от предыстории системы, а определяется лишь ее начальным состоянием.

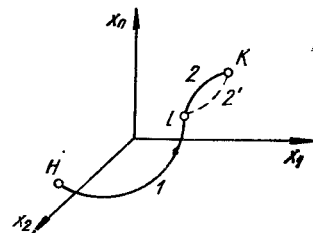


Рис. 11.11. К принципу оптимальности.

Суть метода динамического программирования поясним на следующем примере (рис. 11.12, а). Пусть требуется перевести некоторый объект из точки H в точку K . Для этого необходимо сделать m шагов, каждый из которых, кроме последнего m -го шага, имеет l вариантов. Например, если в результате первого шага объект оказался в точке 1 вертикали 1, то для выполнения второго шага имеется l вариантов. Из точки 2 вертикали 1 второй шаг также может быть сделан в соответствии с одним из l вариантов и т. д. Для каждого варианта шага известна величина приращения ΔQ_i критерия оптимальности.

В данной задаче число возможных вариантов траектории перевода объекта из точки H в точку K равно числу комбинаций l^{m-1} . Из этого числа возможных траекторий требуется определить оптимальную траекторию (оптимальное управление движением объекта), соответствующую минимальному критерию оптимальности Q .

Пусть, например, требуется выбрать маршрут автомобиля, проходящий через заданные точки, на котором достигается минимум расхода топлива или времени движения. Оптимальное решение можно найти перебором возможных вариантов на вычислительной машине, однако при больших значениях m и l , что имеет место при решении большинства реальных задач, это потребовало бы чрезвычайно большого объема вычислений. Решение этой задачи упрощается при использо-

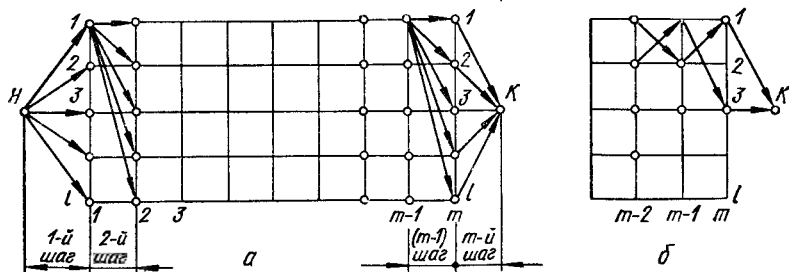


Рис. 11.12. К методу динамического программирования:

а — пример задачи; б — определение оптимальной траектории.

Таблица 11.1. К расчету оптимальной траектории

Номер начальной точки ($m - 1$)-го шага	1	2	...	l
Значения $\Delta Q_{\min}$ за два шага	$\Delta Q_{\min 1}$	$\Delta Q_{\min 2}$	...	$\Delta Q_{\min l}$
Оптимальная траектория	1—3—K	2—1—K	...	l—2—K

вании метода динамического программирования. Оптимальную траекторию этим методом, согласно сформулированному выше принципу, будем определять путем нахождения оптимальных участков траектории между точками некоторой промежуточной вертикали и конечной точкой K , постепенно переходя от точек одной вертикали к точкам другой в направлении от конечной точки K траектории к ее начальной точке H . Сперва найдем оптимальные участки траекторий для перехода от каждой точки $(m - 1)$ -й вертикали в точку K . Из точки 1 $(m - 1)$ -й вертикали, как отмечалось, имеется l вариантов перехода в точку K : 1—1—K, 1—2—K, 1—3—K, ..., 1— l —K (рис. 11.12, а). Оптимальный участок траектории, дающий минимальное приращение ΔQ критерия оптимальности, можно найти перебором из l вариантов или любым другим методом (методом градиента, методом наискорейшего спуска, методом Гаусса-Зейделя и др., которые будут рассмотрены в гл. 12). Пусть оптимальной траекторией, которой соответствует наименьшее приращение $\Delta Q_{\min 1}$, будет, например, траектория 1—3—K (рис. 11.12, б). Результаты расчетов удобно занести в табл. 11.1.

Из точки 2 $(m - 1)$ -й вертикали к точке K можно перейти также по l траекториям. Аналогично находится оптимальная траектория (пусть таковой будет, например, траектория 2—1—K, рис. 11.12, б), которой соответствует наименьшее приращение $\Delta Q_{\min 2}$ критерия оптимальности. Оптимальные траектории от всех других точек $(m - 1)$ -й вертикали до точки K находятся таким же образом и результаты расчетов заносятся в таблицу или при использовании ЭВМ вводятся в память машины.

При определении оптимальных траекторий между точками $(m - 2)$ -й вертикали и точкой K учитываются полученные значения $\Delta Q_{\min}$ для последних двух $(m$ и $m - 1)$ шагов и найденные ранее оптимальные траектории. Благодаря этому задача нахождения оптимальных траекторий между каждой точкой $(m - 2)$ -й вертикали и точкой K упрощается и сводится к выбору оптимальной траектории из l траекторий. Случай, когда оптимальной между точками 1 и K является траектория 1—2—1—K, а между точками 2 и K — траектория 2—1—3—K, иллюстрируется на рис. 11.12, б.

Аналогично определяются оптимальные траектории из точек $(m - 3)$ -й вертикали и т. д., вплоть до начальной точки H . Для определения оптимальной траектории на последнем этапе необходимо найти минимальную сумму среди l сумм, составленных из приращений

ΔQ за первый шаг и найденных перед этим значений $\Delta Q_{\min}$ за последующие $m - 1$ шагов из каждой l точек вертикали l . В результате находим оптимальную траекторию в целом, т. е. от начальной H до конечной точки K .

Решение данной задачи возможно не только при обратном движении от конца к началу, но и при прямом движении от начала к концу [81].

Таким образом, с помощью метода динамического программирования задача выбора оптимальной траектории из l^{m-1} вариантов сведена к последовательному выбору из l вариантов. Например, если $m = 8$, $l = 10$, то выбор из 10^7 вариантов сводится к последовательному выбору из 10 вариантов.

Для математической формулировки задачи динамического программирования предположим, что шаги в решении задачи представляют фиксированные интервалы времени, т. е. происходит квантование по времени. Требуется найти с учетом ряда ограничений закон управления $u[n]$, переводящий объект из точки $x[0]$ фазового пространства в точку $x[m]$ при условии обеспечения минимума критерия оптимальности

$$Q = \sum_{n=0}^m G \{x[n], u[n]\}.$$

Здесь n — текущий номер шага (относительное время). Оптимальное управление будем искать, как и раньше, с конечного момента $n = m$, двигаясь обратно. Находим из l вариантов оптимальное управление $u[m-1]$ для каждого дискретного значения $x[m-1]$ (для каждой возможной точки $(m-1)$ -й вертикали). Найденные оптимальные значения $u[m-1]$ и ΔQ_{m-1} , как функции $x[m-1]$, фиксируются. Переходя затем к началу $(m-2)$ -го шага, определяем варьированием $u[m-2]$ минимальное приращение ΔQ_{m-2} для каждого значения $x[m-2]$ (для каждой точки $(m-2)$ -й вертикали) с учетом ранее найденных значений приращений ΔQ_{m-1} и т. д., вплоть до начальной точки $x[0]$. В результате находим оптимальное управление $u[n]$, сам оптимальный процесс $x[n]$ и суммарную величину критерия оптимальности Q . Управление записывается в виде последовательности значений $u[0], u[1], \dots, u[m-1]$, например: $u[0] = 2, u[1] = 1, u[2] = 6$ и т. д. (рис. 11.13).

Таким образом, оптимизация функционала, зависящего от искомой функции управления $u[n]$, заменяется последовательностью m оптимизаций более простой функции ΔQ_{m-i} одной переменной $u[m-i]$.

Благодаря такому упрощению с помощью метода динамического программирования становится возможным решение задач оптимального управления, которые не решаются путем прямой оптимизации исходного функционала классическими методами вариационного исчисления. Метод динамического программирования по существу

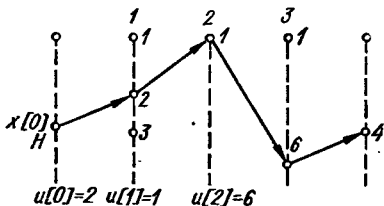


Рис. 11.13. Пример оптимальной траектории.

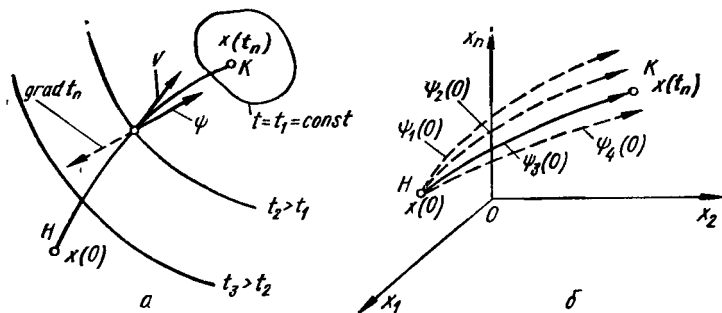


Рис. 11.14. К принципу максимума:

a — оптимальная по быстродействию траектория; *б* — оптимальные траектории, соответствующие различным начальным значениям функции $\psi(0)$.

представляет собой метод составления программы для численного решения задачи на цифровых вычислительных машинах. Лишь в простейших случаях данный метод позволяет получить аналитическое выражение искомого решения и выполнять его исследование. С помощью метода динамического программирования возможно решение задач не только оптимального управления, но и многошаговых задач оптимизации из самых различных областей техники.

Принцип максимума Понтрягина

Суть принципа максимума Понтрягина можно пояснить на примере задачи о максимальном быстродействии. Пусть требуется за минимальное время перевести изображающую точку из начального положения H фазового пространства в конечное положение K (рис. 11.14, *a*). Для каждой точки фазового пространства около точки K существуют оптимальная фазовая траектория и соответствующее минимальное время перехода в точку K . Вокруг точки K можно построить изохроны — поверхности, являющиеся геометрическим местом точек с одинаковым минимальным временем t_i перехода в эту точку. Оптимальная по быстродействию траектория из точки H в точку K в идеальном случае должна совпадать с нормальными к изохронам (на движение вдоль изохрон затрачивается время без уменьшения отрезка времени до момента достижения конечной точки). На практике ограничения, налагаемые на координаты объекта, не всегда позволяют реализовать идеальную, оптимальную по быстродействию, траекторию. Поэтому оптимальной траекторией будет та, которая максимально, насколько это позволяют ограничения, близка к нормальным к изохронам. Это условие математически означает, что на протяжении всей траектории скалярное произведение H вектора скорости $V = dx/dt$ движения изображающей точки на вектор ψ , обратный (по направлению) градиенту времени перехода в конечную точку, должно быть максимально:

$$H = \psi V = \sum_{i=1}^n \psi_i V_i = \max, \quad (11.10)$$

где $\psi = -\text{grad } t_n$ — вектор, обратный градиенту времени перехода; ψ_i, V_i — координаты векторов $\psi (\psi_1, \dots, \psi_n)$ и $V (V_1, \dots, V_n)$. Так как скалярное произведение двух векторов равно произведению их модулей на косинус между ними, то *условием оптимальности является максимум проекции вектора скорости V на направление ψ* . Данное условие оптимальности и есть *принцип максимума Понтрягина*.

В рассматриваемом примере критерием оптимальности является время. Однако условие оптимальности (11.10) справедливо и для общего случая, т. е. для любого критерия оптимальности Q . Поверхности постоянного значения этого критерия в общем случае называются *изоповерхностями*, а в условии максимума (11.10) вектор ψ представляет собой взятый со знаком минус градиент принятого критерия оптимальности.

В общем случае уравнения объекта (11.2) дополняются уравнением (11.9), содержащим координату x_0 , соответствующую критерию оптимальности, и условие оптимальности (11.10) принимает вид уравнения Гамильтона

$$H = \psi V = \sum_{i=0}^n \psi_i V_i = \max, \quad (11.11)$$

где скалярная величина H называется гамильтонианом.

Таким образом, возникает задача определения такого управления u , под влиянием которого вектор скорости V движения изображающей точки в каждый момент времени максимально совпадал бы с нормалью к изоповерхностям, т. е. с вектором ψ , направленным в каждой точке фазового пространства в сторону наибо́льшего убывания функции Q .

При решении задачи оптимального управления на практике не определяют изоповерхности, а находят векторы ψ . В связи с этим, кроме основных переменных, т. е. $n + 1$ фазовых координат $x_0, x_1, \dots, x_n$ и r управляющих воздействий $u_1, u_2, \dots, u_r$, необходимо определить $n + 1$ «вспомогательных» переменных $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n$, т. е. необходимо определить всего $2(n + 1) + r$ переменных. Для этого следует иметь столько же соотношений.

Имеем $(n + 1)$ уравнений объекта:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_0 &= G(x, u) = f_0(x, u); \\ \dot{x}_1 &= f_1(x, u); \\ \dot{x}_2 &= f_2(x, u); \\ &\dots \dots \dots \\ \dot{x}_n &= f_n(x, u), \end{aligned} \right\} \quad (11.12)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$, т. е. правая часть уравнений не зависит от x_0 .

При оптимальном управлении

$$dH(\psi, x, u)/du_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (11.13)$$

что дает еще r соотношений между неизвестными переменными.

Для определения координат вектора ψ на оптимальной траектории используются $(n + 1)$ так называемых сопряженных уравнений. Для определения этих уравнений вначале найдем частные производные

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = \frac{\partial \{\psi V\}}{\partial x_i} = \frac{\partial \left\{ \sum_{j=0}^n \psi_j V_j \right\}}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Методику определения частных производных рассмотрим на примере $n = 2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x_i} &= \frac{\partial \{\psi_0 V_0 + \psi_1 V_1 + \psi_2 V_2\}}{\partial x_i} = \frac{d\psi_0}{dx_i} V_0 + \frac{dV_0}{dx_i} \psi_0 + \\ &+ \frac{d\psi_1}{dx_i} V_1 + \frac{dV_1}{dx_i} \psi_1 + \frac{d\psi_2}{dx_i} V_2 + \frac{dV_2}{dx_i} \psi_2, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Для случая $i = 1$ переменные ψ_0 и x_1 , ψ_2 и x_1 являются независимыми, поэтому $d\psi_0/dx_1 = d\psi_2/dx_1 = 0$ и

$$\frac{\partial H}{\partial x_1} = \frac{dV_0}{dx_1} \psi_0 + \frac{d\psi_1}{dx_1} V_1 + \frac{dV_1}{dx_1} \psi_1 + \frac{dV_2}{dx_1} \psi_2.$$

Подставив в последнее выражение значение $V_1 = dx_1/dt$, получим

$$\frac{\partial H}{\partial x_1} = \frac{dV_0}{dx_1} \psi_0 + \frac{d\psi_1}{dt} + \frac{dV_1}{dx_1} \psi_1 + \frac{dV_2}{dx_1} \psi_2. \quad (11.14)$$

В точках оптимальной траектории частные производные H по x_i , согласно условию (11.11), равны нулю. Приравняв $\partial H/\partial x_1 = 0$, из выражения (11.14) получаем сопряженное уравнение

$$\frac{d\psi_1}{dt} = - \sum_{j=0}^2 \psi_j \frac{dV_j}{dx_1}.$$

В общем случае сопряженные уравнения, справедливые для оптимальной траектории, имеют вид

$$\frac{d\psi_i}{dt} = - \sum_{j=0}^n \psi_j \frac{dV_j}{dx_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (11.15)$$

Так как дополнительная координата ψ_0 вектора ψ всегда равна -1 , то

$$d\psi_0/dt = 0. \quad (11.16)$$

Из системы n сопряженных уравнений (11.15) совместно с уравнением (11.16) определяют значения $(n + 1)$ текущих координат $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n$ вектора ψ на оптимальной траектории.

Таким образом, с учетом сопряженных уравнений (11.15) и (11.16) общее число соотношений равно $2(n + 1) + r$, т. е. соответствует числу искомых переменных.

Выражение (11.14) для общего случая принимает вид

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = \frac{d\psi_i}{dt} + \sum_{j=0}^n \psi_j \frac{dV_j}{dx_i}.$$

Учитывая, что для данной точки x оптимальной траектории ψ задано и в явном виде от x зависит лишь вектор V , частная производная H по x_i

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = \sum_{j=0}^n \psi_j \frac{dV_j}{dx_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (11.17)$$

Из сравнения выражений (11.15) и (11.17) видно, что их правые части равны и поэтому выражение (11.15) можно записать в компактной форме

$$d\psi_i/dt = -\partial H/\partial x_i. \quad (11.18)$$

Из формулы (11.11) следует, что $\partial H/\partial \psi_i = V_i$, поскольку V не зависит от ψ_i . Подставив в последнюю формулу значение $V_i = dx_i/dt$, получим уравнение движения объекта в виде

$$dx_i/dt = \partial H/\partial \psi_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (11.19)$$

Уравнения (11.18) и (11.19) называются канонически сопряженными.

Можно принять следующий план решения задачи оптимизации с помощью принципа максимума.

1. Записываем уравнения объекта в виде системы уравнений первого порядка, включая в них уравнение для функционала качества,

$$\dot{x}_i = f_i(x, u), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

2. Составляем функцию Гамильтона

$$H = \psi V = \sum_{i=0}^n \psi_i V_i.$$

3. Записываем систему сопряженных уравнений

$$\frac{d\psi_i}{dt} = - \sum_{j=0}^n \psi_j \frac{dV_j}{dx_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

из которой определяет вспомогательные функции ψ_i .

4. Найденные значения ψ_i и значения $V_i = x_i$ подставляет в выражение для H и из системы уравнений

$$\partial H/\partial u_j = 0, \quad j = 1, \dots, r$$

находим значение управляющего воздействия u ($u_1, u_2, \dots, u_r$), максимизирующего функцию H . Максимум функции H возможно и на границе допустимых управлений, где отдельные производные $\partial H/\partial u_i$ не обращаются в нуль.

5. Полученное значение u подставляем в уравнение объекта

$$\dot{x}_i = f_i(x, u), \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

решаем его и находим x ($x_0, x_1, \dots, x_n$), т. е. значение функционала качества $x_0(t_k) = Q$ и оптимальную траекторию $x_1, \dots, x_n$.

Таким образом, при использовании принципа максимума вариационная задача нахождения функции u , экстремизирующей функцио-

нал Q , заменяется более простой задачей определения управления u , доставляющего максимум вспомогательной функции — функции Гамильтона H . Отсюда следует и название метода — *принцип максимума*.

Основная сложность при применении принципа максимума состоит в том, что не известны начальные значения $\psi(0)$ вспомогательной функции ψ . Обычно задаются произвольными начальными значениями $\psi(0)$, решают совместно уравнения объекта и сопряженные уравнения и получают оптимальную траекторию, которая, как правило, проходит мимо заданной конечной точки (см. рис. 11.14, б). Методом последовательных приближений посредством задания различных начальных значений $\psi(0)$ находят оптимальную траекторию, проходящую через заданную конечную точку.

Принцип максимума является необходимым и достаточным условием только для линейных объектов. Для нелинейных объектов он представляется только необходимым условием. В этом случае с его помощью находится суженная группа допустимых управлений, среди которых, например перебором, находится оптимальное управление, если вообще оно существует.

11.3. Оптимальные по быстродействию системы автоматического управления

Задача об оптимальном быстродействии и метод ее решения

Повышение быстродействия САУ является актуальной задачей. Уменьшение времени переходных процессов следящих систем позволяет за более короткий срок обрабатывать задающие воздействия, например поворачивать антенну РЛС на заданный угол, изменять частоту настройки радиопередающего и радиоприемного трактов РЛС, устранять начальное рассогласование при управлении полетом ракеты, т. е. увеличение быстродействия систем способствует повышению эффективности радиоэлектронной техники. Повышение быстродействия систем управления летательными аппаратами дает возможность увеличить их маневренность. Сокращение продолжительности переходных процессов систем управления техническими объектами, роботами, и технологическими процессами ведет к повышению производительности труда.

В линейных системах автоматического управления повышение быстродействия может быть достигнуто с помощью корректирующих устройств. Например, уменьшение влияния на переходный процесс постоянной времени апериодического звена с передаточной функцией $k/(T_p + 1)$ возможно за счет включения последовательного дифференцирующего устройства с передаточной функцией $k_1 (T_1 p + 1)/(T_2 p + 1)$, где $T_1 = T$, $T_2 \ll T_1$. Эффективными методами повышения быстродействия следящих систем являются методы подавления начальных значений медленно затухающих компонент переходного процесса систем и минимизации квадратичных интегральных оценок с помощью связей по задающему воздействию [18, 21]. Однако эффект улучшения

переходного процесса в реальных системах зависит от степени ограничения координат (нелинейностей) системы. Производные от внешних воздействий, обычно значительные по величине и кратковременные по длительности, ограничиваются элементами системы и не вызывают желаемого эффекта форсировки в переходном режиме. Лучшие результаты при решении задачи повышения быстродействия САУ при наличии ограничений дает управление, *оптимальное по быстродействию*.

Задача об оптимальном быстродействии явилась первой задачей теории оптимального управления. Она сыграла большую роль в открытии одного из основных методов теории оптимального управления — принципа максимума. Эта задача, являясь частным случаем задачи оптимального управления, состоит в определении такого допустимого управляющего воздействия, под влиянием которого управляемый объект (процесс) переходит из начального фазового состояния H в конечное K за минимальное время. *Критерием оптимальности в данной задаче является время.*

При решении частной задачи обеспечения минимума времени переходного процесса, как отмечалось, $G(x, u) = f_0(x, u) = 1$ и для определения H можно воспользоваться формулой (11.10) вместо (11.11), а также n -мерным пространством вместо $(n + 1)$ -мерного пространства. В этом случае уравнения движения объекта можно записать в виде

$$dx_i/dt = f_i(x, u) = \partial H / \partial \psi_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (11.20)$$

а сопряженные уравнения (11.15) и (11.18) принимают вид

$$d\psi_i/dt = - \sum_{j=1}^n \psi_j dV_j/dx_i = - \partial H / \partial x_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (11.21)$$

Пример 1. Управляемым объектом является двигатель постоянного тока, структурная схема которого изображена на рис. 11.15. Управляющим воздействием u является напряжение на якоре, а управляемой величиной x_1 — угол поворота вала. Требуется найти управляющее напряжение, обеспечивающее поворот якоря двигателя за минимальное время от начального положения $x_1(0) = 0$, $dx_1(0)/dt = 0$ в конечное положение $x_1(t_k) = x_k$, $dx_1(t_k)/dt = 0$. При этом на управляющее напряжение наложено ограничение $|u| \leq U_{\max}$. Решаем задачу по плану, намеченному в п. 11.2.

1. В соответствии со структурной схемой записываем уравнение объекта

$$Tp^2 x_1 + px_1 = ku, \quad p = d/dt,$$

или

$$T\ddot{x}_1 + \dot{x}_1 = ku.$$

Вводим обозначение $\dot{x}_1 = x_2$ и записываем уравнения объекта в виде уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 = V_1; \\ \dot{x}_2 &= -(1/T)x_2 + (k/T)u = V_2. \end{aligned}$$

2. Находим функцию Гамильтона

$$H = \psi V = \sum_{i=1}^n \psi_i V_i = \psi_1 x_2 + \psi_2 [-(1/T)x_2 + (k/T)u].$$

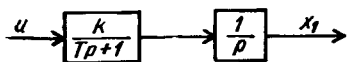


Рис. 11.15. Структурная схема двигателя постоянного тока.

3. Составляем сопряженные уравнения в соответствии с формулой (11.21):

$$\frac{d\psi_1}{dt} = - \left[\psi_1 \frac{dV_1}{dx_1} + \psi_2 \frac{dV_2}{dx_1} \right] = - \left[\psi_1 \frac{dx_2}{dx_1} + \psi_2 \frac{d(-x_2/T + ku/T)}{dx_1} \right] = 0; \quad (11.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_2}{dt} &= - \left[\psi_1 \frac{dV_1}{dx_2} + \psi_2 \frac{dV_2}{dx_2} \right] = - \left[\psi_1 \frac{dx_2}{dx_2} + \psi_2 \frac{d(-x_2/T + ku/T)}{dx_2} \right] = \\ &= -\psi_1 + \psi_2/T. \end{aligned} \quad (11.23)$$

В соответствии с сопряженным уравнением (11.22) $\psi_1 = \text{const} = C_1$. Подставив значение $\psi_1 = C_1$ в уравнение (11.23), получим уравнение

$$d\psi_2/dt - \psi_2/T = -C_1,$$

решение которого

$$\psi_2 = C_2 + C_3 e^{t/T}.$$

4. Подставляем полученные значения ψ_1 и ψ_2 в выражение для H :

$$H = C_1 x_2 + (C_2 + C_3 e^{t/T}) (ku/T - x_2/T).$$

5. Находим закон изменения u , при котором H достигает максимального значения, т. е. достигается оптимальность по быстродействию. Записываем условие оптимальности

$H = C_1 x_2 - (C_2 + C_3 e^{t/T}) x_2/T + (C_2 + C_3 e^{t/T}) ku/T = \text{max}$, откуда видно, что H представляет собой линейную функцию переменной u и поэтому для определения u нет необходимости находить и приравнять нулю производную dH/du . От управления u зависит только третье слагаемое последнего выражения $H_u = (C_2 + C_3 e^{t/T}) ku/T$, поэтому $H = \text{max}$, когда $H_u = \text{max}$.

Функция H_u будет максимальной при максимальном значении управляющего воздействия:

$$u = U_{\text{max}}, \text{ если } (C_2 + C_3 e^{t/T}) > 0; \quad u = -U_{\text{max}}, \text{ если } (C_2 + C_3 e^{t/T}) < 0;$$

или

$$u = U_{\text{max}} \text{ sign } \psi_2 = U_{\text{max}} \text{ sign } (C_2 + C_3 e^{t/T}),$$

т. е. оптимальное управление является кусочно-постоянной (релейной) функцией, принимающей значения $\pm U_{\text{max}}$.

На рис. 11.16, а изображен график функции $\psi_2 = C_2 + C_3 e^{t/T}$ для случая $C_2 > 0$, $C_3 < 0$, а на рис. 11.16, б — закон изменения управляющего напряжения u , при котором обеспечивается оптимальное по быстродействию управление. Из рисунка видно, что кривая ψ_2 один раз меняет знак, следовательно, оптимальное управляющее воздействие содержит два интервала управления, в течение которых $u = \text{const} = \pm U_{\text{max}}$. В соответствии с физическим смыслом на первом интервале $0 \leq t < t_1$ управление $u = U_{\text{max}}$ обеспечивает разгон двигателя, а на втором интервале

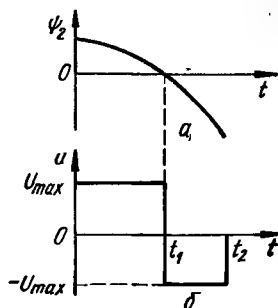


Рис. 11.16. График функции ψ_2 (а) и закон изменения управляющего воздействия (б).

$t_1 \leq t < t_2$ управление $u = -U_{\max}$ — его торможение. В момент t_2 двигатель останавливается. Методика определения моментов переключения t_1, t_2 рассматривается в данной главе.

Теорема об n интервалах

Из рассмотренного примера следует, что для достижения максимального быстродействия необходимо на вход объекта подавать предельно допустимое управляющее воздействие, изменяющееся по релейному закону. Убедимся в этом на простейших примерах из физических соображений.

Пусть имеем апериодическое звено с передаточной функцией $k/(Tp + 1)$, на входе которого управляющее воздействие u ограничено по величине значением $U_{\max}$ (рис. 11.17, а). Такое звено может быть упрощенной математической моделью двигателя постоянного тока, на вход которого поступает напряжение, ограниченное значением $U_{\max}$, а выходной величиной является угловая частота $x = \omega$. Требуется обеспечить изменение выходной величины (угловой скорости двигателя), например, от нуля до некоторого значения $x_{\text{ст}}$ за минимальное время. Если $u = \text{const}$, то при нулевых начальных условиях $x(0) = 0$ изменение x (разгон двигателя) осуществляется по экспоненциальному закону $x = ku(1 - e^{-t/T})$.

Ясно, что для достижения возможно быстрого изменения x необходимо на вход звена подать предельное значение сигнала $U_{\max}$ и удерживать его значение до момента t_1 , пока x не достигнет заданного значения $x_{\text{ст}}$ (рис. 11.17, б). В момент времени t_1 следует мгновенно уменьшить u от $U_{\max}$ до $u_{\text{ст}} = x_{\text{ст}}/k$, соответствующего установившемуся значению $x = x_{\text{ст}}$. Переходный процесс заканчивается в момент времени t_1 . При $T = \text{const}$ и $x_{\text{ст}} = \text{const}$ длительность переходного процесса t_1 зависит от значения $U_{\max}$.

При подаче на вход интегрирующего звена с передаточной функцией k/p постоянного по величине воздействия u (рис. 11.18, а) выходная величина звена изменяется по линейному закону $x = kut$. Для возможно быстрого изменения x от $x(0)$ до $x_{\text{ст}}$ следует, очевидно, на вход звена подать предельное значение управляющего воздействия $u = U_{\max}$ и поддерживать его до момента t_1 , когда x достигнет значения $x_{\text{ст}}$. В момент t_1 управляющее воздействие u необходимо скачком уменьшить от $U_{\max}$ до 0 (рис. 11.18, б).

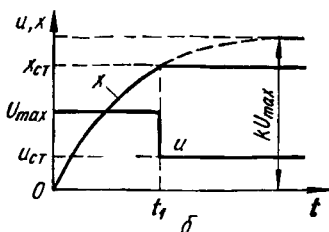
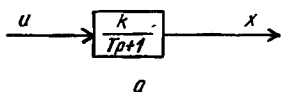


Рис. 11.17. Пример оптимального по быстродействию управления объектом, представляемым апериодическим звеном.

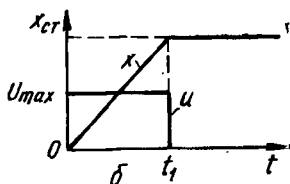
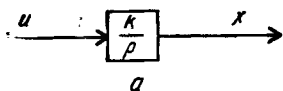


Рис. 11.18. Пример оптимального по быстродействию управления объектом, представляемым интегрирующим звеном.

Таким образом, если объект описывается уравнением первого порядка, то процесс управления в оптимальном по быстродействию переходном режиме состоит из одного интервала $0 - t_1$.

Рассмотрим два аperiodических звена, соединенных последовательно (рис. 11.19, а), управляющее воздействие u ограничено значением $U_{\max}$. Такое соединение звеньев может представлять собой математическую модель электромашинного усилителя мощности (ЭМУ), модель двигателя постоянного тока, когда за выходную величину x принимается угловая частота ω его ротора и др.

Для возможно быстрого изменения x (разгона двигателя) от $x(0) = 0$ до $x_{\text{ст}}$ следует, очевидно, на вход второго звена, как и в случае одного аperiodического звена (см. рис. 11.17), подать скачком максимальный по своему значению сигнал u_{1m} . Однако

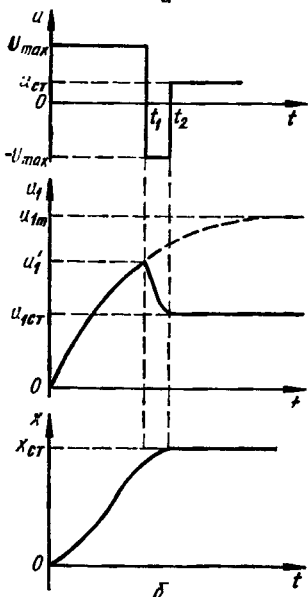
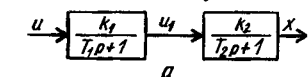


Рис. 11.19. Пример оптимального по быстродействию управления объектом, представляемым двумя аperiodическими звеньями.

сигнал u_1 снимается с выхода первого аperiodического звена, поэтому вследствие инерционности этого звена u_1 не может быть изменен скачком от 0 до u_{1m} . Чтобы сигнал u_1 был предельно близок по форме к оптимальному управляющему сигналу, на вход первого звена следует подавать скачком $U_{\max}$, что обеспечивает максимально быстрый рост u_1 в направлении его предельного значения u_{1m} (рис. 11.19, б). При достижении $x = x_{\text{ст}}$ сигнал u_1 следовало бы скачком уменьшить до значения $u_{1\text{ст}} = x_{\text{ст}}/k_2$, соответствующего требуемой установившейся величине $x_{\text{ст}}$. Однако изменить u_1 скачком нельзя из-за инерционности первого звена. Для возможно быстрого уменьшения u_1 до $u_{1\text{ст}}$ необходимо управляющее воздействие u предварительно, в момент времени t_1 , когда x еще не достигло значения $x_{\text{ст}}$, переключить с $+U_{\max}$ на $-U_{\max}$ и сохранить это значение до момента t_2 , пока u_1 не снизится от значения u_1' в момент t_1 до значения $u_{1\text{ст}}$ и x не достигнет величины $x_{\text{ст}}$. В момент времени t_2 следует u мгновенно изме-

нить до $u_{ст} = u_{1ст}/k_1$. На этом переходный процесс заканчивается.

Таким образом, для достижения оптимального по быстродействию переходного процесса последовательного соединения двух звеньев первого порядка с вещественными отрицательными корнями характеристического уравнения ($p_1 = -1/T_1$; $p_2 = -1/T_2$) процесс управления должен состоять из двух интервалов, в каждом из которых управляющее воздействие u принимает одно из двух своих предельных значений $\pm U_{\max}$: на первом интервале $0 - t_1 u = +U_{\max}$, на втором интервале $t_1 - t_2 u = -U_{\max}$. Знак u в первом интервале совпадает со знаком конечного значения $u_{ст}$.

Аналогично можно показать, что в общем случае для достижения оптимальности по быстродействию n последовательно соединенных линейных звеньев первого порядка, или линейного объекта n -го порядка, с вещественными отрицательными или нулевыми корнями характеристического уравнения при наличии ограничения управляющего воздействия процесс управления должен состоять из n интервалов, в каждом из которых управляющее воздействие принимает свое предельное значение, т. е. закон оптимального управления является релейным. В конце каждого интервала происходит переключение знака управляющего воздействия. Знак u в первом интервале определяется направлением изменения управляемой величины x .

При ненулевых начальных условиях число интервалов управления может быть меньше n . Действительно, если, например, в момент начала процесса управления значения управляемой величины x и ее производных оказались такими, как в конце k -го интервала управления для случая нулевых начальных условий, то процесс управления будет состоять только из $(n - k)$ интервалов.

Приведенное положение о числе интервалов управления носит название *теоремы об n интервалах*. Она была впервые сформулирована и доказана А. А. Фельдбаумом в 1949 г. [75].

Докажем теорему об n интервалах с помощью принципа максимума Понтрягина. Пусть объект описывается системой уравнений

$$dx_i/dt = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) + b_i u, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (11.24)$$

или в векторной форме

$$dx/dt = \varphi(x) + bu, \quad (11.25)$$

где u — управляющее воздействие; $x(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\varphi(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$, $b(b_1, b_2, \dots, b_n)$ — соответствующие векторы. Функции φ_i считаем дифференцируемыми. Управляющее воздействие ограничено по величине $|u| = U_{\max}$.

Согласно формуле (11.10) и учитывая, что $dx/dt = \varphi(x) + bu = V$, гамильтониан

$$H = \psi V = \psi[\varphi(x) + bu] = \psi\varphi(x) + \psi bu. \quad (11.26)$$

Так как от управляющего воздействия u зависит только второе слагаемое, то с учетом ограничения на u максимум H будет при

$$u = U_{\max} \operatorname{sign} b\psi = \operatorname{sign} \sum_{i=1}^n b_i \psi_i, \quad (11.27)$$

т. е. оптимальное по быстродействию управление для общего случая нелинейного объекта, описываемого уравнением (11.25), имеет релейный характер.

Для линейного объекта уравнения (11.24) принимают вид

$$dx_i/dt = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_i u, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (11.28)$$

Сопряженные уравнения, согласно формуле (11.21),

$$d\psi_i/dt = - \sum_{k=1}^n \psi_k dV_k/dx_i.$$

Учитывая, что

$$dV_k/dx_i = \frac{d}{dx_i} \left(\frac{dx_k}{dt} \right) = \frac{d}{dx_i} \left(\sum_{j=1}^n a_{kj}x_j + b_k u \right) = a_{ki},$$

сопряженные уравнения примут вид

$$d\psi_i/dt = - \sum_{k=1}^n a_{ki}\psi_k, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (11.29)$$

Если все корни характеристического уравнения объекта, соответствующего дифференциальным уравнениям (11.28), вещественны, то и все корни характеристического уравнения, соответствующего сопряженным уравнениям (11.29), также вещественны. Решение уравнений (11.29) в этом случае имеет вид суммы экспоненциальных составляющих

$$\psi_i(t) = \sum_{j=1}^n C_{ij} e^{\alpha_j t}, \quad (11.30)$$

где α_j — вещественные числа (корни характеристического уравнения), C_{ij} — постоянные интегрирования (начальные значения экспонент).

В соответствии с формулой (11.27), оптимальное управление в случае линейного объекта определяется выражением

$$u = U_{\max} \operatorname{sign} \sum_{i=1}^n b_i \sum_{j=1}^n C_{ij} e^{\alpha_j t} = U_{\max} \operatorname{sign} \sum_{j=1}^n B_j e^{\alpha_j t}, \quad (11.31)$$

где $B_j = \sum_{i=1}^n b_i C_{ij}$.

Поскольку сумма n экспонент, входящих в формулу (11.31), может переходить через нуль не более $(n-1)$ раз, то число интервалов управления будет не более n , что и требовалось доказать.

В том случае, когда ограничено не только управляющее воздействие u , но еще и некоторые промежуточные переменные, число интервалов k оптимального управления будет больше n [81]:

$$k = [(n-m)+1][(m-l)+1] \dots - 1, \quad (11.32)$$

где n — порядок характеристического уравнения объекта, связывающего x с u ; m, l — порядок уравнений, связывающих x с соответствующими

ющими промежуточными ограничениями по величине переменными.

Пусть, например, имеем объект второго порядка (см. рис. 11.19, а) и кроме задающего воздействия u ограничена еще промежуточная переменная u_1 значением $U_{1\max}$ (рис. 11.20). Чтобы u_1 не превысила допустимого значения $U_{1\max}$, в момент t_1 u уменьшается от $U_{\max}$ до $u' = U_{1\max}/k_1$ и значение u' поддерживается до очередного момента t_2 изменения знака u . После этого u_1 начнет изменяться в другом направлении. Таким образом, создается новый интервал управления $t_1 - t_2$ с пониженным значением управляющего воздействия на вход объекта, вследствие чего длительность переходного процесса увеличивается по сравнению с отсутствием ограничения u_1 .

Как видно из рис. 11.20, число интервалов управления в рассматриваемом случае $k = 3$, что соответствует также значению k , полученному с помощью формулы (11.32):

$$k = (2 - 1 + 1)(1 - 0 + 1) - 1 = 3.$$

Теорема об n интервалах значительно облегчает нахождение оптимального управляющего воздействия, так как она исключает необходимость определения функций ψ_i и их анализа.

Если характеристическое уравнение управляемого объекта содержит комплексные корни, то число переключений в зависимости от начальных условий может быть любым, поэтому теорема об n интервалах в этом случае не может быть использована [75].

С помощью оптимального по быстродействию управления возможно решение задачи не только быстрой отработки задания, но и устранения за минимальное время отклонения управляемой величины объекта, вызванного возмущающими воздействиями.

Определение моментов переключения управляющего воздействия при оптимальном по быстродействию управлении линейными объектами

В соответствии с теоремой об n интервалах оптимальное по быстродействию управление объектом n -порядка с отрицательными вещественными или нулевыми корнями характеристического уравнения состоит из n интервалов, в каждом из которых управляющее воздействие

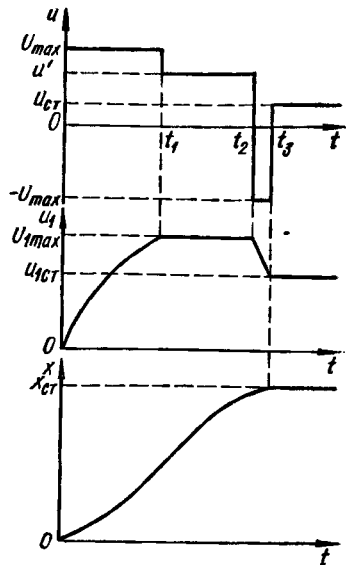


Рис. 11.20. Пример оптимального по быстродействию управления объектом второго порядка при ограничении u и u_1 .

принимает свое предельное значение U_m , а знаки этого воздействия в конце интервалов переключаются.

Для технической реализации управляющего устройства, с помощью которого вырабатывается оптимальное по быстродействию управляющее воздействие u , необходимо знать предельное значение этого воздействия U_m и n моментов (включая момент окончания управления) переключения $t_1, t_2, \dots, t_n$. Предельное значение U_m определяется с учетом предельно допустимых эксплуатационных режимов управляемого объекта. Более сложной задачей является определение моментов переключения управляющего воздействия, которые зависят от многих факторов: параметров объекта (постоянных времени, коэффициента усиления и др.), от вектора состояния в начальной x_n и конечной x_k точках фазовой траектории, допустимого предельного управляющего воздействия U_m , от вектора возмущающих воздействий L . Для упрощения этой задачи будем искать моменты переключения как функции x_n и x_k при отсутствии возмущающих воздействий и неизменных параметрах системы.

Пусть управляемый объект описывается дифференциальным уравнением n -го порядка

$$c_n \frac{d^n x}{dt^n} + c_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + c_0 x = k U_m. \quad (11.33)$$

Считаем, что корни характеристического уравнения $c_n p^n + c_{n-1} p^{n-1} + \dots + c_0 = 0$ вещественные отрицательные и не кратные. Начальное состояние объекта при $t = 0$ характеризуется вектором $x_n = (x_0, \dot{x}_0, \dots, x_0^{(n-1)})$, конечное при $t = t_k$ вектором $x_k = (x_n, \dot{x}_n, \dots, x_n^{(n-1)})$. Требуется за минимальное время перевести вектор состояния из x_n в x_k . Как известно, для этого нужно n интервалов управления. На интервалах управления $|u| = U_m$, а знаки чередуются $(n - 1)$ раз, следовательно, требуется определить n моментов переключения, включая время окончания управления.

Для определения моментов переключения воспользуемся методом стыкования решений дифференциальных уравнений со знакопеременной правой частью [48]. Решение уравнения (11.33) имеет вид

$$x(t) = A_0 + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots + A_n e^{p_n t}, \quad (11.34)$$

где p_i — i -й корень характеристического уравнения; A_i — i -я постоянная интегрирования — начальное значение i -й компоненты переходного процесса. Так как в начале каждого интервала скачком изменяется управляющее воздействие, то и значения $A_0, A_1, \dots, A_n$ также будут изменяться скачком при переходе от одного интервала к другому.

Для решения поставленной задачи необходимо предварительно найти значения постоянных интегрирования на каждом интервале управления. Сперва определим постоянные интегрирования $A_{n1}, A_{n2}, \dots$

* Впредь для простоты записи предельное значение управляющего воздействия вместо $U_{\max}$ будем обозначать U_m .

моментами переключения $t_1, t_2, \dots, t_n$. Эти моменты переключения из системы трансцендентных уравнений можно определять одним из численных методов.

Пример 2. Определить моменты переключения оптимального по быстродействию управления объектом, структурная схема которого изображена на рис. 11.19, а. Согласно схеме

$$k/(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) = x(t)/U_m,$$

откуда уравнение объекта

$$[T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2)p + 1]x(t) = \pm kU_m, \quad p \equiv d/dt,$$

или

$$T_1 T_2 d^2 x(t)/dt^2 + (T_1 + T_2) dx(t)/dt + x(t) = \pm kU_m, \quad (11.38)$$

т. е. объект описывается уравнением второго порядка ($n = 2$). Корни характеристического уравнения $p_1 = -1/T_1$; $p_2 = -1/T_2$. Согласно теореме об n интервалах управляющее воздействие должно состоять из двух интервалов. Конец второго интервала (конец переходного процесса) обозначим через t_2 , а момент переключения t_1 (см. рис. 11.19, б). Вектор управляемой величины в начальный момент времени (при $t = 0$) $x_n = (x_0, \dot{x}_0)$; $x_0 = 0$; $\dot{x}_0 = 0$, в конечный момент времени (при $t = t_2$) $x(t_2) = x_k = (x_2, \dot{x}_2)$; $x_2 = x_{2k}$; $\dot{x}_2 = 0$.

Управляющее воздействие принимаем максимально возможным $|u| = \pm U_m$, на первом интервале $+U_m$, на втором интервале $-U_m$.

Решение уравнения динамики (11.38)

$$x(t) = A_0 + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}, \quad (11.39)$$

где $A_0 = \pm kU_m$.

Дифференцируя по времени, получаем

$$\dot{x}(t) = p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t}. \quad (11.40)$$

В данном случае $n = 2$, поэтому первая производная $\dot{x}(t)$ является $(n - 1)$ -й производной.

Решение (11.39) и ее производная (11.40) на втором интервале управления ($t_1 \leq t < t_2$) принимают вид:

$$x(t) = A_{20} + A_{21} e^{p_1 t} + A_{22} e^{p_2 t}; \quad (11.41)$$

$$\dot{x}(t) = p_1 A_{21} e^{p_1 t} + p_2 A_{22} e^{p_2 t}, \quad (11.42)$$

где $A_{20} = -kU_m$, так как на последнем интервале управляющее воздействие отрицательно.

Запишем решение (11.41) и ее производную (11.42) на момент t_2 окончания управления в переходном режиме и приравняем их соответствующим заданным координатам вектора $x(t_2) = x_k = (x_2, \dot{x}_2)$; $x_2 = x_{2k}$; $\dot{x}_2 = 0$:

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= A_{20} + A_{21} e^{p_1 t_2} + A_{22} e^{p_2 t_2} = x_{2k}; \\ \dot{x}_2 &= p_1 A_{21} e^{p_1 t_2} + p_2 A_{22} e^{p_2 t_2} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.43)$$

Из системы уравнений (11.43) находим постоянные интегрирования, соответствующие второму интервалу управления:

$$A_{21} = -\frac{(x_{2k} + kU_m) p_2}{(p_1 - p_2) e^{p_1 t_2}}; \quad A_{22} = \frac{(x_{2k} + kU_m) p_1}{(p_1 - p_2) e^{p_2 t_2}}. \quad (11.44)$$

Управляемая величина (11.39) и ее производная (11.40) на первом интервале управления ($0 \leq t < t_1$) изменяются в соответствии с выражениями:

$$x(t) = A_{10} + A_{11} e^{p_1 t} + A_{12} e^{p_2 t}; \quad (11.45)$$

$$\dot{x}(t) = p_1 A_{11} e^{p_1 t} + p_2 A_{12} e^{p_2 t}, \quad (11.46)$$

где $A_{10} = kU_m$, так как первый интервал управления положительный.

Стыкуем решение (11.41) и (11.45), (11.42) и (11.46) на момент переключения t_1 :

$$\left. \begin{aligned} (A_{11} - A_{21}) e^{p_1 t_1} + (A_{12} - A_{22}) e^{p_2 t_1} &= -2kU_m; \\ p_1 (A_{11} - A_{21}) e^{p_1 t_1} + p_2 (A_{12} - A_{22}) e^{p_2 t_1} &= 0, \end{aligned} \right\}$$

откуда находим

$$\begin{aligned} A_{11} - A_{21} &= \frac{2p_2 k U_m}{(p_1 - p_2) e^{p_1 t_1}}; \\ A_{12} - A_{22} &= -\frac{2p_1 k U_m}{(p_1 - p_2) e^{p_2 t_1}}. \end{aligned} \quad (11.47)$$

Запишем решение (11.45) и ее первую производную (11.46) на момент $t = 0$ и приравняем их соответствующим начальным значениям координат $x_0 = 0$ и $\dot{x}_0 = 0$ вектора x_H :

$$x_0 = A_{10} + A_{11} + A_{12} = 0;$$

$$\dot{x}_0 = p A_{11} + p_2 A_{12} = 0,$$

откуда определим постоянные интегрирования на первом интервале управления

$$A_{11} = kU_m p_2 / (p_1 - p_2); \quad A_{12} = -kU_m p_1 / (p_1 - p_2). \quad (11.48)$$

Подставив значения постоянных интегрирования из формул (11.44) и (11.48) в их разности (11.47), получим систему трансцендентных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} [1 + x_{2K}/kU_m] e^{-p_1 t_2} - 2e^{-p_1 t_1} + 1 &= 0; \\ [1 + x_{2K}/kU_m] e^{-p_2 t_2} - 2e^{-p_2 t_1} + 1 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (11.49)$$

из которой одним из численных методов определяются моменты переключения t_1 и t_2

Рассмотрим численный графо-аналитический метод определения моментов переключения, точность которого обычно удовлетворяет инженерным приложениям. Подставив значения корней $p_1 = -1/T_1$ и $p_2 = -1/T_2$ в систему уравнений (11.49), получаем

$$\left. \begin{aligned} [1 + x_{2K}/kU_m] e^{t_2/T_1} - 2e^{t_1/T_1} + 1 &= 0; \\ [1 + x_{2K}/kU_m] e^{t_2/T_2} - 2e^{t_1/T_2} + 1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.50)$$

Решив эти уравнения относительно t_1 , находим

$$\left. \begin{aligned} t_1 = f_1(t_2) &= T_1 \ln \{ [(1 + x_{2K}/kU_m) e^{t_2/T_1} + 1] / 2 \}; \\ t_1 = f_2(t_2) &= T_2 \ln \{ [(1 + x_{2K}/kU_m) e^{t_2/T_2} + 1] / 2 \}. \end{aligned} \right\} \quad (11.51)$$

Задаваясь значениями t_2 , определяем с помощью полученных формул t_1 и строим кривые $t_1 = f_1(t_2)$ и $t_1 = f_2(t_2)$ (рис. 11.21). Значения t_1 и t_2 , соответствующие точке пересечения кривых, и являются искомыми моментами переключения.

Пусть, например, $T_1 = 0,1$ с; $T_2 = 0,066$ с; $p_1 = -10$; $p_2 = -15,15$; $x_{2K} = 28$ ед; $U_m = 35$ ед; $k = 2$. Если объектом, структурная схема которого изображена на рис. 11.19, а, является электродвигатель постоянного тока, то $x_{2K} = \omega = 28$ рад/с, $U_m = 35$ В, $k = 2$ рад/В с.

Подставив эти значения в систему уравнений (11.50), получим:

$$1,4e^{10t_2} - 2e^{10t_1} + 1 = 0;$$

$$1,4e^{15,15t_2} - 2e^{15,15t_1} + 1 = 0,$$

откуда:

$$t_1 = f_1(t_2) = 0,1 \ln (0,7e^{10t_2} + 0,5);$$

$$t_1 = f_2(t_2) = 0,066 \ln (0,7e^{15,15t_2} + 0,5).$$

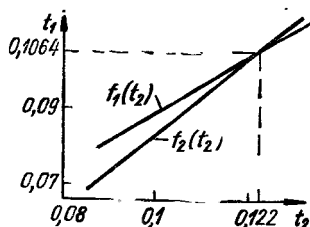


Рис. 11.21. Графический метод определения моментов переключения.

Точка пересечения кривых $f_1(t_2)$ и $f_2(t_2)$ дает искомые значения моментов переключения: $t_1 = 0,1054$ с; $t_2 = 0,122$ с.

В момент t_2 вектор управляемой величины принимает требуемое значение $x(t_2) = x_k = (x_2, x_2)$, где $x_2 = x_{2к}$; $x_2 = 0$. С изменением управляющего воздействия скачком от $-U_m$ до нуля в момент t_2 переходный процесс заканчивается. Для поддержания достигнутого во время переходного процесса требуемого значения управляемой величины ($x_2 = x_{2к}$, $x_2 = 0$) на вход объекта следует подавать, начиная с момента t_2 , постоянное управляющее воздействие $u_{ст} = x_{2к}/k_1k_2$. В общем случае после переходного процесса на вход управляемого объекта подается управляющее воздействие, обеспечивающее необходимое изменение управляемой величины.

Построение оптимального переходного процесса

Чтобы построить оптимальный переходный процесс на первом интервале управления ($0 \leq t \leq t_1$), следует в выражение (11.45) подставить значения постоянных интегрирования из (11.48)

$$x(t) = \left(1 + \frac{p_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} - \frac{p_1}{p_1 - p_2} e^{p_2 t}\right) kU_m,$$

или после подстановки численных значений

$$x(t) = (1 - 3e^{-10t} + 2e^{-15,15t}) 70. \quad (11.52)$$

Расчеты $x(t)$ для первого интервала времени $0 \leq t < 0,1054$ сведены в табл. 11.2.

Из таблицы видно, что при $t_1 = 0,1054$ с, $x(t) = x_{1к} = 25,1623$. Для последующих расчетов потребуется также знание производной от $x(t)$ в конце первого интервала:

$$\begin{aligned} x_{1к} &= \left(\frac{p_1 p_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t_1} - \frac{p_1 p_2}{p_1 - p_2} e^{p_2 t_1}\right) kU_m = \\ &= (30 e^{-10 \cdot 0,1054} - 30 e^{-15,15 \cdot 0,1054}) 70 = 306,598 \text{ ед/с.} \end{aligned}$$

Оптимальный процесс на втором интервале $t_1 \leq t < t_2$ или $0 \leq t < t_2 - t_1$ описывается уравнением (11.41). Условно принимаем момент переключения t_1 за начало отсчета, тогда $x(0) = x_{1к}$; $dx/dt|_{t=0} = \dot{x}_{1к}$ и в соответствии с уравнениями (11.41) и (11.42) при $t = 0$

Таблица 11.2. К расчету $x(t)$

$t, \text{с}$	0	0,02	0,04	0,06	0,08	0,100	0,1054
e^{-10t}	1	0,8187	0,6703	0,5488	0,4493	0,3679	0,3485
$e^{-15,15t}$	1	0,7386	0,5455	0,4029	0,2976	0,2198	0,2025
$x(t)$	0	1,4704	5,6068	11,1593	17,3051	23,5185	25,1623

получаем:

$$x_{1к} = A_{20} + A_{21} + A_{22};$$

$$x_{1к} = p_1 A_{21} + p_2 A_{22},$$

где $A_{20} = -kU_m$, откуда находим постоянные интегрирования:

$$A_{22} = \frac{p_1}{p_1 - p_2} (x_{1к} + kU_m) - \frac{\dot{x}_{1к}}{p_1 - p_2};$$

$$A_{21} = -\frac{p_2}{p_1 - p_2} (x_{1к} + kU_m) + \frac{\dot{x}_{1к}}{p_1 - p_2}.$$

Подставив полученные значения A_{21} и A_{22} в уравнение (11.41), получим решение на втором интервале управления:

$$\begin{aligned} x(t) = & -kU_m + \left[-\frac{p_2}{p_1 - p_2} (x_{1к} + kU_m) + \frac{\dot{x}_{1к}}{p_1 - p_2} \right] e^{p_1 t} + \\ & + \left[\frac{p_1}{p_1 - p_2} (x_{1к} + kU_m) - \frac{\dot{x}_{1к}}{p_1 - p_2} \right] e^{p_2 t} = -kU_m + \\ & + [(p_1 e^{p_2 t} - p_2 e^{p_1 t}) (x_{1к} + kU_m) + \dot{x}_{1к} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t})] \frac{1}{p_1 - p_2}, \quad (11.53) \end{aligned}$$

или после подстановки конкретных значений $x_{1к}$, $\dot{x}_{1к}$ и других величин

$$\begin{aligned} x(t) = & -70 + [(-10e^{-15,15t} + 15e^{-10t})(25,162 + 70) + \\ & + 306,598(e^{-10t} - e^{-15,15t})](-0,2). \end{aligned}$$

Второй интервал очень мал ($\Delta t = t_2 - t_1 = 0,122 - 0,1054 = 0,0166$ с), поэтому можно определить $x(t)$ только для одного конечного момента времени $t = 0,0166$ с:

$$\begin{aligned} x(t) = & -70 + [(-10e^{-15,15 \cdot 0,0166} + 15e^{-10 \cdot 0,0166}) 95,162 + \\ & + 306,598(e^{-10 \cdot 0,0166} - e^{-15,15 \cdot 0,0166})](-0,2) = 28 \text{ ед.} \end{aligned}$$

Закон изменения оптимального управляющего воздействия $u(t)$ и переходный процесс $x(t)$ представлены на рис. 11.22, а, б (кривая 1) соответственно.

Значение управляющего воздействия $u(t)$, которое должно быть подано скачком на вход объекта в момент t_2 окончания переходного процесса для поддержания достигнутого значения $x(t_2) = x_{2к}$, равно $u_{сг} = x_{2к}/k = 28/2 = 14$ ед.

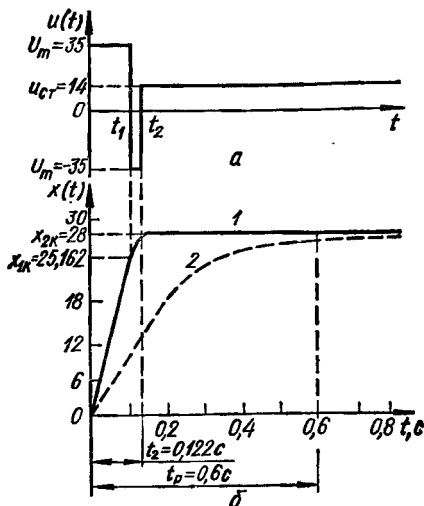


Рис. 11.22. Оптимальный закон изменения управляющего воздействия (а) и кривые переходного процесса (б).

Таблица 11.3. К расчету переходного процесса

t, c	0,05	0,1054	0,2	0,4	0,6	0,8
e^{-10t}	0,6065	0,2025	0,1353	0,01832	$0,2479 \cdot 10^{-2}$	$0,3355 \cdot 10^{-3}$
$e^{-15,15t}$	0,4688	0,3485	0,04832	$0,2334 \cdot 10^{-2}$	$0,1128 \cdot 10^{-3}$	$0,5459 \cdot 10^{-5}$
$x(t)$	3,3063	10,065	19,3375	26,5922	27,7981	27,9721

С целью сравнения рассчитаем переходной процесс и найдем время переходного процесса для случая, когда на вход управляемого объекта (см. рис. 11.19, а) подается не оптимальное управляющее воздействие (рис. 11.22, а), а $u_{ст} = 14$, соответствующее установившемуся значению выходной величины $x_{2к} = 28$ ед.

Переходный процесс в этом случае будет определяться формулой, аналогичной формуле (11.45):

$$x(t) = A_{10} + A_{11}e^{p_1 t} + A_{12}e^{p_2 t},$$

где $A_{10} = ku_{ст}$; $A_{11} = ku_{ст}p_2/(p_1 - p_2)$; $A_{12} = -ku_{ст}p_1/(p_1 - p_2)$, т. е. A_{11} и A_{12} находятся по формулам, аналогичным (11.48).

Подставив значения постоянных времени в выражение для $x(t)$, получим

$$x(t) = \left(1 + \frac{p_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} - \frac{p_1}{p_1 - p_2} e^{p_2 t}\right) ku_{ст},$$

или после подстановки численных значений параметров

$$x(t) = (1 - 3e^{-10t} + 2e^{-15,15t}) \cdot 28.$$

Рассчитанные значения $x(t)$ для различных t приведены в табл. 11.3.

Кривая переходного процесса, построенная по данным табл. 11.3, изображена на рис. 11.22, б (кривая 2). Из рисунка видно, что время переходного процесса $t_p = 0,6$ с, т. е. оно в $t_p/t_2 = 0,6/0,122 \approx 5$ раз больше, чем в системе, оптимальной по быстродействию.

Оптимальные по быстродействию разомкнутые САУ

Оптимальное по быстродействию управляющее воздействие u вырабатывается с помощью управляющего устройства УУ (рис. 11.23, а). Согласно теореме об n интервалах управляющее воздействие во время переходного процесса принимает только два значения: $u = +U_m$ и $u = -U_m$. Для переключения полярности управляющего воздействия обычно используется релейный элемент РЭ (рис. 11.23, а), характеристика которого (рис. 11.23, б) описывается выражением:

$$u = \begin{cases} U_m, & \text{если } \mu > 0; \\ -U_m, & \text{если } \mu < 0; \\ 0, & \text{если } \mu = 0. \end{cases}$$

для повторяющихся перемещений, то реализация управляющего устройства упрощается. В этом случае можно заранее вычислить продолжительность интервалов управления и задать их в виде программы, которая реализуется программным устройством (рис. 11.25, где *ПУ* — программное устройство, *ИУ* — исполнительное устройство). Если имеется ограниченное число возможных комбинаций начальных и конечных условий, то задача вычислительного устройства заключается в том, чтобы распознать эти условия (тип воздействий) и включить соответствующую им оптимальную программу управления объектом.

Программные системы оптимального управления применяются, например, для вывода космических объектов на орбиту и спуска с нее, в металлорежущих станках с программным управлением, в промышленных роботах с жесткой программой.

Так как в разомкнутых системах для формирования оптимального управляющего воздействия не используются (а потому не контролируются) фазовые координаты объекта, то даже небольшая ошибка во времени переключения, вызванная, например, неточным его вычислением, изменением параметров объекта или влиянием на него возмущающих воздействий, приводит к отклонению от оптимального управления.

Однако даже в тех случаях, когда по указанной причине разомкнутая система управления не удовлетворяет требованиям и не может быть использована, очень полезно на стадии проектирования системы с помощью рассмотренных методов определить оптимальный закон изменения управляющего воздействия, рассчитать оптимальную кривую переходного процесса и выяснить возможности повышения быстродействия, которые дает оптимальное управление.

Оптимальные по быстродействию замкнутые САУ

Указанный выше недостаток, присущий оптимальным разомкнутым системам управления, отсутствует в оптимальных замкнутых системах автоматического управления (рис. 11.26). Для формирования оптимального управляющего воздействия (определения моментов переключения t_i) в этих системах используются выходная величина x и ее производные. Меньшие отклонения от оптимального управления в этих системах достигаются благодаря учету реального состояния объекта в процессе управления. Например, если момент переключения t_1 управляющего воздействия u на входе апериодического звена (см. рис. 11.17) определять с использованием выходной величины x , то переключение всегда будет осуществляться при достижении выходной величиной заданного значения $x_{ст}$, т. е. независимо от изменения начальных условий, параметров объекта, внешних воздействий будет осуществляться оптимальное управление. В разомкнутой же системе любая из перечисленных причин вызывает отклонение управления от оптимального. Например, даже уменьшение постоянной времени звена T вызовет не уменьшение, а увеличение длительности переходного процесса. С уменьшением T кривая изменения $x(t)$ (на рис. 11.27

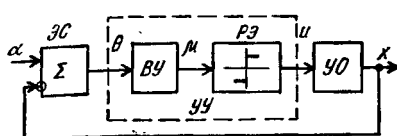
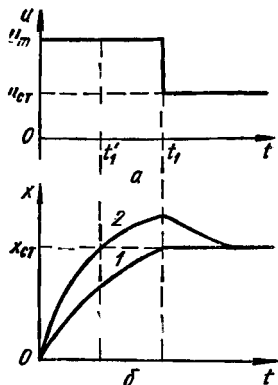


Рис. 11.26. Функциональная схема оптимальной по быстродействию замкнутой системы автоматического управления.

Рис. 11.27. Влияние изменения постоянной времени T апериодического звена на длительность переходного процесса в разомкнутой и замкнутой системах управления.



кривая 2) будет проходить выше кривой 1, соответствующей исходному расчетному значению T , и в момент переключения t_1 $x(t)$ превысит заданное конечное значение $x_{ст}$. Поэтому потребуется дополнительное время, чтобы координата $x(t)$ уменьшилась до значения $x_{ст}$. В замкнутой же системе переключение управляющего воздействия u произойдет не при t_1 , а в момент t'_1 , когда $x(t)$ достигнет значения $x_{ст}$, и следовательно, будет обеспечено максимальное быстродействие при изменении постоянной времени T .

Синтез оптимальной по быстродействию САУ состоит в определении оператора управляющего устройства УУ в виде зависимости u от x , обеспечивающей максимальное быстродействие при данных внешних воздействиях и граничных условиях. Для систем управления объектом второго порядка задачу синтеза УУ проще всего решать с помощью фазовой плоскости. В ряде случаев эта задача может быть решена путем определения для данных внешних воздействий и граничных условий оптимальных функций $u(t)$ и $x(t)$ с последующим исключением из этих функций времени t и нахождением оптимальной зависимости управляющего воздействия через величину x и ее производных $u(t) = u[x(t)]$.

В общем случае задача синтеза УУ решается с помощью метода динамического программирования или принципа максимума. В связи со сложностью задачи прямого синтеза оптимального оператора управляющего устройства $A_{уу}(x)$ отсутствует общий метод ее решения. В 1960 г. советский ученый А. М. Летов разработал наиболее общий подход к решению задачи синтеза аналитического конструирования регулятора [41].

Синтез управляющего устройства замкнутой системы с помощью фазовой плоскости

Методику синтеза рассмотрим на конкретном примере [48, 49]. Пусть управляемым объектом является двигатель постоянного тока, структурная схема которого изображена на рис. 11.15. Двигатель представляется последовательным соединением апериодического и

интегрирующего звеньев и описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$Td^2x_1/dt^2 + dx_1/dt = ku. \quad (11.54)$$

Необходимо повернуть ротор двигателя из начального положения $x_1(0) = 0$, $dx_1(0)/dt = 0$ в конечное положение $x_1(t_k) = x_{tk}$, $dx_1(t_k)/dt = 0$. Значение управляющего напряжения ограничено $|u| = U_m$.

При решении данной задачи удобнее рассматривать не выходную координату, а ошибку системы $\theta(t) = x_1(t_k) - x_1(t)$. В начале управления ошибка максимальна $\theta_0 = x_1(t_k) - x_1(0) = x_1(t_k)$, по мере поворота ротора к заданному углу она уменьшается и в заданной точке становится равной нулю. Таким образом, задача сводится к уменьшению ошибки (начального угла рассогласования) от величины $\theta = \theta_0 = x_1(t_k)$, $d\theta_0/dt = 0$ при $t = 0$ до величины $\theta = \theta(t_k) = 0$, $d\theta(t_k)/dt = 0$ за минимальное время.

Запишем уравнение (11.54) относительно ошибки

$$Td^2\theta/dt^2 + d\theta/dt = -kU_m. \quad (11.55)$$

Найдем уравнения фазовых траекторий. Для этого перепишем уравнение второго порядка (11.55) в виде двух уравнений первого порядка:

$$d\theta/dt = y;$$

$$Tdy/dt = -kU_m - y. \quad (11.56)$$

Разделив первое уравнение системы (11.56) на второе, исключим из уравнений время:

$$d\theta/dy = Ty/(-kU_m - y). \quad (11.57)$$

Проинтегрируем выражение (11.57)

$$\begin{aligned} \int d\theta &= -T \int \frac{y}{kU_m + y} dy = -T \int \frac{y + kU_m - kU_m}{kU_m + y} dy = \\ &= -Ty + TkU_m \int \frac{dy}{kU_m + y}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\theta = -Ty + TkU_m \ln |kU_m + y| + C. \quad (11.58)$$

Уравнение (11.58) определяет семейство фазовых траекторий, каждая из которых зависит от начального значения ошибки.

Постоянную интегрирования C найдем, подставив в уравнение (11.58) начальные значения $\theta = \theta_0$ и $y = y_0$:

$$\theta_0 = -Ty_0 + TkU_m \ln |kU_m + y_0| + C,$$

откуда

$$C = \theta_0 + Ty_0 - TkU_m \ln |kU_m + y_0|.$$

Подставив данное значение C в (11.58), получим

$$\theta = \theta_0 - T(y - y_0) + TkU_m \ln |kU_m + y| - TkU_m \ln |kU_m + y_0|. \quad (11.59)$$

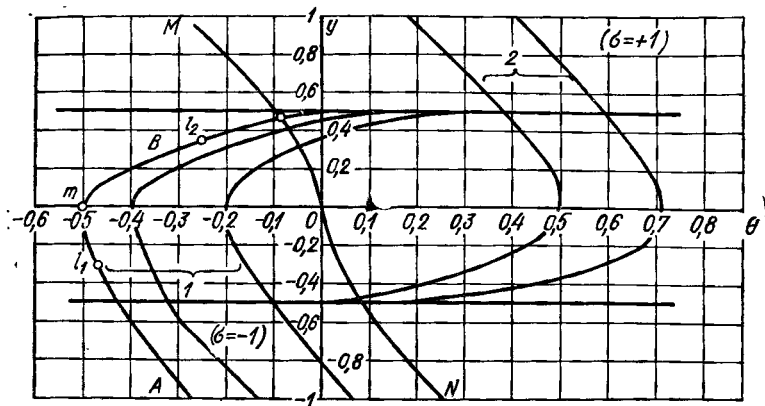


Рис. 11.28. Семейство фазовых характеристик объекта.

Знак управляющего воздействия U_m может изменяться не более одного раза. Запишем уравнение (11.59) с учетом знака U_m :

$$\theta = \theta_0 - T(y - y_0) \pm TkU_m \ln |y \pm kU_m| \mp TkU_m \ln |y_0 \pm kU_m|. \quad (11.60)$$

Обозначив $\sigma = \pm 1$, запишем уравнение (11.60)

$$\theta = \theta_0 - T(y - y_0) + \sigma TkU_m \ln |y + \sigma kU_m| - \sigma TkU_m \ln |y_0 + \sigma kU_m|. \quad (11.61)$$

Подставив в уравнение начальное значение производной $y_0 = \dot{\theta} = d\theta/dt = 0$, получим

$$\theta = \theta_0 - Ty + \sigma TkU_m \ln |y + \sigma kU_m| - \sigma TkU_m \ln |\sigma kU_m|. \quad (11.62)$$

На основании уравнения (11.62) строятся фазовые траектории в плоскости θ, y .

Пусть $T = 0,62$ с, $k = 0,023$ рад/Вс, $u_m = 220$ В, $\theta_0 = -0,5$ рад. Подставим численные значения коэффициентов в уравнение (11.62):

$$\theta = -0,5 - 0,62y + \sigma \cdot 0,31 \ln |y + \sigma \cdot 0,5| - \sigma \cdot 0,31 \ln |\sigma 0,5|. \quad (11.63)$$

Для первого участка траектории $\sigma = -1$ и уравнение (11.63) примет вид

$$\theta = -0,5 - 0,62y - 0,31 \ln |y - 0,5| + 0,31 \ln |-0,5|. \quad (11.64)$$

В соответствии с уравнением (11.64) на рис. 11.28 построена фазовая траектория AB. Она проходит через точку $\theta = \theta_0 = -0,5$; $y = y_0 = 0$. Семейство фазовых характеристик, соответствующих $\sigma = -1$ при других начальных значениях, на рисунке обозначено цифрой 1, а семейство характеристик, соответствующих $\sigma = 1$, — цифрой 2.

В соответствии с фазовой траекторией AB ошибка системы от значения $\theta_0 = -0,5$; $y_0 = 0$ уменьшается. Однако, если не изменить знака σ управляющего воздействия, то θ пройдет через нулевое значение с некоторой скоростью y и будет возрастать до бесконечности

со скоростью $y = 0,5$ рад/с. Для устранения ошибки изображающая точка должна попасть в начало координат $\theta = 0$, $y = 0$, т. е. должна с фазовой траектории AB (или любой другой траектории) «перейти» на фазовую траекторию, проходящую через начало координат (направление движения изображающей точки указано стрелками). Уравнение последней получим, подставив в уравнение (11.62) $\theta_0 = 0$:

$$\theta = -Ty + \sigma TkU_m \ln |y + \sigma kU_m| - \sigma TkU_m \ln |\sigma kU_m|, \quad (11.65)$$

или после подстановки значений коэффициентов

$$\theta = -0,62y + \sigma \cdot 0,31 \ln |y + \sigma \cdot 0,5| - \sigma \cdot 0,31 \ln 0,5. \quad (11.66)$$

Уравнению (11.66) соответствует фазовая траектория MON . Эта траектория является единственной, по которой можно попасть в начало координат. Как отмечалось, в точках пересечения фазовых траекторий с траекторией MON изображающая точка должна переходить с этих фазовых траекторий на траекторию MON . Такой переход достигается переключением знака управляющего воздействия. В связи с этим траекторию MON называют линией переключения.

Если в начальный момент $\theta_0 = -0,5$, $y = 0$, то в результате подачи управляющего воздействия $u = -U_m$ ($\sigma = -1$) изображающая точка пройдет путь mn ; в точке n пересечения с траекторией MCN необходимо переключить знак u . Под влиянием $u = +U_m$ ($\sigma = +1$) изображающая точка пройдет по траектории MCN путь nO , т. е. переместится в начало координат. В общем случае, когда в начальный момент значение $y = d\theta/dt \neq 0$, т. е. двигатель вращается, фазовая траектория может начинаться с любой точки фазового пространства (например, в точках l_1 , l_2) и оптимальная траектория также будет состоять из двух отрезков кривых (l_1n и nO ; l_2n и nO). В частном случае, когда в начальный момент изображающая точка находится на линии переключения MON , оптимальный процесс управления будет состоять из одного интервала.

Для определения оптимального закона управления (функции переключения), зависящего от θ , y , kU_m , используем линию переключения. Перепишем уравнение (11.65) линии переключения в виде

$$\theta + Ty - \sigma TkU_m \ln |y + \sigma kU_m| + \sigma TkU_m \ln |\sigma kU_m| = 0,$$

или, учитывая, что $\sigma = -\text{sign } y$ (фазовые траектории 1, соответствующие знаку $\sigma = -1$, пересекают траекторию MON при положительных значениях y и наоборот),

$$\begin{aligned} \theta + Ty + (\text{sign } y) TkU_m \ln |y - (\text{sign } y) kU_m| - \\ - (\text{sign } y) TkU_m \ln |kU_m| = 0. \end{aligned} \quad (11.67)$$

Из приведенных выше рассуждений следует, что если изображающая точка находится ниже линии переключения MON (левая часть уравнения (11.67) отрицательна) или на участке ON , то управляющее воздействие должно быть отрицательным ($u = -U_m$), если же она находится выше этой линии (левая часть уравнения (11.67) положительна) или лежит на ее участке MO , то управляющее воздействие должно быть положительным ($u = +U_m$). Поэтому оптимальный за-

кон управления (функция переключения управляющего воздействия) будет иметь вид:

$$u = U_m \operatorname{sign} [\theta + Ty + (\operatorname{sign} y) TkU_m \ln |y - (\operatorname{sign} y) \times kU_m| - (\operatorname{sign} y) TkU_m \ln |kU_m|], \quad (11.68)$$

или

$$u = U_m \operatorname{sign} \left[\theta + Ty + (\operatorname{sign} y) TkU_m \ln \left| \frac{y - (\operatorname{sign} y) kU_m}{kU_m} \right| \right]. \quad (11.69)$$

После подстановки численных значений коэффициентов получим

$$u = U_m \operatorname{sign} \left[\theta + 0,62y + (\operatorname{sign} y) 0,31 \ln \left| \frac{y - (\operatorname{sign} y) 0,5}{0,5} \right| \right], \quad (11.70)$$

т. е. полярность управляющего воздействия (напряжения U_m) и моменты его переключения при $|U_m| = \text{const}$ зависят от ошибки системы θ и ее производной $y = d\theta/dt$. Поскольку для определения ошибки необходимо управляемую величину x_1 (см. рис. 11.15) подавать на элемент сравнения ЭС, то оптимальный закон управления (11.70) может быть реализован в замкнутых системах автоматического управления (см. рис. 11.26).

Обозначив выражение в квадратных скобках через μ , перепишем формулу (11.70) в виде

$$u = (\operatorname{sign} \mu) U_m, \quad (11.71)$$

откуда следует, что на управляемый объект УО должно подаваться максимальное напряжение U_m , знак (sign) которого соответствует

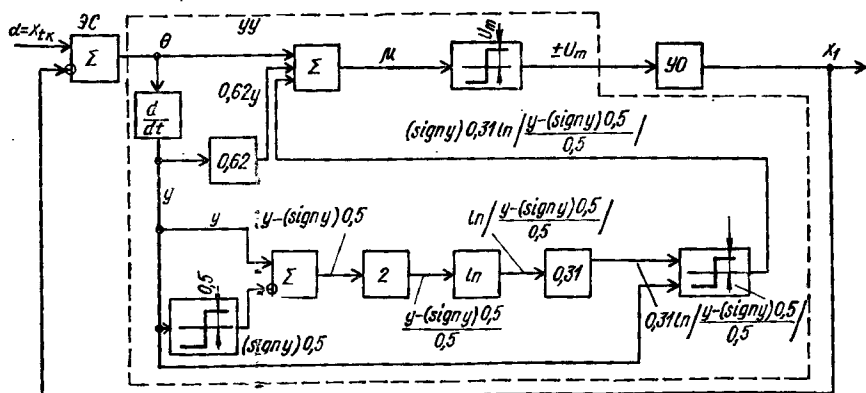


Рис. 11.30. Структурная схема оптимальной по быстродействию замкнутой системы автоматического управления.

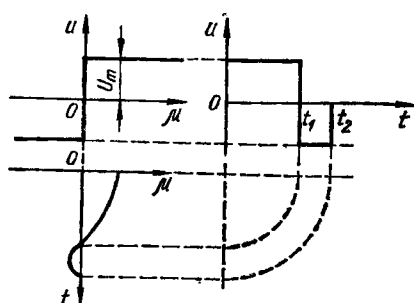


Рис. 11.29. Реализация функции $u = (\operatorname{sign} \mu) U_m$ с помощью идеального двухпозиционного реле.

знаку μ . Функция переключения (11.71) может быть реализована с помощью идеального (без зоны нечувствительности) двухпозиционного поляризационного реле (рис. 11.29).

Оптимальное управляющее воздействие (11.70) формируется с помощью управляющего устройства УУ (рис. 11.30). Сигнал μ получается на выходе сумматора Σ в результате сложения ошибки системы, ее производной ($0,62y$) и сигнала, формируемого в соответствии с третьим слагаемым выражения (11.70). Производная ошибки $y = d\theta/dt$ получается с помощью дифференциатора d/dt , а третье слагаемое формулы (11.70) реализуется с помощью сравнительно сложной цепи преобразования, показанной на рис. 11.30.

Оптимальные по быстродействию комбинированные САУ

При синтезе устройства управления УУ оптимальной по быстродействию замкнутой системы автоматического управления (см. рис. 11.30) не учитывались требования обеспечения ее устойчивости. В результате синтеза получен релейный закон управления, реализуемый с помощью релейной системы. Двухпозиционное реле без зоны нечувствительности подключает к управляемому объекту только два предельных значения управляющего воздействия ($\pm U_m$), поэтому после окончания переходного процесса в системе возникают автоколебания около заданной точки равновесия. В некоторых системах автоколебания могут быть малы по величине и допустимы, однако чаще всего необходимо принимать специальные меры для их устранения. Для этого обычно применяют реле с зоной нечувствительности (рис. 11.31), т. е. переходят к трехпозиционным релейным системам. Это приводит к отклонению от оптимальности (сигнал управления $u = 0$ при малых значениях μ , а именно при $\mu \leq a$, в то же время для оптимального управления $u = 0$ только при $\mu = 0$) и к

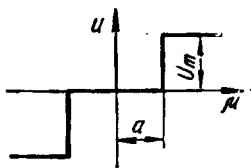


Рис. 11.31. Статическая характеристика реле с зоной нечувствительности.

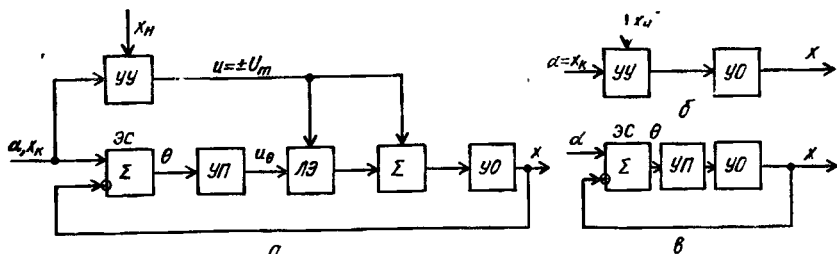


Рис. 11.32. Функциональные схемы:

а — оптимальной по быстродействию комбинированной системы; б — разомкнутой системы во время переходного процесса; в — замкнутой системы в установившемся режиме.

дополнительной статической ошибке в установившихся режимах. Если уменьшение точности в установившемся режиме недопустимо, то применяют двойное управление — релейное при больших и непрерывное при малых (в пределах зоны нечувствительности реле) рассогласованиях. Двойное управление реализуется в системах с переменной структурой путем коммутации цепей. При подходе к новому установившемуся состоянию переходный процесс заканчивается не как в оптимальной, а как в непрерывной системе, т. е. затягивается. Таким образом, при двойном управлении также наблюдается отклонение от оптимального управления.

Наиболее совершенным можно считать комбинированные оптимальные по быстродействию системы автоматического управления. Вариант функциональной схемы комбинированной следящей системы приведен на рис. 11.32, а [21]. В этой системе управляющее устройство УУ вынесено из замкнутого контура и включено в связь по задающему воздействию, образуя разомкнутый канал оптимального управления. В УУ формируется оптимальное управляющее воздействие $u = \pm U_m$, моменты переключения которого определяются в зависимости от заданных начальных x_n и конечных $\alpha = x_k$ условий. Во время переходного процесса сигнал $u = \pm U_m$ с выхода УУ поступает на логический элемент ЛЭ и последний разрывает цепь подачи сигнала u_0 с выхода усилителя преобразователя УП на вход управляемого объекта УО. Благодаря этому замкнутый контур системы на период длительности переходного процесса размыкается и управление объектом УО осуществляется только управляющим устройством, т. е. на время переходного процесса образуется разомкнутая оптимальная по быстродействию система (рис. 11.32, б). По окончании переходного процесса $u = 0$ и логический коммутатор ЛЭ замыкается, т. е. в установившемся режиме система (рис. 11.32, а) преобразуется в замкнутую систему (рис. 11.32, в).

Таким образом, рассматриваемая система относится к классу систем с переменной структурой, осуществляющих двойное управление. Однако в отличие от указанных выше систем с двойным управлением, в которых переходный процесс заканчивается не в оптимальном режиме, в данной системе оптимальное управление реализуется в течение всего переходного процесса. Поскольку разомкнутая связь с УУ не влияет на устойчивость замкнутой системы и ее точность в установившемся режиме, то УУ можно синтезировать только в соответствии с условием оптимальности, не учитывая условий устойчивости замкнутой системы и требований к точности в установившихся динамических режимах. Это позволяет обеспечить управление в комбинированных системах в переходных режимах с меньшими отклонениями от оптимального по сравнению с замкнутыми системами. Замкнутый контур комбинированной системы синтезируется в соответствии с условиями устойчивости и требованиями точности в установившихся динамических режимах без соответствующего учета условий оптимальности по быстродействию, что дает возможность достижения высокой динамической точности. Кроме того, для уменьшения динамических ошибок системы в установившихся режимах можно вводить дополни-

тельные связи по задающему и возмущающим воздействиям, синтезированные, например, из условия повышения порядка астатизма. Таким образом, в оптимальных по быстродействию комбинированных системах автоматического управления отсутствует противоречие между условием по быстродействию и условиями устойчивости и точности в установившихся динамических режимах, благодаря чему в этих системах возможно достижение более высокого быстродействия и более высокой динамической точности.

Квазиоптимальные системы автоматического управления

В рассмотренном выше примере управляемый объект описывался уравнением второго порядка и поэтому синтез управляющего устройства мог быть выполнен с помощью фазовой плоскости. Для объектов, описываемых уравнениями более высокого порядка, синтез управляющего устройства необходимо выполнять с помощью фазового пространства, что значительно усложняет решение задачи, и само управляющее устройство оказывается более сложным в смысле технической реализации (особенно в связи с необходимостью получения производных ошибки до $(n - 1)$ -го порядка). Поэтому в тех случаях, когда возможно некоторое отступление от оптимальности, прибегают к упрощению задачи синтеза и самого управляющего устройства. В результате этого получают квазиоптимальные системы автоматического управления, т. е. системы, близкие к оптимальной [21, 61].

Можно указать на следующие два основных направления синтеза квазиоптимальных систем: 1) упрощение уравнения объекта и 2) упрощение управляющего устройства. Упрощение уравнения объекта достигается понижением его порядка. Возможность такого понижения основывается на известном правиле Ишлинского [61], по которому линейная система сколь угодно высокого порядка ведет себя в переходном процессе в основном так же, как система второго или третьего порядка. Упрощение описания объекта достигается также посредством возможной линеаризации или пренебрежением несущественных нелинейностей.

Достоинство данного пути синтеза квазиоптимальных систем состоит в упрощении как самой задачи синтеза, так и синтезированного управляющего устройства.

Достоинством второго пути является то, что в ходе упрощения управляющего устройства возможна оценка отклонения получаемого процесса от оптимального.

Адаптивные системы автоматического управления

12.1. Определение адаптивных систем автоматического управления и их классификация

Необходимость построения адаптивных систем

При проектировании систем автоматического управления обычно исходят из известного характера воздействия на систему и предполагают, что этот характер, а также параметры системы при работе не изменяются или изменяются в малых пределах. Например, часто задающее воздействие аппроксимируют полиномом n -й степени и рассчитывают систему (определяют порядок астатизма, строят желаемую ЛАЧХ, находят параметры корректирующих устройств) таким образом, чтобы обеспечить требуемые показатели качества (динамическую ошибку, перегулирование, время регулирования и др.) или добиться экстремального значения критерия оптимальности. При поступлении на вход системы случайных задающего воздействия и помехи синтезируют оптимальную систему с минимальной среднеквадратической ошибкой, исходя из средних статистических характеристик воздействия. Однако характеристики реальных внешних воздействий могут существенно отличаться от принятых при расчете системы вследствие неполной априорной (начальной) информации об этих воздействиях. Поэтому и процессы, происходящие в системе, будут отличаться от расчетных или оптимальных, а ошибки системы могут превосходить допустимые.

Кроме изменения характеристик внешних воздействий не остаются постоянными также некоторые параметры управляемого объекта или системы в целом, а самопроизвольно изменяются по мере «старения», изменения окружающей среды, давления, влажности и по другим причинам. Примером объекта с изменяющимися параметрами является самолет или ракета — при полете изменяются их массы вследствие сгорания горючего и коэффициенты трения об окружающую среду. Обратная связь в САУ с принципом управления по отклонению, хотя и уменьшает влияние изменения параметров системы на ее работу, однако это изменение приводит к расстройке системы, отклонению процесса управления от расчетного, ухудшению ее показателей качества.

Таким образом, в условиях неполной априорной информации (т. е. в условиях начальной неопределенности) о внешних воздействиях и о параметрах объекта управления задача управления усложняется. Возможность управления объектами при неполной априорной информации основана на применении адаптации в автоматических системах,

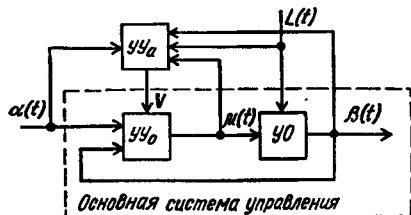


Рис. 12.1. Обобщенная функциональная схема адаптивной системы.

вместе с этой текущей (рабочей) информацией автоматически изменяется алгоритм управления системы, обеспечивая необходимое или наилучшее (оптимальное по какому-либо критерию) качество управления объектом при изменяющихся условиях работы. Автоматическое изменение коэффициентов и вида алгоритма управления, в соответствии с которым формируется управляющее воздействие, достигается в общем случае изменением уставки, параметров и структуры управляющего устройства и требует дополнительных устройств. Функциональная схема адаптивной системы в общем виде изображена на рис. 12.1. Эта система состоит из двух частей — основной системы управления (устройство управления $УУ_0$, управляемый объект $УО$, охваченные обратной связью) и устройства управления автоматической адаптации $УУ_a$. Основная система в зависимости от ее назначения решает определенную задачу (например, задачу стабилизации, программного управления, воспроизведения, преобразования), а устройство управления автоматической адаптации $УУ_a$ осуществляет настройку устройства управления основной системы $УУ_0$, изменяя ее параметры или структуру с целью обеспечения необходимого процесса управления при изменяющихся условиях работы. В частности, если изменяются характеристики задающего $\alpha(t)$ и возмущающего $L(t)$ воздействий, то в результате анализа поступающих в $УУ_a$ этих воздействий определяются их текущие характеристики (например, вид аппроксимирующего полинома, спектральная плотность). В соответствии с этими характеристиками по заранее заложенному алгоритму в управляющем устройстве $УУ_a$ вырабатывается управляющее воздействие V и перестраиваются параметры или изменяется структура основного $УУ_0$, обеспечивая каждый раз минимальную ошибку системы.

Если уход системы от расчетного режима вызван отклонениями параметров системы (чаще всего управляемого объекта), то для соответствующей настройки $УУ_0$ необходимо выявлять эти отклонения. Поскольку непосредственное измерение параметров системы (объекта) представляет собой сложную задачу, то выявление отклонений параметров осуществляется косвенным способом — по реакции системы (объекта) на рабочий сигнал, а чаще всего — на специальные пробные воздействия, которые подаются на $УУ_0$. Последние вводятся в систему, если рабочий сигнал недостаточен для получения необходимой информации. Реакция $\beta(t)$ системы (объекта) подается в $УУ_a$, где анализом определяется некоторый показатель качества — критерий качества I (например, число колебаний реакции системы $\beta(t)$ на ступен-

которая уменьшает первоначальную неопределенность на основе использования информации, получаемой в процессе управления.

В адаптивных (приспосабливающихся) системах автоматически в процессе работы системы пополняется информация об изменении характеристик внешних воздействий и параметров объекта и в соответ-

чатое или импульсное пробное воздействие) и его отклонение от желаемого. Если реакция системы отличается от желаемой, то в $УУ_a$ вырабатывается управляющее воздействие V , которое изменяет некоторые параметры (например, коэффициент усиления системы, постоянные времени корректирующих устройств) или структуру $УУ_0$ таким образом, что отклонение текущего критерия качества от желаемого уменьшается или сводится к нулю.

Классификация адаптивных САУ

Как отмечалось, адаптивная система (рис. 12.1) состоит из двух контуров управления — основного контура и вторичного — контура адаптации, содержащего управляющее устройство адаптации $УУ_a$. Для вторичного контура основная САУ является управляемым объектом. Контур адаптации образует второй уровень управления. Можно организовать и следующий уровень адаптации, когда в соответствии с изменяющимися условиями работы будет подстраиваться не только $УУ_0$, но и $УУ_a$. Аналогично возможно построение многоступенчатых *иерархических адаптивных САУ*, в которых каждый последующий уровень управляет предыдущим. При этом расширяется диапазон условий, при которых система будет правильно выполнять свою задачу или повышать показатель качества управления в заданном диапазоне. Каждый последующий контур адаптации должен иметь все более обобщенный алгоритм управления и более долговременную память.

Адаптивная система, как и основная, может быть выполнена с *разомкнутым, замкнутым и комбинированным контуром адаптации*. Примерами разомкнутых контуров адаптации являются контуры адаптации по задающему $\alpha(t)$ и возмущающему $L(t)$ воздействиям в обобщенной адаптивной системе (см. рис. 12.1). С помощью этих контуров определяются текущие характеристики воздействий и в соответствии с этими характеристиками по некоторому алгоритму настраивается $УУ_0$. При этом реакция системы или ее точность не измеряются. С помощью разомкнутого контура адаптации могут, например, определяться производные задающего воздействия и в зависимости от наличия и значения тех или иных производных изменяться порядок астатизма основной системы. Например, при появлении ускорения (что, в частности, при рассмотрении систем автоматического сопровождения цели обычно соответствует маневру цели) контур адаптации изменяет структуру $УУ_0$ так, что порядок астатизма основной системы повышается с первого до второго. При этом динамическая ошибка системы принимает конечное значение, а не возрастает во времени, как в случае, если бы порядок астатизма системы оставался первым.

В большинстве случаев адаптивные системы строятся с замкнутым контуром адаптации, т. е. с обратной связью. В этих системах по реакции системы $\beta(t)$, подаваемой на $УУ_a$ через обратную связь, (рис. 12.1), определяется текущий критерий качества I и сравнивается с желаемым значением критерия $I_{ж}$. Получившееся при этом отклонение $\Delta I = I_{ж} - I$ используется для формирования сигнала настрой-

чи V управляющего устройства $УУ_0$ с целью устранения или уменьшения этого отклонения.

Комбинированная адаптивная система содержит разомкнутые и замкнутые контуры адаптации (рис. 12.1).

Адаптивные САУ в зависимости от задачи адаптации подразделяются на два класса: системы со стабилизацией качества управления; системы с автоматической оптимизацией качества управления (системы экстремального управления).

Задачей адаптивной САУ со стабилизацией качества является удержание критерия качества I на определенном уровне или в определенных пределах. Контур адаптации здесь выполняет задачу стабилизации критерия качества I основной системы. Задачей адаптивной системы с автоматической оптимизацией качества является обеспечение поиска оптимального значения критерия качества и его поддержание.

По характеру настройки (изменений) основного управляющего устройства $УУ_0$, выполняемой управляющим устройством $УУ_a$ в процессе адаптации, адаптивные системы подразделяются на самонастраивающиеся, самоорганизующиеся, системы с адаптацией в особых фазовых состояниях, обучающиеся (самообучающиеся).

В самонастраивающихся системах (СНС) адаптация достигается изменением параметров основного управляющего устройства $УУ_0$. Во многих случаях изменение характеристик внешних воздействий или параметров системы имеют широкий диапазон и самонастройка системы изменением параметров $УУ_0$ не обеспечивает поддержания желаемого режима. В этих случаях прибегают к изменению структуры $УУ_0$. Адаптивные системы, в которых адаптация достигается изменением параметров и структуры основного управляющего устройства $УУ_0$, называются самоорганизующимися. В системах с адаптацией в особых фазовых состояниях специально организуются особые режимы (режим автоколебаний, скользящие режимы), которые либо служат дополнительным источником рабочей информации об изменяющихся характеристиках объекта, либо придают системе новые свойства, за счет которых динамические характеристики управляемого процесса поддерживаются в допустимых пределах, независимо от изменений условий работы системы. Эти системы подразделяются на релейные автоколебательные системы и адаптивные системы с переменной структурой.

Обучающиеся системы управления реализуют процессы обучения, которые заключаются в постепенном накоплении, запоминании и анализе информации о поведении системы и изменении алгоритмов управления в зависимости от приобретаемого опыта. В таких системах качество управления (например, точность) повышается по мере эксплуатации системы. В простейшем случае в самообучающуюся систему вводится второй контур адаптации, который совершенствует алгоритм работы первого контура адаптации по результатам анализа его функционирования.

12.2. Самонастраивающиеся системы автоматического управления со стабилизацией качества управления

В СНС со стабилизацией качества управления благодаря адаптации (настройке основного управляющего устройства $УУ_0$, рис. 12.1) поддерживается с определенной точностью значение критерия качества J на заданном уровне. Самонастраивающиеся системы такого типа чаще всего применяются для стабилизации динамических свойств (характеристик) систем. В этом случае критерием качества могут служить непосредственно динамические характеристики системы (переходные функции и частотные характеристики), различные косвенные показатели качества переходных процессов (например, интегральные оценки), статистические оценки точности (например, среднеквадратическая ошибка). Необходимые при этом эталонные характеристики системы (объекта) можно формировать аналитически и с помощью эталонной модели системы (объекта). При аналитическом формировании эталонных динамических характеристик применяются вычислительные устройства, в частности микропроцессоры. Последние по величине входного сигнала и реакции системы вычисляют критерий качества системы J и его отклонение ΔJ от эталонного. На основании ΔJ формируется управляющее воздействие, осуществляющее настройку основного $УУ_0$. Примером такой адаптивной системы является микропроцессорная система автоматического управления технологическим процессом (см. рис. 9.12), в которой микропроцессор МКП вырабатывает управляющие воздействия, изменяющие соответствующим образом уставки основных автоматических управляющих устройств АУУ.

Самонастраивающиеся системы с эталонной моделью

Вариант обобщенной функциональной схемы СНС с эталонной моделью M изображен на рис. 12.2. Эталонная модель может быть аналоговой или цифровой моделью основной системы, обладающей желаемой динамической характеристикой. В рассматриваемом случае основной системой является комбинированная САУ со связью по задающему воздействию $СЗВ$. В состав системы входят корректирующие устройства в прямой цепи $КУ_{пр}$ и цепи главной обратной связи $КУ_{ос}$, усилитель-преобразователь $УП$ и управляемый объект $УО$. На вход эталонной модели M и основной системы поступает одно и то же задающее воздействие $\alpha(t)$ либо пробные сигналы, вырабатываемые генератором G . Выходные величины модели $\beta_m(t)$ и основной системы $\beta(t)$ сравниваются в элементе сравнения $ЭС_a$ контура адаптации. Если динамические характеристики модели и системы не идентичны, то возникает сигнал рассогласования $\theta_a(t)$, который подается на вход механизма настройки МН параметров. Последний обычно представляет собой или содержит интегрирующий элемент. Механизм настройки так изменяет параметры корректирующего устройства в прямой цепи основной системы $КУ_{пр}$, что сигнал рассогласования $\theta_a(t)$ уменьшается или сводится к нулю. Идентичнос-

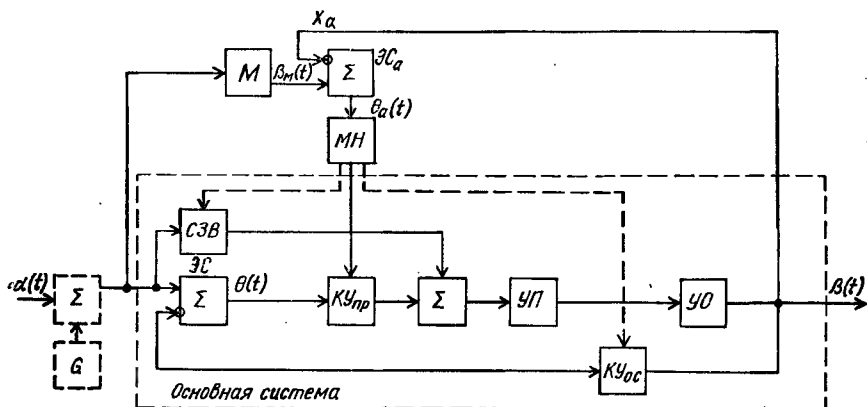


Рис. 12.2. Вариант обобщенной функциональной схемы СНС с эталонной моделью.

ти динамических характеристик системы и модели также можно добиваться настройки параметров корректирующих устройств в главной обратной связи $KУ_{ос}$ или в связи по задающему воздействию $СЗВ$ системы (соответствующие каналы воздействия на рис. 12.2 изображены штриховыми линиями). В частности, настройкой параметров $СЗВ$ можно поддерживать выполнение того или иного условия инвариантности (например, условия повышения порядка астатизма системы) при изменяющихся параметрах системы.

Таким образом, при изменении параметров системы (объекта) контур самонастройки с эталонной моделью настраивает параметры корректирующих устройств системы так, что динамическая характеристика всей системы остается неизменной, близкой к характеристике эталонной модели.

Чтобы можно было обеспечивать идентичность динамической характеристики системы с характеристикой эталонной модели изменением параметров физически реализуемых корректирующих устройств, структура (алгоритмическая схема) эталонной модели должна быть сходной со структурой основной системы. В ряде случаев оказывается возможным применение упрощенной модели системы в виде колебательного или апериодического звена. Параметры эталонной модели должны выбираться с учетом ограничений координат реальной системы.

Самонастраивающаяся система стабилизации амплитудно-частотной характеристики с моделью

Функциональная схема СНС со стабилизацией амплитудно-частотной характеристики основной системы на одной частоте $\omega_{пр}$ изображена на рис. 12.3 [81]. Генератор пробных сигналов G вырабатывает гармоническое колебание частоты $\omega_{пр}$. Это колебание поступает на эталонную модель M и на основную систему. Амплитуда $A_m(\omega_{пр})$ выходного колебания модели на частоте $\omega_{пр}$ соответствует ординате $N_m(\omega_{пр})$ желаемой амплитудно-частотной характеристики системы (рис. 12.4). Колебательная составляющая выходного сигнала системы

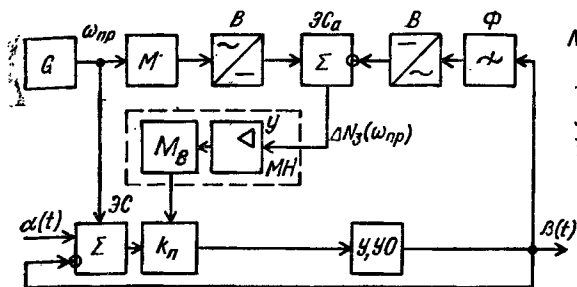


Рис. 12.3. Функциональная схема СНС со стабилизацией амплитудно-частотной характеристики на частоте $\omega_{\text{пр}}$.

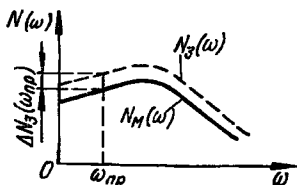


Рис. 12.4. Амплитудно-частотные характеристики СНС (рис. 12.3).

$\beta(t)$ выделяется с помощью узкополосного фильтра Φ , настроенного на частоту $\omega_{\text{пр}}$. Колебания с выхода модели M и фильтра Φ системы предварительно выпрямляется с помощью выпрямителей B , а затем сравниваются в Σ_a . Сигнал ошибки, пропорциональный отклонению $\Delta N(\omega_{\text{пр}})$ ординаты амплитудно-частотной характеристики системы $N_z(\omega_{\text{пр}})$ от $N_m(\omega_{\text{пр}})$, поступает на механизм настройки MH , состоящий из усилителя U и вспомогательного двигателя M_b . Последний перемещает движок потенциометра, с помощью которого регулируется коэффициент усиления потенциометра k_n , и тем самым изменяет амплитудно-частотную характеристику системы.

Для стабилизации амплитудно-частотной характеристики системы на нескольких частотах применяют соответствующее количество аналогичных контуров самонастройки. К контуру самонастройки взаимодействие с основным контуром управления накладывает следующие два основных требования: пробные сигналы должны быть достаточно малы, быстродействие контура должно быть больше скорости изменения стабилизируемых динамических характеристик основной системы.

Самонастраивающаяся система с моделью и большим коэффициентом усиления

В САУ, допускающих большие коэффициенты усиления, возможно достижение стабилизации динамических характеристик при использовании эталонной модели без соответствующей настройки параметров корректирующих устройств основной системы. Вариант структурной схемы такой системы изображен на рис. 12.5. В цепь обратной связи системы, состоящей из управляющего устройства и объекта с передаточными функциями $K_y(p)$ и $K_o(p)$, вместе со звеном $K_{o.c}(p)$ включено звено с большим коэффициентом усиления k . На вход цепи обратной связи поступает сигнал θ_a , равный разности выходных сигналов основной системы β и модели β_m . Уравнения элементов системы:

$$\begin{aligned}\beta(p) &= K_y(p) K_o(p) \theta(p); & \theta_a(p) &= \beta_m(p) - \beta(p); \\ \theta(p) &= \alpha(p) + \theta_{a.o.c}(p); & \beta_m(p) &= K_m(p) \alpha(p). \\ \theta_{a.o.c}(p) &= k K_{o.c}(p) \theta_a(p);\end{aligned}$$

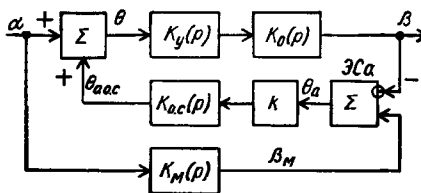


Рис. 12.5. Структурная схема ССН с моделью и большим коэффициентом усиления.

Исключив из системы уравнений промежуточные переменные, определяем комплексную (заменяя $p = j\omega$) передаточную функцию всей системы

$$K(j\omega) = \frac{\beta(j\omega)}{\alpha(j\omega)} = \frac{K_y(j\omega) K_0(j\omega) [1 + kK_{o.c}(j\omega) K_m(j\omega)]}{1 + K_y(j\omega) K_0(j\omega) kK_{o.c}(j\omega)}.$$

В области частот, где $|K_y(j\omega) K_0(j\omega) kK_{o.c}(j\omega)| \gg 1$ и $|kK_{o.c}(j\omega) K_m(j\omega)| \gg 1$, выполняется приближенное равенство $K(j\omega) \approx K_m(j\omega)$, т. е. комплексная передаточная функция всей системы определяется желаемой передаточной функцией модели, несмотря на возможные изменения параметров основной системы.

12.3. Самонастраивающиеся системы автоматической оптимизации качества управления (системы экстремального управления)

Задачей самонастройки в этих системах является нахождение и поддержание оптимального (экстремального) значения критерия качества управления при изменении воздействий и параметров объекта. Критерий качества управления в данном случае может быть назван критерием оптимальности. Примерами критерия оптимальности в зависимости от задачи управления могут быть точность системы, коэффициент полезного действия, мощность, расход топлива, производительность, стоимость.

Первые теоретические результаты в области систем экстремального управления были получены В. В. Казакевичем [28], А. А. Красовским [32], А. Г. Ивахненко [26, 13], В. М. Кунцевичем [38], В. И. Костюком [31], А. П. Растригиным, Я. З. Ципкиным, А. П. Юркевичем, а также Ч. Драйпером, И. Ли, М. Хамзой.

Первой системой экстремального управления (СЭУ) была система, автоматически изменяющая угол поворота лопастей ветродвигателя при изменении силы ветра и нагрузки. Как известно, в соответствии с теорией воздушного винта, разработанной Н. Е. Жуковским, для каждого значения скорости ветра и нагрузки двигателя соответствует определенный угол поворота лопастей вокруг продольной оси, при котором двигатель имеет наиболее высокий к. п. д. и развивает наибольшую мощность. В рассматриваемом случае к. п. д. двигателя или его относительная мощность являются управляемой величиной (критерием оптимальности) I , а угол поворота лопастей — управляющим воздействием μ ; скорость ветра и нагрузка являются возмущающими воздействиями $L_1(t)$ и $L_2(t)$. Если I отложить по оси ординат, а μ — по оси абсцисс, то кривые зависимости I от μ для различных значений

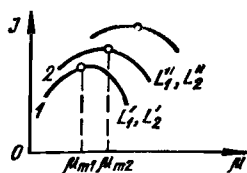


рис. 12.6. Экстремальные характеристики $I = f(\mu)$ при различных значениях возмущающих воздействий L_1, L_2 .

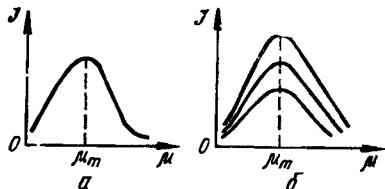


Рис. 12.7. Экстремальные характеристики управляемого объекта, при которых нецелесообразно применение СЭУ:

а — экстремальная точка не перемещается по плоскости $I - \mu$; б — экстремальная точка перемещается на плоскости $I - \mu$ по вертикали.

$L_1(t)$ и $L_2(t)$ будут иметь вид, изображенный на рис. 12.6. Кривая 1 определяет зависимость $I = f(\mu)$ при $L_1 = L_1', L_2 = L_2'$. Максимальное значение критерия оптимальности I при данных возмущающих воздействиях достигается при $\mu = \mu_{m1}$. Кривая 2 соответствует зависимости $I = f(\mu)$ при других значениях возмущающих воздействий $L_1 = L_1'', L_2 = L_2''$. Экстремальное значение в этом случае имеет место при $\mu = \mu_{m2}$. Как видно из рисунка, экстремальная характеристика $I = f(\mu)$, а следовательно, экстремальное значение I не остаются постоянными, а с изменением внешних воздействий или внутренних характеристик системы также изменяются.

Напомним, что задача обычной, несамонастраивающейся САУ состоит в том, чтобы с необходимой точностью поддерживать равенство между фактическим и требуемым значением управляемой величины. Требуемое значение задается и оно может быть как постоянной (системы стабилизации), так и переменной (программные, следящие, преобразующие системы). В СЭУ экстремальное значение управляемой величины (критерия оптимальности) заранее не известно и не задается. Задача СЭУ сводится к тому, чтобы находить и с необходимой точностью поддерживать экстремум управляемой величины, который изменяется во времени с изменением воздействий и параметров системы по неизвестному заранее закону. Иными словами, в противоположность обычной САУ, цель которой заключается в сведении к нулю сигнала ошибки — отклонения управляемой величины относительно требуемой, СЭУ сводит к нулю производную $dI/d\mu$ от критерия оптимальности по управляющему воздействию. Нулевое значение производной $dI/d\mu$ соответствует экстремальному значению управляемой величины.

Поиск экстремума, а следовательно, и применение СЭУ имеет смысл только в том случае, когда экстремальная точка характеристики перемещается на плоскости $I - \mu$ в горизонтальном направлении (см., например, рис. 12.6). Если экстремум соответствует одному и тому же значению $\mu = \text{const}$ (экстремальная точка остается на месте или перемещается на плоскости $I - \mu$ по вертикали, см. рис. 12.7, а, б), то СЭУ применять нецелесообразно. В этом случае задача может быть решена с помощью обычной системы стабилизации.

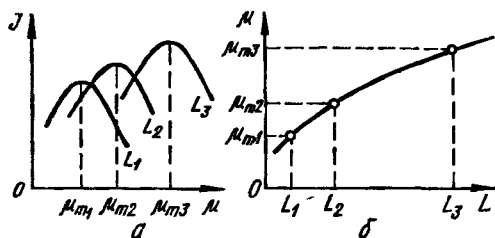


Рис. 12.8. Экстремальные характеристики управляемого объекта (а) и соответствующая им характеристика компенсации (б).

Системы экстремального управления, как и обычные системы, могут быть построены на основании принципа управления по возмущению, по отклонению и принципа комбинированного управления.

Системы экстремального управления с принципом управления по возмущению

На рис. 12.8, а изображен возможный вид экстремальных характеристик управляемого объекта. Из рисунка видно, что разным значениям L_1, L_2, L_3 возмущающего воздействия L соответствуют различные значения управляющего воздействия $\mu_{m1}, \mu_{m2}, \mu_{m3}$, при которых управляемая величина принимает экстремальное значение. Имея экстремальные статические характеристики управляемого объекта, соответствующие различным значениям L , можно заранее определить характеристику компенсации (компаундирования) $\mu_m = f(L)$ (рис. 12.8, б). Обычно эта характеристика является нелинейной.

В СЭУ с принципом управления по возмущению измеряется возмущение и реализуется заранее определенная характеристика компенсации $\mu_m = f(L)$, т. е. в зависимости от значения возмущающего воздействия L вырабатывается управляющее воздействие μ_m , при котором управляемая величина I принимает экстремальное значение.

Примером разомкнутой СЭУ может служить система автоматической настройки колебательного LC -контура в резонанс с изменяющейся частотой f подаваемого на контур напряжения (рис. 12.9). Зависимость напряжения на контуре от значения емкости C (или угла поворота μ ротора конденсатора C) при данной частоте поступающего напряжения имеет экстремальный характер. С изменением частоты f этого напряжения экстремальная характеристика контура $u = f(C)$ перемещается на плоскости $u - C$ аналогично, например, характеристике, изображенной на рис. 12.8, а. Поэтому необходимо в соответствии с изменением частоты изменять значение емкости C таким образом, чтобы резонансная частота контура была равна частоте f . В этом случае на контуре будет выделяться максимальное напряжение.

Задача настройки контура встречается в радиоприемных и радиопередающих устройствах. Для ее решения с помощью СЭУ с принципом управления по возмущению (рис. 12.9) частота f измеряется и с помощью преобразователя Ч/Н преобразуется в напряжение постоянного тока U_f . Это напряжение поступает на элемент сравнения ЭС следящей системы, состоящей из усилителя-преобразователя УП, ис-

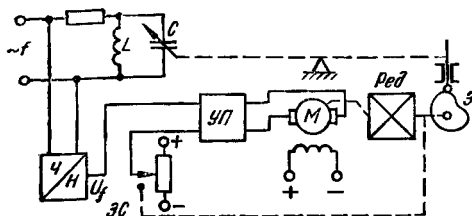


Рис. 12.9. Функциональная схема разомкнутой СЭУ автоматической настройки колебательного LC -контура в резонанс.

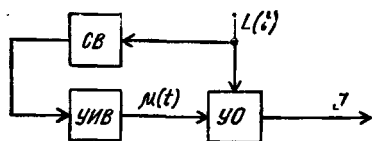


Рис. 12.10. Функциональная схема СЭУ с принципом управления по возмущению.

полнительного двигателя M , редуктора $Ред.$ Следящая система поворачивает эксцентрик $Э$ на угол, соответствующий напряжению U_f . Через систему рычагов эксцентрик поворачивает ротор конденсатора C на необходимый угол и тем самым изменяет резонансную частоту контура, приближая ее к частоте f напряжения.

Эксцентрик, система рычагов реализуют заранее определенную нелинейную характеристику компенсации $\mu_m = F(f)$ (характеристику, аналогичную изображенной на рис. 12.8, б), а система в целом обеспечивает поддержание максимального напряжения на контуре при изменении частоты f поступающего на контур напряжения. В рассматриваемой системе угол μ поворота ротора конденсатора C является управляющим воздействием, а напряжение на контуре — управляемой величиной.

Функциональная схема СЭУ с принципом управления по возмущению изображена на рис. 12.10, где приняты следующие обозначения: $УО$ — управляемый объект с экстремальной характеристикой; $L(t)$ — возмущающее воздействие, под влиянием которого изменяется экстремальное значение управляемой величины I ; $СВ$ — связь по возмущению, с помощью которой измеряется и преобразуется возмущающее воздействие $L(t)$; $УИВ$ — устройство изменения управляющего воздействия $\mu(t)$ по нелинейному закону. Достоинства и недостатки СЭУ с принципом управления по возмущению такие же, как и в обычных автоматических системах, построенных по этому принципу управления.

Системы экстремального управления с принципом управления по отклонению

Наибольшее распространение в технике нашли СЭУ с принципом управления по отклонению (замкнутые СЭУ), в которых для формирования управляющего воздействия используется либо отклонение от нуля производной управляемой величины по управляющему воздействию $dI/d\mu$ (т. е. по существу используется сама производная $dI/d\mu$), либо отклонение управляемой величины от предыдущего экстремального значения управляемой величины. Задача СЭУ состоит в нахождении и поддержании экстремального значения управляемой величины, которая в первом случае решается путем уменьшения производной

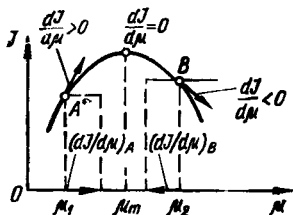


Рис. 12.11. Определение направления движения к экстремуму.

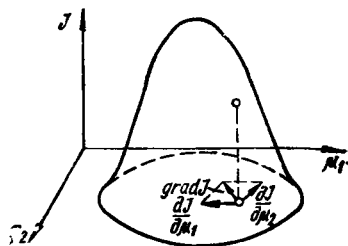


Рис. 12.12. К построению градиента функции I .

$dI/d\mu$, а во втором — путем уменьшения отклонения управляемой величины от экстремального значения.

В случае, когда I является функцией одной переменной (рис. 12.11), направление движения к экстремуму определяется знаком производной $dI/d\mu$ (в точке A $dI/d\mu > 0$, поэтому для движения в сторону экстремума следует увеличивать μ ; в точке B производная $dI/d\mu < 0$ — управляющее воздействие μ необходимо уменьшать). Признаком достижения экстремума является равенство нулю этой производной, т. е. $dI/d\mu = 0$.

В общем случае, когда число управляющих воздействий равно n , т. е. I является функцией нескольких переменных $I(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$, то условием экстремума является равенство нулю в точке экстремума частных производных $\partial I/\partial \mu_1 = 0$; $\partial I/\partial \mu_2 = 0$; ..., $\partial I/\partial \mu_n = 0$. В этом случае направление движения к экстремуму определяется градиентом функции I , т. е. вектором, проекции которого на оси координат $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ соответственно равны частным производным:

$$\text{grad } I = \bar{k}_1 \partial I / \partial \mu_1 + \bar{k}_2 \partial I / \partial \mu_2 + \dots + \bar{k}_n \partial I / \partial \mu_n,$$

где $\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n$ — единичные векторы осей, по которым отсчитываются величины $\mu_1, \dots, \mu_n$. Вектор $\text{grad } I$ направлен в сторону наибольшего увеличения (уменьшения) функции I . В точке экстремума $\text{grad } I = 0$. На рис. 12.12 показано построение $\text{grad } I$ для случая, когда I является функцией двух переменных μ_1 и μ_2 .

Для нахождения экстремума применяются поисковые и беспоисковые методы и системы. Первые применяются в случае медленного изменения критерия оптимальности I , так как обладают сравнительно небольшим быстродействием (требуется время на процесс поиска). Однако при их использовании необходима меньшая информация (достаточно знать, что функции $I(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ имеет экстремальный характер). Беспоисковые методы определения экстремума, как правило, решают задачу определения условий экстремума аналитически и не требуют времени на поисковые движения. Поэтому беспоисковые аналитические СЭУ обладают более высоким быстродействием, но требуют большей информации об управляемом процессе. Беспоисковыми являются также дифференциальные СЭУ,

в которых для достижения экстремума используется разностный сигнал, получаемый в результате смещения экстремальных характеристик объекта или его моделей [8].

12.4. Поисковые системы экстремального управления

В поисковых СЭУ задача поиска экстремума разбивается на два этапа: определение градиента; движение к точке экстремума (поиск экстремума) подачей соответствующих управляющих воздействий $\mu_1, \dots, \mu_n$. Для решения как первой, так и второй задачи разработано много способов. Обычно для определения градиента используются пробные воздействия, а для движения к экстремуму — рабочие движения.

Методы определения градиента критерия оптимальности и поиска экстремума

Для определения градиента функции I необходимо находить частные производные $\partial I / \partial \mu_i$ по отдельным управляющим воздействиям. Для этого применяются следующие методы определения частных производных $\partial I / \partial \mu_i$: метод синхронного детектирования (метод модуляции), метод производной по времени, метод запоминания экстремума, шаговый метод.

После определения частных производных $\partial I / \partial \mu_i$ (величины и направления градиента) в системе организуется рабочее движение к экстремуму (поиск экстремума). Методы поиска экстремума подразделяются на детерминированные и методы случайного поиска. К детерминированным методам относятся метод градиента, метод наискорейшего спуска, метод Гаусса — Зейделя и др.

Метод градиента. Движение к экстремуму осуществляется одновременным изменением каждого управляющего воздействия (координаты) μ_i со скоростью, пропорциональной значению соответствующей частной производной $\partial I / \partial \mu_i$. Благодаря этому в каждый момент времени скорость движения к экстремуму пропорциональна модулю градиента, а направление движения совпадает с направлением градиента. Метод градиента иллюстрируется на рис. 12.13, а, где тонкими линиями $I = \text{const}$ изображены линии постоянных значений (уровней) оптимизируемой функции I . Траектория движения AB к экстремуму по градиенту является нормалью к линиям $I = \text{const}$.

Если движение к экстремуму осуществляется шагами (рис. 12.13, б), то на каждом шаге измеряются частные производные $\partial I / \partial \mu_i$. На следующем шаге происходит одновременное изменение всех управляющих воздействий на величины, пропорциональные соответствующим частным производным. Благодаря этому вектор суммарного изменения управляющих воздействий будет соответствовать градиенту. Например, если движение начинается из точки A_1 , то шаг $A_1 A_2$ будет сделан в направлении наискорейшего изменения (например, увеличения) функции I , т. е. в направлении градиента в точке A_1 (нормаль

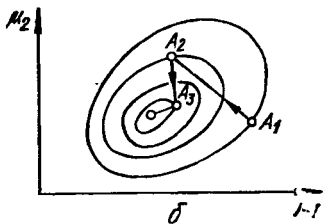
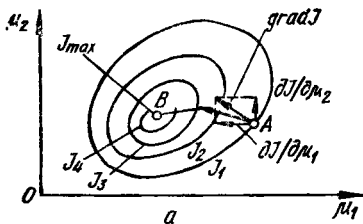


Рис. 12.13. Метод градиента:

а — непрерывное движение к экстремуму; б — движение шагами.

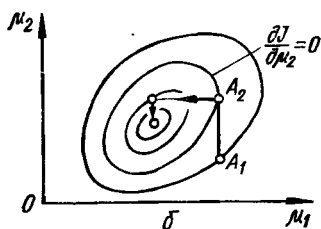
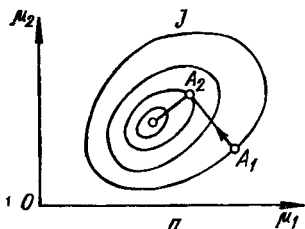


Рис. 12.14. Методы поиска экстремума:

а — наискорейшего спуска; б — Гаусса — Зейделя.

к линии уровня). Величина этого шага пропорциональна модулю градиента.

Метод наискорейшего спуска (подъема). В начальной точке A_1 (рис. 12.14, а) определяется направление градиента (нормаль к линии $I_1 = \text{const}$), а затем осуществляется движение в этом направлении до тех пор, пока не прекратится увеличение I (в случае поиска максимума), т. е. не обратится в нуль производная от I по принятому направлению движения. Шаг заканчивается в точке A_2 касания траектории движения с линией $I = \text{const}$. В точке A_2 снова измеряется градиент и движение осуществляется по новому направлению, перпендикулярному предыдущему, и т. д. Метод наискорейшего спуска во многих случаях позволяет значительно сократить время поиска экстремума.

Метод Гаусса — Зейделя (метод покоординатной оптимизации). Из начальной точки A_1 (рис. 12.14, б) сперва осуществляется движение по одной координате (в результате изменения μ_2) до тех пор, пока не будет достигнут экстремум (точка A_2) по этой координате. Затем изменяется управляющее воздействие μ_1 до достижения экстремума и т. д. Техническая реализация метода проста, но требуется длительное время на поиск.

Метод случайного поиска. Из начальной точки делается m случайных пробных шагов. При каждом пробном шаге замеряется приращение ΔI критерия оптимальности. Шаг с наилучшим результатом запоминается и рабочий шаг делается в направлении вектора, давшего лучший результат. В новой точке опять делается m пробных шагов и выбирается «лучший» вектор и т. д. Такой метод поиска называется методом статистического градиента. Если в найденном на-

правлении делать не один шаг, а двигаться до тех пор, пока ΔI не изменит знака, то метод называется методом статистического наискорейшего спуска.

При числе управляющих воздействий μ_i более трех случайный поиск имеет большее быстроедействие, чем рассмотренные детерминированные методы поиска [13]. Второе достоинство метода случайного поиска состоит в том, что, он, в отличие от детерминированных методов, позволяет находить глобальный экстремум при наличии нескольких экстремумов.

Иногда используют комбинацию нескольких методов поиска экстремума. Например, вдали от экстремума применяют один метод, обеспечивающий большую скорость движения к экстремуму, а затем переходят к другому методу, обеспечивающему более высокую точность поддержания экстремума.

На практике обычно методы определения градиента и методы поиска экстремума взаимообусловлены, так как их реализация связана одним техническим решением.

Метод синхронного детектирования. Экстремальные системы управления с синхронным детектированием

Метод синхронного детектирования (метод модуляции) получил наибольшее распространение при построении СЭУ. Этот метод позволяет определять составляющие градиента (частные производные) и в соответствии с их знаками и значениями выполнять рабочие движения (изменения управляющих воздействий μ_i) с целью достижения экстремума.

Рассмотрим случай, когда критерий оптимальности является функцией одной переменной $I(\mu)$. Допустим, что объект O является безынерционным (рис. 12.15, а, $K(p) = 1$), а его экстремальная харак-

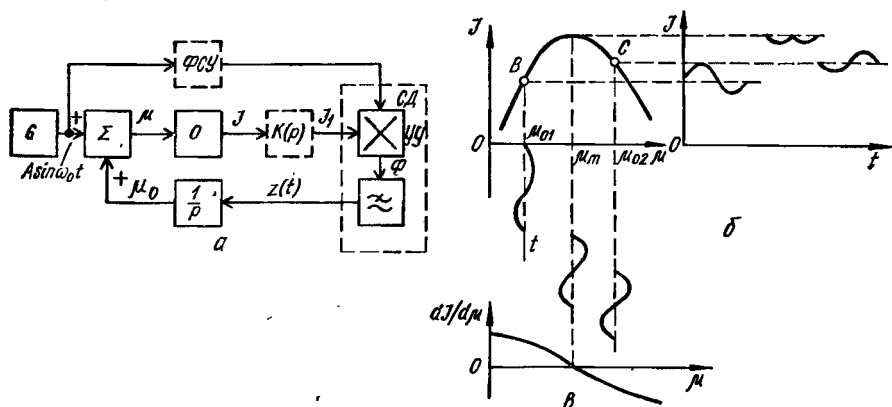


Рис. 12.15. Функциональная схема СЭУ с синхронным детектированием (а), формы колебаний в системе (б) и зависимость $dI/d\mu = f(\mu)$ (в).

теристика (рис. 12.15, б) представляет собой кривую второго порядка

$$I(\mu) = a_0 + a_1\mu + a_2\mu^2. \quad (12.1)$$

Первая производная определяется выражением

$$dI/d\mu = a_1 + 2a_2\mu; \quad (12.2)$$

зависимость ее от μ показана на рис. 12.15, в.

Как отмечалось, направление движения к экстремуму определяется знаком производной $dI/d\mu$, а скорость движения в соответствии с методом градиента, пропорциональна значению этой производной. Поэтому задача состоит в том, чтобы с помощью технических средств непрерывно определять знак и значение производной $dI/d\mu$, т. е. реализовать характеристику $dI/d\mu = f(\mu)$, изображенную на рис. 12.15, в. Для этого на вход объекта от генератора G подаются пробные гармонические колебания небольшой амплитуды $\mu_n = A \sin \omega_0 t$. Одновременно на объект поступает управляющее воздействие μ_0 , определяющее рабочую точку на экстремальной характеристике. Результирующее воздействие на входе объекта при этом равно $\mu = \mu_0 + A \sin \omega_0 t$. При подаче пробного сигнала выходной сигнал объекта в окрестностях рабочей точки может быть представлен рядом Тейлора

$$\begin{aligned} I_{\text{вых}} &= I(\mu_0 + A \sin \omega_0 t) = \\ &= I(\mu_0) + dI/d\mu|_{\mu=\mu_0} \cdot A \sin \omega_0 t + \frac{1}{2} (d^2 I/d\mu^2)|_{\mu=\mu_0} \cdot (A \sin \omega_0 t)^2 + \dots, \end{aligned} \quad (12.3)$$

т. е. выходной сигнал имеет постоянную составляющую $I(\mu_0)$, основную гармонику $I_1 = dI/d\mu|_{\mu=\mu_0} \cdot A \sin \omega_0 t$ и кратные гармоники, что видно, например, из выражения $\sin^2 \omega_0 t = (1/2)(1 - \cos 2\omega_0 t)$. Амплитуда первой гармоники на выходе объекта равна $I_{1m} = dI/d\mu|_{\mu=\mu_0} \cdot A$, т. е. пропорциональна значению производной $dI/d\mu$ в рабочей точке. Фаза же первой гармоники по отношению к фазе колебаний на входе объекта определяется знаком первой производной $dI/d\mu|_{\mu=\mu_0}$ в рабочей точке, т. е. зависит от того, справа или слева от экстремума находится рабочая точка. Если $\mu_0 = \mu_{01} < \mu_m$ (рабочая точка B находится слева от экстремума), то, как видно из рис. 12.15, б, фазы колебаний совпадают, а при $\mu_0 = \mu_{02} > \mu_m$ (рабочая точка C находится справа от экстремума) колебания находятся в противофазе. Когда рабочая точка совпадает с экстремумом ($\mu_0 = \mu_m$), первая гармоника равна нулю, выходной сигнал изменяется с частотой $2\omega_0$.

Следовательно, чтобы определить величину и знак производной $dI/d\mu|_{\mu=\mu_0}$, необходимо из сложного выходного сигнала объекта, определяемого выражением (12.3), выделить первую гармонику.

Как известно, амплитуду первой гармоники сигнала на выходе объекта можно определить как коэффициент при первом члене разложения функции $I(\mu)$ в ряд Фурье

$$I_{1m} = (\omega_0/\pi) \int_{t-2\pi/\omega_0}^t I(\mu) \sin \omega_0 t dt, \quad (12.4)$$

или после подстановки значения $I(\mu)$ из формулы (12.1) и значения $\mu = \mu_0 + A \sin \omega_0 t$:

$$\begin{aligned} I_{1m} &= (\omega_0/\pi) \int_{t-2\pi/\omega_0}^t [a_0 + a_1(\mu_0 + A \sin \omega_0 t) + a_2(\mu_0 + A \sin \omega_0 t)^2] \times \\ &\times \sin \omega_0 t dt = (\omega_0/\pi) \int_{t-2\pi/\omega_0}^t [a_0 + a_1\mu_0 + a_1A \sin \omega_0 t + a_2\mu_0^2 + \\ &+ a_22\mu_0A \sin \omega_0 t + a_2A^2 \sin^2 \omega_0 t] \sin \omega_0 t dt = \\ &= (\omega_0/\pi) \int_{t-2\pi/\omega_0}^t A(a_1 + 2a_2\mu_0) \sin^2 \omega_0 t dt = \\ &= (\omega_0/\pi) A(a_1 + 2a_2\mu_0) \int_{t-2\pi/\omega_0}^t \sin^2 \omega_0 t dt. \end{aligned}$$

Значение интеграла:

$$\begin{aligned} \int_{t-2\pi/\omega_0}^t \sin^2 \omega_0 t dt &= \frac{1}{2} \int_{t-2\pi/\omega_0}^t (1 - \cos 2\omega_0 t) dt = \\ &= \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{2\omega_0} \sin 2\omega_0 t \right) \Big|_{t-2\pi/\omega_0}^t = \frac{1}{2} \left[t - \frac{1}{2\omega_0} \sin 2\omega_0 t - \right. \\ &- t + \frac{2\pi}{\omega_0} + \frac{1}{2\omega_0} \sin 2\omega_0 \left(t - \frac{2\pi}{\omega_0} \right) \Big] = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2\omega_0} \sin 2\omega_0 t + \right. \\ &\left. + \frac{2\pi}{\omega_0} + \frac{1}{2\omega_0} \sin(-4\pi + 2\omega_0 t) \right] = \frac{\pi}{\omega_0}. \end{aligned}$$

Подставив полученное значение интеграла в формулу для I_{1m} , получим

$$I_{1m} = A(a_1 + 2a_2\mu), \quad (12.5)$$

или, учитывая выражение (12.2),

$$I_{1m} = AdI/d\mu|_{\mu=\mu_0},$$

т. е. в соответствии с формулой (12.4) для выделения первой гармоники из сложного выходного сигнала объекта $I(\mu_0 + A \sin \omega_0 t)$, определяемого формулой (12.3), и преобразования ее в постоянный сигнал (напряжение постоянного тока), величина I_{1m} которого пропорциональна производной $dI/d\mu$, а полярность соответствует знаку $dI/d\mu$, т. е. для технической реализации характеристики $dI/d\mu = f(\mu)$ (рис. 12.15, в), необходимо выходной сигнал $I(\mu_0 + A \sin \omega_0 t)$ объекта умножить на опорное колебание $\sin \omega_0 t$ и текущее произведение усреднить за период. Эту процедуру называют синхронным (когерентным) детектированием. Технически синхронный детектор СД представляет собой устройство умножения УУ с усредняющим фильтром Φ . На один вход СД подается сигнал с выхода объекта, а на второй — опорный сигнал $\sin \omega_0 t$ той же частоты с генератора G (рис. 12.15, а). Сигнал $z(t)$ на выходе фильтра Φ пропорционален амплитуде I_{1m} (производной $dI/d\mu$ в рабочей точке), а полярность изменя-

ется при изменении фазы первой гармоники на 180° , т. е. соответствует знаку производной $dI/d\mu$.

Сигнал $z(t)$ с выхода фильтра Φ поступает на исполнительное (обычно интегрирующее) устройство (например, двигатель), которое осуществляет рабочее изменение управляющего воздействия μ_0 от начального его значения (например, μ_{01} , рис. 12.15, б, в) до тех пор, пока сигнал $z(t)$, а следовательно, производная $dI/d\mu$ не станут равными нулю, а рабочая точка не переместится в точку экстремума, когда $\mu_0 = \mu_m$.

Выходной сигнал интегратора (управляющее воздействие) $\mu_0 = \int z(t) dt = A \int (dI/d\mu) dt$, откуда скорость изменения μ (скорость движения к экстремуму) пропорциональна производной $dI/d\mu$:

$$\dot{\mu}_0 = z(t) = AdI/dt,$$

т. е. движение к экстремуму осуществляется по методу градиента. При больших отклонениях от экстремума, когда производная $dI/d\mu$ имеет большие значения, движение к экстремуму происходит с большими скоростями, а по мере приближения к экстремуму значение производной $dI/d\mu$ и скорость движения уменьшаются.

Как видно, в процессе рабочего движения экстремальная система ведет себя как обычная система управления, сводящая к нулю ошибку — производную $dI/d\mu$. Особенность экстремальной системы проявляется в наличии пробных сигналов, с помощью которых определяется производная $dI/d\mu$. Метод синхронного детектирования применяется, когда допускается подача на вход объекта пробных колебаний и есть возможность контролировать выход объекта.

Если объект экстремального управления является инерционным, то первая гармоника на выходе объекта сдвигается по фазе относительно пробного колебания на некоторый угол φ_1 . На рис. 12.15, а инерционность объекта учтена включением последовательно с безынерционной частью объекта 0 звена с передаточной функцией $K(p)$ (звено обведено штрихами). Если объект является безынерционным, но за ним включен какой-либо элемент (корректирующее устройство, полосовой фильтр и др.), то $K(p)$ является передаточной функцией этого элемента.

Учитывая, что $K(j\omega_0) = N_1(\omega_0) e^{j\varphi_1}$, первая гармоника на выходе инерционного объекта

$$I_{1в} = I_1 K(j\omega_0) = dI/d\mu|_{\mu=\mu_0} \cdot AN_1(\omega_0) \sin(\omega_0 t + \varphi_1) = V_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_1)$$

где $V_0 = dI/d\mu|_{\mu=\mu_0} \cdot AN_1(\omega_0)$.

Если опорный сигнал на втором входе умножителя УУ совпадает по фазе с пробным, т. е. $u_{оп} \sin \omega_0 t$, то сигнал на выходе умножителя

$$I_y = V_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_1) \sin \omega_0 t = (V_0/2) [\cos \varphi_1 - \cos(2\omega_0 t + \varphi_1)].$$

После фильтрации колебаний с двойной частотой (усреднения) получаем $z(t) = (V_0/2) \cos \varphi_1$, т. е. при фазовом сдвиге, близком к $\pi/2$, сигнал $z(t)$ на выходе СД близок к нулю, хотя $dI/d\mu \neq 0$ и рабочая точка может находиться вдали от экстремума. При фазовом сдвиге $\pi/2 < \varphi_1 \leq \pi$ изменяется полярность $z(t)$ и система будет не при-

ближаться, а удаляться от экстремума (равновесное состояние $dl/d\mu = 0$, а следовательно, сама система будет неустойчива).

Чтобы устранить вредное влияние фазового сдвига, вносимого инерционным объектом и элементами системы, в тракт опорного сигнала включают фазосдвигающее устройство ФСУ (см. рис. 12.15, а). Опорный сигнал при этом $u_{оп} = \sin(\omega_0 t + \psi)$, а сигнал на выходе синхронного детектора пропорционален косинусу разности фаз, т. е. $z(t) = (V_0/2) \cos(\varphi_1 - \psi)$. Очевидно, только при выполнении условия $\varphi_1 - \psi = 0$ возможно точное достижение экстремума.

Частота пробных колебаний ω_0 выбирается значительно выше верхней границы спектра частот возмущающего воздействия L , вызывающего перемещение экстремальной характеристики. Однако при выборе слишком большой частоты ω_0 могут появиться значительные фазовые сдвиги, для компенсации которых требуются сложные фазосдвигающие устройства.

При определении производной $dl/d\mu$ методом синхронного детектирования в качестве пробных сигналов могут использоваться не только синусоидальные, но и другие периодические колебания, например, колебания типа меандр $u_{пр} = A \text{sign}(\sin \omega_0 t)$. При таком пробном сигнале опорный сигнал $u_{оп} = \text{sign}[\sin(\omega_0 t + \psi)]$, а выход синхронного детектора определяется выражением

$$z = A (dl/d\mu) [\pi/2 - (\psi - \varphi_0)].$$

Заметим, что в соответствии с формулой (12.4) выходная величина синхронного детектора представляет собой коэффициент взаимной корреляции K_{μ} между выходной l и входной $\mu = \sin \omega_0 t$ величинами объекта. Поэтому СД можно рассматривать как коррелятор и в общем случае в качестве пробных воздействий можно использовать естественные случайные изменения входной величины объекта. В этом случае производная $dl/d\mu = kR_{\mu}$, где k — коэффициент, определяемый статистическими свойствами случайного воздействия μ .

Рассмотренный метод синхронного детектирования применим и для многомерных объектов, когда критерий оптимальности является функцией нескольких управляющих воздействий $l(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$. В этом случае для определения каждой частной производной $\partial l / \partial \mu_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) используется свой канал, состоящий из генератора G , синхронного детектора СД, исполнительного устройства ИУ (рис. 12.16). Скорость изменения каждого управляющего воздействия μ_i пропорциональна значению соответствующей частной производной $\partial l / \partial \mu_i$, т. е. движение к экстремуму осуществляется по градиенту. Пробные колебания для разных каналов имеют различные частоты или отличаются по фазе на угол $\pi/2$, т. е. метод синхронного детекти-

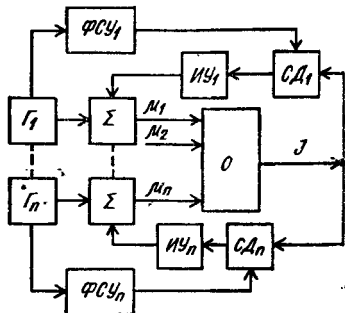


Рис. 12.16. Функциональная схема многомерной СЭУ с синхронным детектированием.

рования относится к методам оценки градиента с разделением пробных воздействий по частоте.

Метод синхронного детектирования имеет следующие достоинства: простота технической реализации определения градиента и поиска экстремума; высокая помехоустойчивость — синхронные детекторы не пропускают на выход некоррелированных с пробным сигналом помех (в том числе пробных сигналов соседних каналов), что достигается усреднением выходного сигнала множительного устройства; быстрота вычисления градиента при управлении многомерными объектами, поскольку все частные производные определяются параллельно. Недостатки метода состоят в трудности его применения при инерционных объектах и в сложности выбора частот пробных колебаний.

Пример 1. Рассмотрим экстремальную систему автоматической настройки колебательного LC -контура. Вариант функциональной схемы изображен на рис. 12.17, а. Как уже отмечалось, зависимость напряжения u на контуре от значения емкости C ($C = C_1 + C_2$) при данной частоте f поступающего напряжения имеет экстремальный характер (см. рис. 12.17, б). Максимальное значение u соответствует настройке контура в резонанс с частотой f . Задача системы состоит в автоматической настройке контура путем изменения емкости C_1 в резонанс с изменяющейся во времени частотой f поступающего на контур напряжения. Пробные колебания емкости контура создаются в результате вращения ротора конденсатора C_2 ($C_2 \ll C_1$) с постоянной скоростью двигателем M_2 , на оси которого установлен генератор опорного напряжения $ГОН$. Емкость при этом изменяется по закону $C_2 = C_{20} + C_m \sin \omega_0 t$. Двигатель M_2 и $ГОН$ образует генератор пробных колебаний $ГПК$. Пробные колебания емкости контура могут быть созданы также электронным способом, например подачей переменного напряжения частотой ω_0 на варикап — управляемую емкость закрытого $p-n$ перехода. Напряжение контура переменного тока, модулированное на амплитуде в результате изменения емкости C_2 , усиливается усилителем $У1$, пропускается через детектор VD и фильтр $\Phi 1$ (т. е. выделяется огибающая амплитуд) и подается на синхронный детектор $СД$, где умножается на напряжение, поступающее с генератора опорного напряжения. На выходе фильтра $\Phi 2$ синхронного детектора $СД$ формируется напряжение, пропорциональное производной от огибающей амплитуд напряжения контура по емкости du/dC (рис. 12.17, в). Это напряжение через усилитель $У$ поступает на двигатель M_1 . Последний вращает ротор конденсатора C_1 и тем самым изменяет его емкость (управляющее воздействие), пока производная du/dC не станет равной нулю, а контур не будет настроен в резонанс с частотой f . При изменении частоты f напряжения, поступающего на контур, экстремальная система автоматически подстраивает контур на максимум напряжения.

Экстремальную систему (рис. 12.17, а) можно рассматривать как своеобразную систему стабилизации производной du/dC на нулевом уровне, структурная схема которой изображена на рис. 12.18. На схеме усилитель $У$ и двигатель M_1 представлены аperiodическим и интегрирующим звеньями, колебательный контур, усилитель $У1$, детектор VD и фильтр $\Phi 1$ представлены каналами управления и возмущения. Оба канала содержат аperiodические звенья, обусловленные фильтром $\Phi 1$. Входной величиной канала управления является значение емкости C_1 , а выходной управляемой величиной — производная du/dC , которая, согласно рис. 12.17, в, при малых отклонениях C_1 от C_m линейно зависит от C_1 . Основным возмущающим воздействием системы является изменение частоты f поступающего напряжения, которое через канал возмущения вызывает перемещение экстремальной характеристики контура (рис. 12.17, б), рабочей точки (например, из A_0 в A_2), а следовательно, увеличение ошибки du/dC (от 0 до u_1 , рис. 12.17, в). Синхронный детектор измеряет производную du/dC напряжения u , поступающего с выхода $\Phi 1$ (точка A_1). Если пренебречь влиянием фильтра $\Phi 2$ $СД$, то $СД$ можно представить пропорциональным звеном с коэффициентом пропорциональности $k_{сд}$. В этом случае выходное напряжение $СД$ $u_{сд} = k_{сд} du/dC$, т. е. пропорционально du/dC . Напряжение $u_{сд}$ через обратную связь поступает на элемент сравнения $ЭС$, где сравнивается с задающим напряжением $u_3 = 0$. Напря-

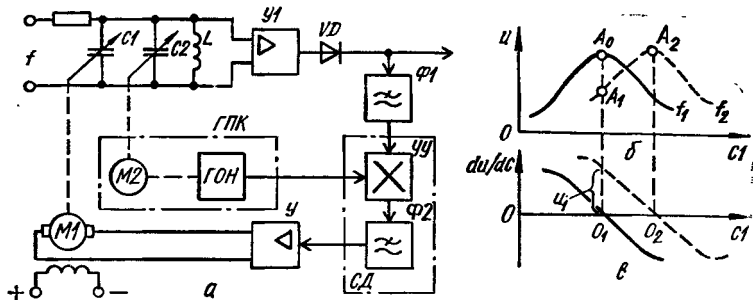


Рис. 12.17. Экстремальная система автоматической настройки колебательного контура:

а — функциональная схема системы; б — экстремальная характеристика контура; в — зависимость производной du/dc от C_1 .

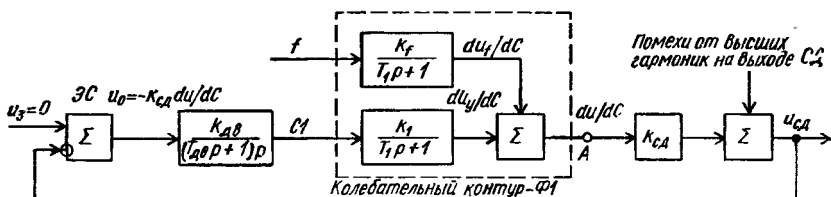


Рис. 12.18. Структурная схема экстремальной системы (рис. 12.17, а).

жене на выходе ЭС $u_0 = 0 \rightarrow u_{cd} = -k_{cd} du/dc$ является напряжением ошибки системы. Для исследования такой системы можно применить методы, разработанные для обычных (неадаптивных) систем автоматического управления.

Метод производной по времени.

Экстремальные системы с управлением по производной

Как отмечалось, для движения к экстремальной точке статической характеристики объекта необходимо определить производную $dI/d\mu$. Для этого в рассматриваемой системе предварительно определяются производные по времени dI/dt и $d\mu/dt$, а затем осуществляется деление

$$dI/d\mu = (dI/dt) : (d\mu/dt).$$

Вариант функциональной схемы экстремальной системы с управлением по производной изображен на рис. 12.19. Дифференцирование во времени величин I и μ осуществляется с помощью дифференциаторов $D1$ и $D2$ соответственно. Полученные в результате дифференцирования сигналы, пропорциональные dI/dt и $d\mu/dt$, подаются на устройство деления DIV , на выходе которого выделяется сигнал, пропорциональный производной $dI/d\mu$. Этот сигнал через усилитель $У$ поступает на исполнительный механизм $ИМ$, который вырабатывает управляющее воздействие μ . Это воздействие, поступая на управляемый объект экстремальной системы $УО$ СЭУ, изменяет в нем процесс таким образом, что производная $dI/d\mu$ стремится к нулю.

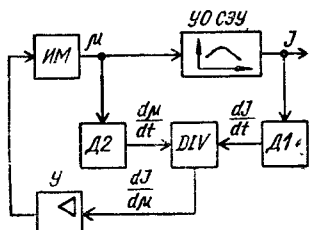


Рис. 12.19. Функциональная схема СЭУ с управлением по производной.

В системах с управлением по производной скорость движения к экстремуму пропорциональна значению производной $dI/d\mu$, а направление движения определяется ее знаком. Движение (изменение управляющего воздействия μ) прекращается, как только достигается экстремальное значение критерия оптимальности I , когда производная $dI/d\mu = 0$.

Данным системам присущи определенные недостатки. В частности, в момент включения СЭУ необходимо подавать некоторый сигнал для изменения управляющего воздействия μ , так как в противном случае $d\mu/dt = 0$, $dI/dt = 0$ и задача поиска экстремума становится неопределенной. В процессе работы также возможны случаи, когда $d\mu/dt = 0$, а следовательно, $dI/dt \rightarrow 0$. Изменение I может вызываться не только управляющим, но и различными возмущающими воздействиями (следствием чего является дрейф статической характеристики объекта), что приводит к отклонению измеренного значения производной $dI/d\mu$ от ее истинного значения, а следовательно, к увеличению времени движения к экстремуму и дополнительным погрешностям поддержания экстремума. Кроме того, дифференциаторы чувствительны к шуму. Указанные недостатки ограничивают практическое применение рассмотренных СЭУ. На рис. 12.20, а изображен другой вариант функциональной схемы СЭУ с измерением производной. В отличие от описанной выше системы здесь измеряется лишь одна производная dI/dt . Для этого служит дифференциатор D . С выхода D производная поступает на сигнум-реле CP , выходная величина которого может принимать значения $\pm U_0$. Полярность U_0 изменяется при изменении полярности входного сигнала, т. е. dI/dt .

Рассмотрим работу системы. Пусть объект O СЭУ является безынерционным, имеет статическую характеристику $I = f(\mu)$, изображенную на рис. 12.20, б, и в момент включения состояние СЭУ определяется значениями управляющего воздействия μ_1 и управляемой величины I_1 (точка M_1 на статической характеристике). Предположим, что в момент t_1 включения системы на выходе CP возникает положительный сигнал $+U_0$ (рис. 12.20, в). Этот сигнал, поступая на исполнительный механизм $ИМ$, в качестве которого обычно применяется интегратор (например, двигатель), вызывает увеличение его выходной величины — управляющего воздействия μ (рис. 12.20, г). Под влиянием μ управляемая величина I на выходе объекта будет изменяться (увеличиваться) (рис. 12.20, д) в соответствии со статической характеристикой. Производная dI/dt при изменении I от точки M_1 до M_2 уменьшается (рис. 12.20, е) и в момент времени t_2 , когда I достигает своего максимального значения, $dI/dt = 0$. Однако в точке экстремума система не остановится, а за счет зоны нечувствительности Δ сигнум-реле CP будет продолжать движение, удаляясь от экстремума в противоположную сторону до тех пор, пока отрицательное значение производной dI/dt не превысит зоны нечувствительности

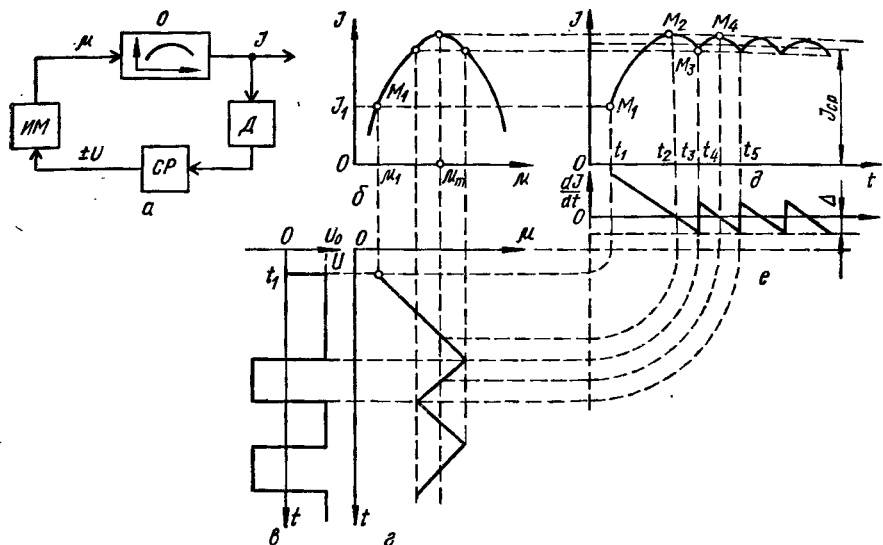


Рис. 12.20. Система экстремального управления с одним дифференциатором:
 а — функциональная схема; б — экстремальная характеристика $I = f(\mu)$ объекта 0; в — форма сигналов на выходе сигнум-реле СР; г — график изменения управляющего воздействия $\mu(t)$; д, е — кривые изменения управляемой величины $I(t)$ и ее производной dI/dt во времени.

сигнум-реле (момент времени t_3). Тогда сигнум-реле сработает и изменит полярность сигнала U_0 на своем выходе, что вызовет реверс исполнительного механизма, а следовательно, уменьшение управляющего воздействия μ . Управляемая величина I снова станет приближаться к экстремальному значению. Производная dI/dt в момент реверса t_3 изменяет знак — становится положительной и при движении от точки M_3 до M_4 уменьшается по величине. В точке M_4 (момент времени t_4) величина I снова достигает своего максимального значения, а производная $dI/dt = 0$, но благодаря зоне нечувствительности сигнум-реле движение системы будет продолжаться в прежнем направлении. В момент времени t_5 , когда отрицательное значение dI/dt превысит зону нечувствительности, сигнум-реле изменит полярность сигнала U_0 и т. д. Таким образом, в системе возникнут незатухающие колебания вокруг экстремальной точки.

Если объект СЭУ является инерционным, то в результате запаздывания управляемой величины I относительно μ увеличивается амплитуда колебаний системы, а следовательно, уменьшается среднее значение I_{cp} .

Метод запоминания экстремума. СЭУ с запоминанием экстремума

Системы с запоминанием экстремума реагируют на разность между наибольшим значением управляемой величины I_{max} , достигнутым в предыдущие моменты времени, и текущим его значением I . Управ-

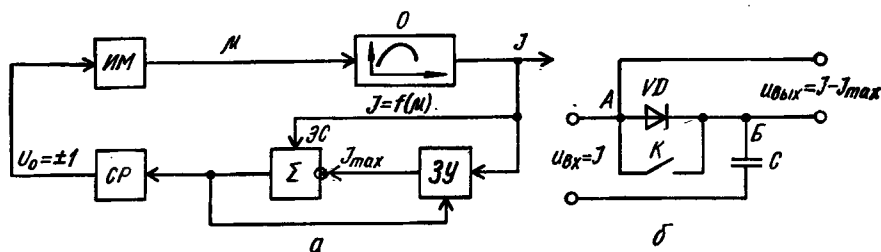


Рис. 12.21. СЭУ с запоминанием экстремума:

а — функциональная схема; б — схема запоминающего устройства.

ляемая величина I подается на запоминающее устройство ЗУ (рис. 12.21), которое фиксирует только увеличение I (запоминание происходит только при увеличении I). Сигнал $I_{\max}$ с запоминающего устройства и текущее значение управляемой величины I непрерывно сравниваются в элементе сравнения ЭС. Сигнал разности $\Delta I = I - I_{\max}$ с выхода ЭС поступает на сигнум-реле СР. До тех пор, пока $\Delta I > 0$, с выхода СР на исполнительный механизм ИМ (обычно интегрирующее устройство) поступает сигнал постоянной величины одной полярности. При этом осуществляется непрерывное движение системы к экстремуму. При достижении экстремума $\Delta I = 0$, однако сигнум-реле СР обладает зоной нечувствительности и оно не срабатывает. При этом μ продолжает изменяться в прежнем направлении (например, в сторону увеличения), вызывая уменьшение I . При прохождении через экстремум ΔI изменяет свой знак. Как только ΔI превысит значение зоны нечувствительности, сигнум-реле срабатывает, на ИМ подается сигнал другой полярности и изменяется направление движения μ (в сторону уменьшения) и т. д. В результате устанавливаются колебания системы вокруг экстремума управляемой величины.

Запоминающее устройство ЗУ можно реализовать несколькими способами. Вариант схемы ЗУ изображен на рис. 12.21, б [28]. На запоминающий конденсатор C через диод VD поступает напряжение $u_{\text{вх}}$, пропорциональное управляемой величине I системы. При увеличении I диод VD пропускает ток заряда конденсатора C . Пренебрегая падением напряжения на VD , можно считать, что потенциалы точек A и B равны, а выходное напряжение схемы $u_{\text{вых}} = I - I_{\max} = 0$. При уменьшении I потенциал точки A становится меньше потенциала точки B , диод VD запирается, на выходе схемы возникает напряжение $u_{\text{вых}} = u_{AB}$. Это напряжение пропорционально разности между текущим значением I и максимальным его значением $I_{\max}$, достигнутым в предыдущий момент (до начала уменьшения I) времени. При превышении значения $u_{\text{вых}}$ зоны нечувствительности сигнум-реле последний сработает, изменит полярность сигнала U_0 и произойдет реверс исполнительного механизма. При срабатывании СР контакт K кратковременно замыкается, конденсатор C разряжается до текущего значения $u_{\text{вх}}$, потенциалы точек A и B сравниваются и происходит сброс запомненного ранее значения $u_{\text{вх}} = I_{\max}$. При

этом конденсатор C начинает процесс запоминания нового значения $I_{\max}$ и цикл работы повторяется снова.

Недостаток СЭУ с непрерывными поисковыми колебаниями состоит в том, что они не способны точно поддерживать экстремальное значение управляемой величины. В этих системах колебания существуют даже в том случае, когда достигнут экстремум и возмущающие воздействия и характеристика объекта остаются неизменными. Для многих объектов недопустимы колебания, поэтому для управления ими не могут быть использованы поисковые экстремальные системы. Существенным недостатком поисковых экстремальных систем является их сравнительно низкая помехоустойчивость, связанная с тем, что управляющее воздействие зависит не только от рассогласования (удаления системы от экстремума), но и от возмущения, смещающего экстремальную характеристику в вертикальном направлении. Время, необходимое для поисковых колебаний, с помощью которых находится экстремум, ограничивает быстродействие поисковых СЭУ. Более совершенными системами экстремального управления являются так называемые дифференциальные СЭУ, в которых поиск экстремума выполняется без непрерывных колебаний.

12.5. Беспойсковые дифференциальные системы экстремального управления

В беспойсковых СЭУ экстремум критерия оптимальности I находится и поддерживается без специальных поисковых колебаний. Беспойсковые СЭУ могут быть построены по принципу управления по возмущению (разомкнутые беспойсковые СЭУ), при помощи дифференциальных схем, с использованием аналитических методов решения задачи определения условий экстремума.

Как было показано в п. 12.3, в разомкнутых СЭУ в зависимости от значения возмущающего воздействия $L(t)$ с помощью связи по возмущению вырабатывается в соответствии с заранее определенной зависимостью $\mu_m = f(L)$ управляющее воздействие μ_m , при котором управляемая величина I принимает экстремальное значение, т. е. $I_{\max}$ находится и поддерживается без непрерывных поисковых колебаний.

Разомкнутые СЭУ чувствительны к изменениям параметров системы. Поэтому они, как правило, применяются не самостоятельно, а в комбинированных СЭУ [26]. Более широкое распространение получили дифференциальные СЭУ [18].

Дифференциальные СЭУ с моделями объекта управления

С выхода линейной инерционной части ЛИЧ объекта управляющий сигнал x поступает не только на нелинейную безынерционную его часть, но также на две модели $M1$, $M2$ нелинейной безынерционной части экстремального объекта (рис. 12.22, а). На эти модели, кроме того, подаются дополнительные смещения $+\Delta x$ и $-\Delta x$ соответственно, под влиянием которых экстремальная характеристика

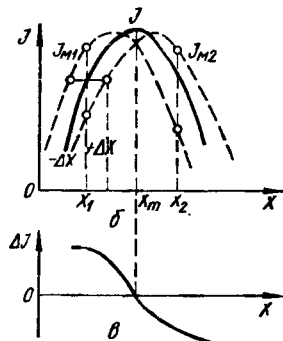
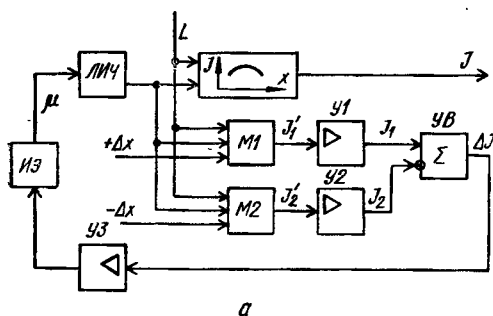


Рис. 12.22. Дифференциальная СЭУ с моделями объекта управления:
а — функциональная схема; б, в — зависимости $I = f(x)$ и $\Delta I = f(x)$ соответственно.

модели $M1$ смещается относительно характеристики объекта (кривая $J = I$ на рис. 12.22, б) влево (кривая I_{M1}), а модели $M2$ — вправо (кривая I_{M2}).

Сигналы с выходов моделей $M1$ и $M2$ через усилители $U1$ и $U2$ с одинаковыми коэффициентами усиления поступают на устройство вычитания $УВ$. Статическая характеристика $\Delta I = f(x)$ моделей $M1$ и $M2$ с усилителями и устройством вычитания проходит через нуль при $x = x_m$ (рис. 12.22, в). Разностный сигнал $\Delta I = I_1 - I_2$ с выхода устройства вычитания через усилитель $УЗ$ подается на исполнительный элемент (например, двигатель) $ИЭ$. Последний изменяет управляющее воздействие μ , стремясь уменьшить значение ΔI до нуля. При $\Delta I = 0$ управляющее воздействие $x = x_m$, когда выходная величина I управляемого объекта принимает экстремальное значение. Таким образом, в рассматриваемой СЭУ управляющее воздействие μ формируется из разностного сигнала ΔI и стремится удерживать систему, как и в случае следящей системы, в равновесном состоянии $\Delta I = 0$ и тем самым поддерживать экстремальное значение показателя качества I .

В рассматриваемой СЭУ возмущающее воздействие L влияет как на управляемый объект, так и на модели, поэтому при перемещении характеристики объекта под влиянием L будут аналогично перемещаться и характеристики моделей. Благодаря этому уменьшается влияние возмущающих воздействий на точность поддержания экстремального значения I .

Предполагая, что характеристики объекта и моделей являются параболami:

$$\begin{aligned} I &= -k_0(x - x_m)^2 + I_m; \\ I_1 &= -k_{M1}(x + \Delta x - x_m)^2 + I_m; \\ I_2 &= -k_{M2}(x - \Delta x - x_m)^2 + I_m, \end{aligned}$$

получим разностный сигнал на выходе устройства вычитания

$$\begin{aligned} \Delta I = I_1 - I_2 &= -k_{M1}(x + \Delta x - x_m)^2 + I_m + k_{M2}(x - \Delta x - x_m)^2 - I_m = \\ &= (k_{M2} - k_{M1})(x - x_m)^2 - (k_{M2} + k_{M1})2\Delta x(x - x_m) + (k_{M2} - k_{M1})\Delta x^2. \end{aligned}$$

Если характеристики объектов идентичны, т. е. $k_{m1} = k_{m2}$, то выражение для ΔI упрощается:

$$\Delta I = -4k_m \Delta x (x - x_m),$$

т. е. при постоянном смещении Δx разностный сигнал ΔI пропорционален отклонению сигнала управления x относительно требуемого значения x_m .

При поступлении разностного сигнала через усилитель на исполнительное интегрирующее устройство система, как отмечалось, будет стремиться уменьшить до нуля ΔI , разность $x - x_m$, а следовательно, в соответствии с формулой

$$x - x_m = \sqrt{(I_m - I)/k_0}$$

и отклонение показателя качества I от его экстремального значения I_m . Необходимый сигнал ΔI для управления исполнительным элементом можно получить в виде разности выходных сигналов моделиемого объекта.

Дифференциальные СЭУ обеспечивают выход системы в область экстремума без поисковых колебаний, обладают высоким быстродействием и являются более простыми по сравнению с поисковыми системами. Особенно выгодно применение дифференциальных СЭУ в случаях, когда можно построить простую модель объекта управления. В п. 12.6 рассматриваются корреляционные СЭУ, в которых объектами управления являются корреляторы. Моделями этих объектов являются корреляторы, построение которых не вызывает технических трудностей.

12.6. Корреляционные системы экстремального управления

Как известно, корреляционная функция $R(\tau)$ сигналов $x(t)$ и $x(t + \tau)$ (рис. 12.23, а)

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) x(t + \tau) dt \quad (12.6)$$

имеет экстремальный характер (рис. 12.23, б). Максимальное значение корреляционной функции $R(\tau)$ достигается при нулевом значении аргумента ($\tau = 0$). Корреляционная функция $R(\tau)$ практически определяется с помощью корреляционного устройства (коррелятора, рис. 12.23, в). Входные сигналы $x(t)$ и $x(t + \tau)$ поступают на устройство умножения УУ, где происходит их перемножение в соответствии с подынтегральным выражением формулы (12.6), а сигнал, соответствующий произведению $x(t) x(t + \tau)$, с выхода УУ подается на интегратор — сглаживающий фильтр S. Сигнал с выхода S соответствует корреляционной функции $R(\tau)$. Экстремальный характер корреляционной функции используется для построения корреляционных СЭУ (корреляционно-экстремальных систем управления).

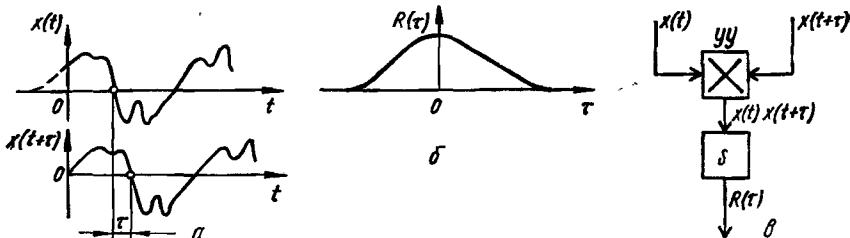


Рис. 12.23. Коррелятор:

а — сигналы $x(t)$ и $x(t + \tau)$; б — корреляционная функция $R(\tau)$; в — схема.

Корреляционная СЭУ, находя и поддерживая максимум корреляционной функции $R(\tau)$, обеспечивает совмещение во времени сигналов.

Решение задачи совмещения во времени двух сигналов имеет самостоятельное значение, например, для выравнивания временных запаздываний при прохождении сигнала через различные каналы, а также косвенно используется для определения скорости движения объекта без непосредственного контакта с неподвижной поверхностью. Последняя задача особенно важна, когда контактные методы полностью исключаются, например при определении скорости летательного аппарата относительно Земли, скорости космического корабля относительно небесных тел, измерении скорости движения горячего проката. Корреляционные СЭУ в последние годы начинают широко применяться также для определения дальности до цели, угловых координат цели в радиолокации, гидролокации, а также в авиационной и космической навигации для слежения за спутниками и космическими кораблями, измерения скорости при мягкой посадке на Луне [4, 29].

Корреляционные СЭУ в навигации применимы для определения положения движущихся объектов. В этом случае задача состоит в совмещении карты местности с изображением последней на экране радиолокатора по максимуму двумерной корреляционной функции [29]. Данная задача является частной задачей распознавания образов корреляционными методами. В корреляционных СЭУ коррелятор является управляемым объектом.

Корреляционная СЭУ для выравнивания временных запаздываний сигналов

В ряде случаев сигнал $u(t)$ (рис. 12.24) от одного и того же источника (генератора) G проходит по двум каналам KI и KII , вносящим различные временные запаздывания τ_1 и τ_2 (при прохождении сигналов через каналы происходит их декорреляция). Задача состоит в том, чтобы выровнять временные запаздывания сигналов. Эта задача встречается, например, в системах автоматической компенсации помех и может быть решена с помощью корреляционной СЭУ.

Сигнал $u_1(t + \tau_1)$ с выхода канала KI проходит через блок постоянной задержки БПЗ на время τ_n , а сигнал $u_2(t + \tau_2)$ с выхода

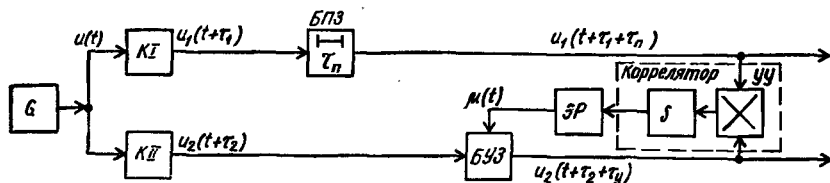


Рис. 12.24. Функциональная схема корреляционной СЗУ для выравнивания временных запаздываний сигналов.

канала KII — через блок управляемой задержки τ_y БУЗ. Сигналы с блоков задержки $u_1(t + \tau_1 + \tau_n)$ и $u_2(t + \tau_2 + \tau_y)$ поступают на устройство умножения УУ коррелятора, а сигнал, соответствующий корреляционной функции

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u_1(t + \tau_1 + \tau_n) u_2(t + \tau_2 + \tau_y) dt,$$

где $\tau = \tau_1 + \tau_n - \tau_2 - \tau_y$, с выхода интегратора S коррелятора поступает на систему экстремального управления (экстремальный регулятор) ЭР. Последняя, вырабатывая соответствующее управляющее воздействие $\mu(t)$ и изменяя время управляемой задержки τ_y , находит и поддерживает максимальное значение корреляционной функции $R(\tau)$. При этом поддерживается также равенство времен запаздывания сигналов, т. е. $\tau_1 + \tau_n = \tau_2 + \tau_y$, когда $\tau = 0$. Объектом управления в данной системе является коррелятор с блоком управляемой задержки.

Включение блока БПЗ обеспечивает возможность достижения равенства времен запаздывания в случае, когда сигнал $u_1(t + \tau_1)$ опережает по времени и в этом случае необходимо было бы выполнить сдвиг сигнала $u_2(t + \tau_2)$ во времени в сторону опережения, что физически неосуществимо (в противном случае сигнал на выходе БУЗ появлялся бы прежде, чем он был бы подан на его вход).

Автоматизация процесса слежения за максимумом корреляционной функции может осуществляться с помощью беспоисковой (например, дифференциальной) и поисковой СЗУ.

Корреляционная дифференциальная СЗУ для выравнивания временных запаздываний сигналов

В рассматриваемой СЗУ (рис. 12.25, а) использован принцип сдвига характеристик: кроме управляемого объекта — коррелятора 1 — включена модель объекта — коррелятор 2, характеристика которого $R_2(\tau_y - \tau_{ym2})$ смещена относительно характеристики $R_1(\tau_y - \tau_{ym1})$ коррелятора 1 на $\Delta\tau$ (рис. 12.25, б). Это смещение достигнуто включением элемента постоянного запаздывания $\Delta\tau$ в цепь подачи сигнала $u_2(t + \tau_2 + \tau_y)$ на умножитель коррелятора 2. Действительно, корреляционные функции, формируемые корреляторами 1 и 2, опреде-

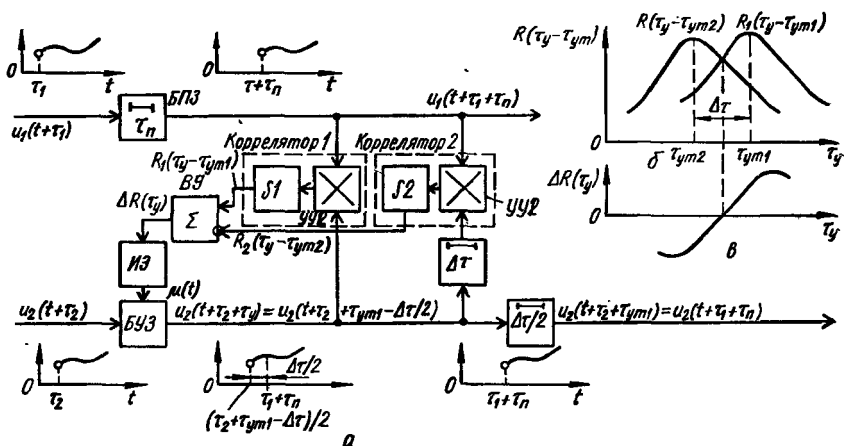


Рис. 12.25. Корреляционная дифференциальная СЭУ для выравнивания временных запаздываний сигналов:

а — функциональная схема СЭУ; б — статические экстремальные характеристики корреляторов 1 и 2; в — статическая характеристика корреляторов 1 и 2 с устройством вычитания.

ляются соответственно формулами

$$\left. \begin{aligned} R_1(\tau_y - \tau_{ym1}) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u_1(t + \tau_1 + \tau_n) u_2(t + \tau_2 + \tau_y) dt; \\ R_2(\tau_y - \tau_{ym2}) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u_1(t + \tau_1 + \tau_n) u_2(t + \tau_2 + \tau_y + \Delta\tau) dt, \end{aligned} \right\} \quad (12.7)$$

где τ_{ym1} и τ_{ym2} — значения управляемых задержек, при которых достигаются максимумы корреляционных функций.

Для определения τ_{ym1} и τ_{ym2} составим уравнения в соответствии с формулами (12.7), являющиеся условиями достижения экстремальных значений корреляционных функций:

$$\begin{aligned} \tau_1 + \tau_n - \tau_2 - \tau_{ym1} &= 0; \\ \tau_1 + \tau_n - \tau_2 - \tau_{ym2} - \Delta\tau &= 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} \tau_{ym1} &= \tau_1 + \tau_n - \tau_2; \\ \tau_{ym2} &= \tau_1 + \tau_n - \tau_2 - \Delta\tau, \end{aligned} \right\} \quad (12.8)$$

т. е., действительно, экстремальные характеристики корреляторов 1 и 2 с учетом элемента задержки $\Delta\tau$ сдвинуты на $\Delta\tau$, т. е. $\tau_{ym1} - \tau_{ym2} = \Delta\tau$. Сигналы, соответствующие корреляционным функциям $R_1(\tau_y - \tau_{ym1})$ и $R_2(\tau_y - \tau_{ym2})$, поступают на вычитающее устройство ВУ, на выходе которого возникает сигнал

$$\Delta R(\tau_y) = R_1(\tau_y - \tau_{ym1}) - R_2(\tau_y - \tau_{ym2}).$$

Статическая характеристика $\Delta R(\tau_y)$ корреляторов 1 и 2 с учетом вычитающего устройства проходит через 0 при $\tau_y = \tau_{ym1} - \Delta\tau/2$

(рис. 12.25, в). Сигнал $\Delta R(\tau_y)$ поступает на исполнительный элемент ИЭ (например, интегратор), на выходе которого вырабатывается управляющее воздействие $\mu(t)$. Это воздействие, влияя на блок управления задержкой БУЗ, изменяет время задержки τ_y таким образом, что $\Delta R(\tau_y)$ стремится к нулю. При $\Delta R(\tau_y) = 0$, как видно из рис. 12.25, б, в, $\tau_y = \tau_{ym1} - \Delta\tau/2$; т. е. сигнал $u_2(t + \tau_2 + \tau_y)$ опережает во времени на $\Delta\tau/2$ сигнал $u_1(t + \tau_2 + \tau_n)$. Чтобы обеспечить равенство временных задержек, достаточно включить элемент постоянной задержки $\Delta\tau/2$ в цепь сигнала $u_2(t + \tau_2 + \tau_y)$, как показано на рис. 12.25, а. На выходе второго канала сигнал $u_2(t + \tau_2 + \tau_{ym1})$, или после подстановки значения τ_{ym1} из выражения (12.8), $u_2(t + \tau_1 + \tau_n)$ совпадает по времени с сигналом $u_1(t + \tau_1 + \tau_n)$ на выходе первого канала. На рис. 12.25, а временные соотношения сигналов в различных точках системы изображены графиками для случая, когда разностный сигнал (ошибка) системы $\Delta R(\tau_y) = 0$.

Разностная характеристика $\Delta R(\tau_y)$ в области равновесия системы [$\Delta R(\tau_y) = 0$] имеет значительно большую крутизну, чем характеристика объекта в области экстремума, что определяет более высокую чувствительность дифференциальной системы к изменениям управляющего воздействия τ_y .

Корреляционная СЭУ с синхронным детектированием для выравнивания временных запаздываний сигналов

В тех случаях, когда допустимы незначительные колебания времени запаздывания сигнала, для выравнивания временных запаздываний сигналов возможно применение поисковой корреляционной СЭУ, в частности системы с синхронным детектированием (рис. 12.26). От генератора G на блок управляемой задержки БУЗ подаются пробные гармонические колебания $U_m \sin \omega_0 t$, под влиянием которых управляемая задержка τ_y совершает колебания небольшой амплитуды. Одновременно на БУЗ с исполнительного элемента ИЭ поступает управляющее воздействие, которое определяет постоянную составляющую управляемой задержки, а следовательно, рабочую

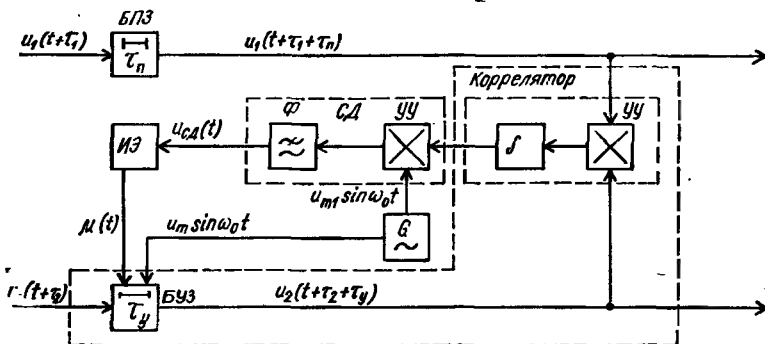


Рис. 12.26. Функциональная схема корреляционной СЭУ с синхронным детектированием для выравнивания запаздываний сигналов.

точку на экстремальной характеристике $R(\tau_y - \tau_{ym})$ коррелятора. Сигнал с выхода коррелятора, содержащий постоянную составляющую, основную (с частотой ω_0) и кратные гармоники, подается на один вход синхронного детектора $СД$. На второй вход $СД$ с генератора G подается опорный сигнал $U_{m1} \sin \omega_0 t$. Сигнал $u_{сд}(t)$ на выходе фильтра Φ синхронного детектора пропорционален производной $dR(\tau_y - \tau_{ym})/d\tau_y$ в рабочей точке экстремальной характеристики, а его полярность соответствует знаку производной. Этот сигнал, поступая на исполнительный элемент $ИЭ$, изменяет управляющее воздействие $\mu(t)$, а следовательно, значение управляемой задержки τ_y до тех пор, пока сигнал $u_{сд}(t)$ не станет равным нулю, а рабочая точка не переместится в точку экстремума корреляционной характеристики, когда разность времен запаздывания сигналов $\tau_1 + \tau_n - \tau_2 - \tau_y = 0$.

Корреляционная СЭУ для измерения скорости движения

Как отмечалось, корреляционные СЭУ могут быть использованы для измерения скорости летательного аппарата относительно земли, космического аппарата относительно небесных тел, для измерения скорости горячего проката и т. д. Ниже корреляционный метод измерения скорости рассматривается на примере корреляционной СЭУ для измерения скорости движения прокатываемого металла. Описываемая система применима в своей основе также для измерения скорости движения любых поверхностей, сред и объектов. Сущность корреляционного метода измерения скорости движения проката состоит в следующем [29]. На поверхность движущегося со скоростью V металла проектируются от двух осветителей 01 и 02 (рис. 12.27) через оптическую систему два резких световых штриха, перпендикулярных направлению движения полосы. Штрихи расположены на

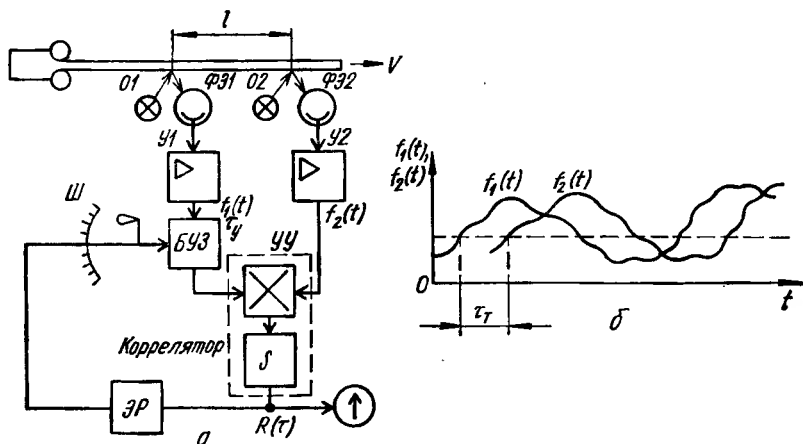


Рис. 12.27. Корреляционная СЭУ для бесконтактного измерения скорости движения проката:

а — функциональная схема; б — формы сигналов.

фиксированном расстоянии l один от другого по направлению прокатки. Отражаясь от поверхности движущегося металла, свет попадает на фотоэлементы $\Phi Э1$ и $\Phi Э2$. Неоднородности отражающей поверхности металла вызывают случайные колебания фототоков $i_{\Phi 1}(t)$ и $i_{\Phi 2}(t)$ элементов $\Phi Э1$ и $\Phi Э2$. Фототоки усиливаются соответственно усилителями $У1$ и $У2$. Случайный сигнал $f_2(t)$ с выхода $У2$ непосредственно, а сигнал $f_1(t)$ с выхода $У1$ через блок управляемой задержки $БУЗ$ поступают на устройство умножения $УУ$ коррелятора. При указанном на рис. 12.27, а направлении движения металла сигнал $f_2(t)$ повторяет сигнал $f_1(t)$ с некоторым транспортным запаздыванием τ_r (рис. 12.27, б), равным $\tau_r = l/V$ (V — скорость движения проката). В реальных условиях сигналы $f_1(t)$ и $f_2(t + \tau_r)$ несколько отличаются друг от друга, т. е. $f_1(t) \approx f_2(t + \tau_r)$. На выходе интегратора S коррелятора формируется сигнал, соответствующий корреляционной функции

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f_1(t + \tau_y) f_2(t + \tau_r) dt,$$

максимальное значение которой достигается при $\tau = \tau_y - \tau_r = 0$, т. е. при равенстве управляемой задержки τ_y времени транспортного запаздывания: $\tau_y = \tau_r$. Максимальное значение корреляционной функции $R(\tau)$ автоматически поддерживается с помощью поискового или беспоискового экстремального регулятора ЭР, который, воздействуя на блок управляемой задержки $БУЗ$, изменяет соответствующим образом величину τ_y . Блок управляемой задержки может быть выполнен, например, в виде магнитной ленты или магнитного барабана с читающей головкой, которую можно перемещать с помощью ходового винта. Время управляемой задержки определяется временем прохождения магнитного носителя между записывающей и читающей головками или при постоянной скорости движения магнитного носителя расстоянием между головками. Значение измеряемой скорости проката можно отсчитывать непосредственно по шкале III , нанесенной на $БУЗ$.

Рассмотренная корреляционная СЭУ автоматически отслеживает изменения скорости движения проката.

Корреляционная дифференциальная СЭУ для измерения скорости проката

Объектом управления системы (рис. 12.28) является коррелятор 1, а моделью объекта — коррелятор 2. Сигнал $f_1(t)$ с выхода усилителя $У1$ проходит через блок управляемой задержки $БУЗ$, в котором вносится запаздывание сигнала на управляемое время τ_y . С выхода $БУЗ$ на устройство умножения коррелятора 1 сигнал $f_3(t)$ поступает непосредственно, а на устройство умножения коррелятора 2 — через блок постоянной задержки Δt . На вторые входы множительных устройств обоих корреляторов поступает сигнал $f_2(t)$ с вы-

не значению $\tau_e - \Delta\tau/2$, а значению τ_e , равному транспортному запаздыванию сигнала $f_2(t - \tau_e)$. Поэтому значение $\Delta\tau/2$ учитывается при градуировке шкалы БУЗ в единицах скорости.

Систему экстремального управления (рис. 12.28) можно упростить, исключив один из интеграторов. В этом можно убедиться, если разностную характеристику системы $\Delta R(\tau)$ записать в виде

$$\Delta R(\tau) = M[f_2(t)f_3(t)] - M[f_2(t)f_4(t)],$$

где M — знак математического ожидания, или на основании теоремы о сложении математических ожиданий в виде

$$\Delta R(\tau) = M[f_2(t)f_3(t) - f_2(t)f_4(t)]. \quad (12.9)$$

В соответствии с данной формулой разностную характеристику $\Delta R(\tau)$ можно получить, осуществив вычитание выходных сигналов устройств умножения УУ и включив интегратор S на выход устройства вычитания УВ (рис. 12.29, а).

Преобразовав выражение (12.9) к виду

$$\Delta R(\tau) = M[f_2(t)\{f_3(t) - f_4(t)\}],$$

можно выполнить дальнейшее упрощение схемы, исключив одно из множительных устройств (рис. 12.29, б).

В тех случаях, когда по каким-либо причинам нежелательно смещать точку равновесного состояния $\Delta R(\tau) = 0$ системы от точки, соответствующей экстремальному значению характеристики объекта, применяются две модели объекта. Характеристика одной модели смещается на $+\Delta\tau$, а второй модели — на $-\Delta\tau$.

Рассмотренные корреляционные СЭУ могут быть использованы не только для измерения скорости проката, но и для измерения скорости полета летательных аппаратов относительно земли, космических аппаратов относительно небесных тел. Для измерения скорости полета самолета на его борту устанавливается передатчик СВЧ, излучающая рупорная антенна которого направлена перпендикулярно поверхности земли. Отраженные от некоторой поверхности земли сигналы воспринимаются двумя разнесенными на расстояние l приемными рупорными антеннами. Сигналы на выходе приемников передней и задней антенн идентичны по форме, но сдвинуты относительно друг друга на время τ_r , равное времени пролета самолетом расстояния $l/2$.

С помощью корреляционной СЭУ определяется τ_r , а следовательно, и скорость полета самолета.

Корреляционные СЭУ успешно используются для измерения расстояния, в частности для автоматического измерения дальности до цели с помощью радиолокаторов с непрерывным излучением (система сопровождения с дискриминатором с задержанной синхронизацией), определения высоты полета и т. д. [4, 29]. В последние годы корреляционный метод измерения расстояния получил широкое развитие,

благодаря чему повысилась точность измерения расстояний (так, измерение расстояний до 3300 км обеспечивается с точностью ± 1 м) [29].

С помощью корреляционных СЭУ также решаются задачи измерения угловых координат цели (корреляционные радиointерферометры) и другие задачи.

Новые возможности повышения качества СЭУ, в частности корреляционных экстремальных систем, открываются с внедрением в эти системы микропроцессоров. При этом также расширяется область применения экстремальных систем управления.

- Автоколебания 308, 311, 324
— устойчивые 311, 324, 327, 329
— неустойчивые 311, 327, 329
Автоматическая система 3, 9
— — замкнутая 15
— — комбинированная 19
— — преобразующая 28
— — программная 24
— — разомкнутая 10, 14
— — следящая 24
— — стабилизирующая 23
— — экстраполяции 28, 266, 268, 271
Адаптивные системы 385
Автоматическое управляющее устройство 9, 11, 16
Алгебраическая форма комплексной передаточной функции 68
Алгоритм управления 9
— функционирования 5, 23
Анализ систем при случайных воздействиях 197
Аналог критерия Гурвица 258, 298
Аргумент комплексной передаточной функции 69, 71, 77

Беспоисковые системы экстремального управления 409
Билинейное преобразование 258, 259, 298

Весовые коэффициенты 246
Вибрационная линеаризация 330
Воздействие 6
— возмущающее 6
— задающее 6, 10, 15
— управляющее 8, 9
Время регулирования 108
— установления 108

Графический метод анализа систем 174

Декада 78
Динамика систем автоматического управления 35
Динамическое звено 35
— — аperiodическое 37, 46
— — дифференцирующее 44
— — интегрирующее 44, 49
— — запаздывающее 45
— — колебательное 43, 48
— — пропорциональное 42, 46

Дискретная система 31, 214
Дискретное преобразование Лапласа 236
— D-преобразование 236
— D-преобразование 237
— z-преобразование 243
— Z-преобразование 244
Дискретный элемент 215
Задача оптимального управления 343, 350
Закон экстраполяции 266
Запаздывание 45, 290, 291—304
Запас устойчивости системы 102, 106

Импульсная модуляция 217
— — амплитудная 217, 218
— — временная 217, 219
— — широтная 217, 219
Импульсная переходная функция 39, 328
— система автоматического управления 217
— система экстраполяции 266, 271
Импульсный элемент 217
— — амплитудный 218
— — временной 218, 219
— — простейший 227
— — широтный 218, 219
— — параметры 219
Инвариантность 14, 22, 182
— ошибки относительно возмущающего воздействия 184
— ошибки относительно задающего воздействия 188
Интегральные оценки качества 122, 265
Итерационная система 196

Качество автоматических систем 107
— — — импульсных 260, 264
— — — непрерывных 107
— — — нелинейных 338
— — — цифровых 300
Квазиоптимальные системы 384
Комбинированные автоматические системы 19, 182
Компенсационный канал 11, 20, 186
Компенсация нелинейности 339
Контур адаптации 386, 387
— — замкнутый 387, 395
— — разомкнутый 387, 394

Корректирующие устройства 132

- — нелинейные 331
- — параллельные 134, 165
- — переменного тока 151
- — последовательные 134, 135, 142, 147

— — постоянного тока 135, 142, 147

— — псевдолинейные 335

Корреляционная система экстремального управления 411

— — — для выравнивания временных запаздываний сигналов 412, 413, 415

— — — для измерения скорости движения 416, 417

Коэффициенты гармонической линеаризации 317

— ошибок 124

Критерий оптимальности 348

Критерии устойчивости 93

— — алгебраические 93

— — В. М. Попова 312

— — Гурвица 93

— — логарифмический частотный 104

— — Найквиста—Михайлова 96

— — частотные 96

Линеаризация нелинейных уравнений 33

Логарифмический масштаб частоты 77, 78

Математическая модель человека-оператора 270

Метод анализа систем с местными обратными связями 173, 174

— динамического программирования 352

— синхронного детектирования 399

Методика построения логарифмических частотных характеристик 78

Методы исследования нелинейных систем 309

— поиска экстремума 397

— построения кривой переходного процесса 109, 260

Модифицированное z -преобразование 243

Модуль комплексной передаточной функции 69, 71, 77

Наклон логарифмической амплитудной частотной характеристики 79

Нелинейности 33, 305, 339

Нелинейные системы автоматического управления 305

Обратная связь 165

— — гибкая 166

— — главная 17, 20

— — жесткая 166

— — местная 165

— — отрицательная 51

Объект управления 9

Ограничения 350

Октава 78

Оптимальное управление 350

Оптимальные системы 343

— — по быстрдействию 352, 360

Относительный масштаб времени 230, 234

Передаточная функция

— — астатической системы 58

— — дискретная замкнутой импульсной системы 254

— — — замкнутой цифровой системы 295

— — — параллельно соединенных цепей 252

— — — последовательно соединенных цепей 251

— — — разомкнутой импульсной системы 248

— — — разомкнутой цифровой системы 291

— — замкнутой системы по отношению к возмущающему воздействию 56

— — — системы по отношению к задающему воздействию 56

— — звена, охваченного обратной связью 51

— — комплексная 67

— — параллельного соединения звеньев 50

— — последовательного соединения звеньев 50

— — преобразованная комплексная 313

— — системы по ошибке 57

— — статической системы 58

— — формирующего элемента 228

— — эквивалентная комплексная цепи переменного тока 157

Перерегулирование 108

Переходная составляющая ошибки 110

Переходная функция 36, 38

— — импульсная 36, 39

Переходный процесс 107

Повышение порядка астатизма 190

Поисковые системы экстремального управления 397

— — — с запоминанием экстремума 407

— — — с синхронным детектированием 399

— — — с управлением по производной 405

Показательная форма комплексной передаточной функции 69

Предельная импульсная система 290

Преобразование структурной схемы 53, 55

Преобразователи непрерывных величин в цифровой код 276

— цифрового кода в непрерывные величины 283

Приведенная непрерывная часть импульсной системы 231

Принцип максимума 356, 365

Принципы управления 9

— — по возмущению 10

— — по отклонению 15

— — комбинированный 19

Разложение изображения ошибки на элементарные дроби 109

— z-изображения в степенной ряд 261

Разностные уравнения 235

Разность 235

Релейная система 305

Решетчатая функция 233

Самоадаптирующиеся системы управления 388

— — автоматической оптимизации 392

— — со стабилизацией качества 389

Сельсин 25

Синтез 210

— статистический оптимальной системы 210

— статистический оптимальных параметров системы 211

— управляющего устройства оптимальной системы 377

Система автоматического регулирования 9

Системы автоматического управления 9, 23

— — — адаптивные 31, 385

— — — астатические 30

— — — дискретные 31, 214

— — — импульсные 214

— — — линейные 32

— — — нелинейные 32, 305

— — — оптимальные 243

— — — оптимальные по быстрдействию 360

— — — самоадаптирующиеся 389

— — — статические 28

— — — цифровые 274

— — — экстремальные 392

Спектральная плотность ошибки 202

Среднеквадратическая ошибка 201

Схема системы 6

— — принципиальная 6, 12, 17

— — структурная 45

— — функциональная 6, 10, 16

— эквивалентная импульсной системы 227

Теорема об n интервалах 363

Управление 9

Управляемая величина 9

Уравнение динамики 37

— — аperiodического звена 37, 46

— — дифференцирующего звена 44

— — замкнутой импульсной системы 252

— — замкнутой непрерывной системы 65

— — интегрирующего звена 44, 49

— — колебательного звена 43, 48

— — пропорционального звена 42

— — разомкнутой импульсной системы 244, 248

— — разомкнутой непрерывной системы 65

Условие абсолютной инвариантности 184, 188

— устойчивости 91, 256, 297

— физической реализуемости 187, 290

Установившиеся ошибки системы 58, 61, 109, 121

Устойчивость системы 89

— — импульсной 256

— — линейной 89

— — нелинейной 310, 312, 324

— — цифровой 297

Фазовая граница устойчивости 397

Фазовая траектория 345, 378

Фиксатор 218, 229

Формирующий элемент 227

Характеристическое уравнение 91

— — преобразованное 258, 298

Частотные характеристики 67

— — амплитудные 69

— — астатической системы 76

— — динамических звеньев 70—77

— — логарифмические 77

— — статической системы 75

— — фазовые 69

Эквивалентный комплексный коэффициент усиления 315

Экстремальные системы 392

Экстраполяторы 266

Электромагнитный усилитель мощности 6, 46

1. Ажогин В. В., Костюк В. И. Оптимальные системы цифрового управления технологическими процессами.— К. : Техніка, 1982.— 174 с.
2. Антамонов Ю. Г. Синтез оптимальных систем.— К. : Наук. думка, 1972.— 320 с.
3. Артемьев В. М., Гане В. А., Степанов В. Л. Управление в системах с разделением времени.— Минск : Вышэйш. шк., 1982.— 224 с.
4. Белоглазенко И. Н., Тарасенко В. П. Корреляционно-экстремальные системы.— М. : Сов. радио, 1974.— 392 с.
5. Белянский П. В., Сергеев В. Г. Управление наземными антеннами и радиотелескопами.— М. : Сов. радио, 1980.— 280 с.
6. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования.— М. : Наука, 1972.— 768 с.
7. Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления.— М. : Наука, 1969.— 408 с.
8. Васильев В. М. Дифференциальные системы экстремального регулирования.— К. : Изд-во АН УССР, 1963.— 72 с.
9. Вершинин О. Е. Применение микропроцессоров для автоматизации технологических процессов.— Л. : Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1986.— 208 с.
10. Воронов А. А. Основы теории автоматического управления.— М. : Энергия.— Т. 1.— 1980.— 312 с.; Т. 2.— 1981.— 304 с.
11. Гостев В. И. Корректирующие четырехполосники с прерывателями.— К. : Техніка, 1965.— 172 с.
12. Грубов В. И., Ивахненко А. Г., Мандровский-Соколов Б. Ю. Промышленная кибернетика.— К. : Техніка, 1968.— 448 с.
13. Джеймс Х., Никольс Н., Филипс Р. Теория следящих систем.— М.: Изд-во иностр. лит., 1953.— 464 с.
14. Джурю Э. Импульсные системы автоматического регулирования : Пер. с англ.— М. : Мир, 1963.— 456 с.
15. Динамика следящих приводов / Под ред. Л. В. Рабиновича.— М. : Машиностроение, 1982.— 496 с.
16. Зайцев Г. Ф. Анализ линейных импульсных систем автоматического регулирования и управления.— К. : Техніка, 1967.— 164 с.
17. Зайцев Г. Ф. Коррекция систем автоматического управления постоянного и переменного тока.— М. : Энергия, 1969.— 384 с.
18. Зайцев Г. Ф. Синтез следящих систем высокой точности.— К. : Техніка, 1971.— 202 с.
19. Зайцев Г. Ф. Теория автоматического управления и регулирования.— К. : Вища шк. Головное изд-во, 1975.— 423 с.
20. Зайцев Г. Ф., Стеклов В. К. Автоматические системы с дифференциальными связями.— К. : Техніка, 1984.— 167 с.
21. Зайцев Г. Ф., Стеклов В. К. Квазиоптимальные следящие системы.— К. : Вища шк. Головное изд-во, 1984.— 176 с.
22. Зайцев Г. Ф., Стеклов В. К. Комбинированные следящие системы.— К. : Техніка, 1978.— 264 с.
23. Зайцев Г. Ф., Стеклов В. К. Компенсация естественных нелинейностей автоматических систем.— М. : Энергоиздат, 1982.— 96 с.
24. Зайцев Г. Ф., Костюк В. И., Чинаев П. И. Основы теории автоматического управления и регулирования.— К. : Техніка, 1977.— 472 с.
25. Ивахненко А. Г. Электроавтоматика.— К. : Гостехиздат УССР, 1957.— 450 с.
26. Ивахненко А. Г. Кибернетические системы с комбинированным управлением.— К. : Техніка, 1965.— 512 с.

27. *Иващенко Н. Н.* Автоматическое регулирование.— М. : Машиностроение, 1978.— 736 с.
28. *Казакевич В. В., Родов А. Б.* Системы автоматической оптимизации.— М. : Энергия, 1977.— 288 с.
29. *Козубовский С. Ф.* Корреляционные экстремальные системы.— К. : Наук. думка, 1973.— 224 с.
30. *Коршунов Ю. М., Бибииков А. И.* Цифровые сглаживающие и преобразующие системы.— М. : Энергия, 1969.— 128 с.
31. *Костюк В. И.* Беспорядочные градиентные самонастраивающиеся системы.— К. : Техніка, 1969.— 276 с.
32. *Красовский А. А., Поспелов Г. С.* Основы автоматки и технической кибернетики.— М. : ГЭИ, 1962.— 600 с.
33. *Кринецкий И. И.* Основы авиационной автоматки.— М. : Машиностроение, 1969.— 404 с.
34. *Кротов В. Ф., Гурман В. И.* Методы и задачи оптимального управления.— М. : Наука, 1973.— 447 с.
35. *Кузин Л. Т.* Расчет и проектирование дискретных систем управления.— М. : ГИ ТИМЛ, 1962.— 648 с.
36. *Кузьмин С. З.* Цифровая обработка радиолокационной информации.— М. : Сов. радио, 1967.— 400 с.
37. *Кулебакин В. С.* Об основных задачах и методах повышения качества автоматически регулируемых систем // Тр. II Всесоюз. совещ. по теории автомат. регулирования.— М., 1955.— Т. 2.— С. 184—207.
38. *Куцневич В. М.* Импульсные самонастраивающиеся и экстремальные системы автоматического управления.— К. : Техніка, 1966.— 284 с.
39. *Куропаткин П. В.* Теория автоматического управления.— М. : Высш. шк., 1973.— 528 с.
40. *Кухтенко А. И.* Проблема инвариантности в автоматике.— К. : Гостехиздат УССР, 1963.— 376 с.
41. *Летов А. М.* Аналитическое конструирование регуляторов I, II, III // Автоматика и телемеханика.— 1960.— Т. 21, № 4.— С. 436—441; № 5.— С. 561—568; № 6.— С. 661—665.
42. *Макаров И. М., Менский Б. М.* Линейные автоматические системы.— М. : Машиностроение, 1982.— 504 с.
43. *Мандровский-Соколов Б. Ю., Туник А. А.* Системы экстремального управления при случайных возмущениях : Справочник.— К. : Наук. думка, 1970.— 172 с.
44. *Мееров М. В.* Синтез структур систем автоматического регулирования высокой точности.— М. : Физматгиз, 1959.— 420 с.
45. *Менский Б. М.* Принцип инвариантности в автоматическом регулировании и управлении.— М. : Машиностроение, 1972.— 248 с.
46. *Новоселов Б. В.* Проектирование квазиоптимальных следящих систем комбинированного регулирования.— М. : Энергия, 1972.— 200 с.
47. *Нелинейные корректирующие устройства* в системах автоматического управления / Под ред. Ю. И. Топчеева.— М. : Машиностроение, 1971.— 463 с.
48. *Олейников В. А., Зотов Н. С., Пришвин А. М.* Основы оптимального и экстремального управления.— М. : Высш. шк., 1969.— 296 с.
49. *Сборник задач и примеров* по теории автоматического управления / В. А. Олейников, Н. С. Зотов, А. М. Пришвин, Н. В. Соловьев.— М. : Высш. шк., 1969.— 198 с.
50. *Осмоловский П. Ф.* Итерационные многоканальные системы автоматического управления.— М. : Сов. радио, 1969.— 256 с.
51. *Павлов А. А.* Синтез релейных систем, оптимальных по быстродействию.— М. : Наука, 1966.— 390 с.
52. *Павлов В. В.* Инвариантность и автономность нелинейных систем управления.— К. : Наук. думка, 1971.— 272 с.
53. *Петров Б. Н.* О применении условий инвариантности. Выступление по анализу качества // Тр. II Всесоюз. совещ. по теории автомат. регулирования.— М., 1955.— Т. 2.— С. 241—246.
54. *Петров Б. Н., Кухтенко А. И.* Структура абсолютно инвариантных систем и условия их физической осуществимости // Теория инвариантности в системах автоматического управления.— М., 1964.— С. 26—48.

55. *Перов В. П.* Расчет радиолокационных следающих систем с учетом случайных воздействий.— Л. : Судпромгиз, 1961.— 168 с.
56. *Математическая теория оптимальных процессов* / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко.— М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961.— 391 с.
57. *Попов Е. П., Пальтов И. П.* Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем.— М. : Физматгиз, 1960.— 792 с.
58. *Пугачев В. С.* Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления.— М. : Физматгиз, 1960.— 884 с.
59. *Проектирование следающих систем* / Л. В. Рабинович, Б. И. Петров, В. Г. Терсков и др.— М. : Машиностроение, 1969.— 500 с.
60. *Следающие приводы* / Под ред. Б. К. Чемоданова : В 2 кн.— М. : Энергия, 1976.— Кн. 1, 2.— 480 с., 384 с.
61. *Смольников Л. П.* Синтез квазиоптимальных систем автоматического управления.— Л. : Энергия. Ленингр. отд-ние, 1967.— 168 с.
62. *Современная теория управления* / Под ред. К. Т. Леонидоса.— М. : Наука, 1970.— 512 с.
63. *Солодовников В. В.* Статистическая динамика линейных систем автоматического управления.— М. : Физматгиз, 1960.— 276 с.
64. *Солодовников В. В., Топчеев Ю. И., Крутикова Г. В.* Частотный метод построения переходных процессов.— М. : ГИТТЛ, 1955.— 196 с.
65. *Справочное пособие по теории автоматического регулирования и управления* / Под ред. Е. А. Санковского.— Минск : Вышэйш. шк., 1973.— 584 с.
66. *Теория автоматического управления* : В 2 ч. / Под ред. А. А. Воронова.— М. : Выш. шк., 1986.— Ч. 1—2.— 655 с.
67. *Теория автоматического управления* / Под ред. А. В. Нетушила.— М. : Выш. шк., 1983.— 432 с.
68. *Теория автоматического управления* / Под ред. А. С. Шаталова.— М. : Выш. шк., 1977.— 488 с.
69. *Терсков В. Г.* Основы теории расчета систем с комбинированным управлением // *Элементы и приводы силовых следающих систем* : Тр. МАИ им. С. Орджоникидзе.— М., 1961.— С. 5—45.
70. *Технические эргатические системы* / Под ред. В. В. Павлова.— К. : Вища шк. Головное изд-во, 1977.— 344 с.
71. *Ту Ю.* Современная теория управления: Пер. с англ.— М. : Машиностроение, 1971.— 472 с.
72. *Уланов Г. М.* Динамическая точность и компенсация возмущений в системах автоматического управления.— М. : Машиностроение, 1971.— 260 с.
73. *Уланов Г. М.* Статистические и информационные вопросы управления по возмущению.— М. : Энергия, 1970.— 256 с.
74. *Федоров С. М., Литвинов А. П.* Автоматические системы с цифровыми управляющими машинами.— М.; Л. : Энергия, 1965.— 224 с.
75. *Фельбаум А. А., Бутковский А. Г.* Методы теории автоматического управления.— М. : Наука, 1971.— 743 с.
76. *Хлыпало Е. И.* Нелинейные корректирующие устройства.— Л. : Энергия. Ленингр. отд-ние, 1973.— 344 с.
77. *Цибулевский И. К.* Человек как звено следающей системы.— М. : Наука, 1981.— 241 с.
78. *Цыпкин Я. З.* Теория импульсных систем.— М. : Физматгиз, 1963.— 968 с.
79. *Чинаев П. И.* Самонастраивающиеся системы.— М. : Машгиз, 1963.— 304 с.
80. *Щипанов Г. В.* Теория и методы проектирования регуляторов // *Автоматика и телемеханика*.— 1939.— № 1.— С. 19—66.
81. *Юревич Е. И.* Теория автоматического управления.— Л. : Энергия. Ленингр. отд-ние, 1975.— 410 с.

Введение	3
Глава 1. Основные понятия и определения. Принципы управления	5
1.1. Определение системы автоматического управления (САУ)	5
1.2. Основные принципы управления	9
Принцип управления по возмущению (разомкнутые САУ) (10). Принцип управления по отклонению (замкнутые САУ) (15). Принцип комбинированного управления. Пример комбинированной системы и ее анализ в статическом режиме (19).	
1.3. Классификация систем автоматического управления. Примеры	23
Классификация САУ по алгоритмам функционирования (23). Классификация САУ по свойствам в установившемся режиме (28). Классификация САУ по характеру изменения величины, определяющих работу отдельных элементов (31). Классификация САУ в зависимости от способов их настройки (31). Классификация САУ по другим признакам (32).	
1.4. Понятие о режимах работы систем автоматического управления. Линейзация нелинейных дифференциальных уравнений	33
Глава 2. Динамические характеристики звеньев и систем автоматического управления	35
2.1. Динамические звенья автоматических систем	35
Необходимость представления элементов автоматических систем динамическими звеньями. Определение динамического звена (35). Классификация и динамические характеристики звеньев (36).	
2.2. Структурные (алгоритмические) схемы автоматических систем	45
Методика составления уравнений элементов и структурной схемы системы (45).	
2.3. Передаточные функции типовых соединений звеньев	50
Передаточная функция последовательного соединения звеньев (50). Передаточная функция параллельного соединения звеньев (50). Передаточная функция звена, охваченного обратной связью (51).	
2.4. Передаточные функции систем автоматического управления в разомкнутом и замкнутом состоянии	52
Передаточная функция системы в разомкнутом состоянии (52). Передаточные функции замкнутой системы (56).	
2.5. Передаточные функции статических и астатических САУ	58
Передаточные функции по ошибке статических и астатических САУ (58). Ошибки САУ в установившихся режимах (61). Установившиеся ошибки САУ следящей системы с астатизмом первого порядка (63). Дополнительные статические ошибки САУ (64).	
2.6. Уравнения динамики систем автоматического управления	65
Уравнение динамики системы в разомкнутом состоянии (65). Уравнения динамики замкнутой системы (65).	
2.7. Частотные характеристики звеньев и систем автоматического управления	67
Комплексная передаточная функция звена (системы) (67). Амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики (69). Амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ) (70). Амплитудно-фазовые частотные характеристики динамических звеньев (73). Амплитудно-фазовые частотные характеристики САУ в разомкнутом состоянии (74).	
2.8. Логарифмические частотные характеристики звеньев и систем автоматического управления	77
Определение логарифмических частотных характеристик (77). Логарифмические частотные характеристики динамических звеньев (78). Логарифмические частотные характеристики систем автоматического управления в разомкнутом состоянии (84).	

Глава 3. Устойчивость систем автоматического управления	89
3.1. Понятие и условие устойчивости САУ	89
Определение устойчивости САУ (89). Условие устойчивости САУ (91). Понятие о критериях устойчивости САУ (93).	
3.2. Алгебраические критерии устойчивости	93
Критерий устойчивости Гурвица (93). Предельный коэффициент усиления системы (95).	
3.3. Частотные критерии устойчивости	96
Амплитудно-фазовый критерий устойчивости (критерий устойчивости Найквиста—Михайлова) (96). Логарифмический частотный критерий устойчивости (104).	

Глава 4. Качество систем автоматического управления	107
4.1. Показатели качества систем автоматического управления	107
4.2. Определение переходной и установившейся составляющих ошибки методом разложения ее изображения на элементарные дроби	109
4.3. Частотный метод анализа качества переходных процессов систем автоматического управления	112
Обоснование возможности использования частотных характеристик САУ для построения кривой переходного процесса (112). Связь между показателями качества переходного процесса и вещественной частотной характеристикой замкнутой системы (113). Приближенный метод построения переходной функции с помощью вещественных трапециoidalных частотных характеристик (114). Построение вещественной частотной характеристики замкнутой системы (119).	
4.4. Интегральные оценки качества переходного процесса САУ	122
4.5. Анализ точности САУ в установившихся режимах с помощью коэффициентов ошибок	124

Глава 5. Коррекция систем автоматического управления	130
5.1. Необходимость коррекции САУ. Понятие о коррекции	130
Противоречие между условиями повышения точности системы в установившемся и переходном режимах. Необходимость и пути коррекции САУ (130). Физический смысл введения производных от сигнала рассогласования в алгоритм управления (133).	
5.2. Коррекция САУ с помощью последовательных дифференцирующих фазопереключающих устройств постоянного тока	135
Дифференцирующий фазопереключающий RC-контур постоянного тока. Передаточная функция и частотные характеристики контура (135). Выбор параметров дифференцирующего фазопереключающего RC-контура. Возможности улучшения показателей качества САУ с помощью контура (138).	
5.3. Коррекция САУ с помощью последовательных интегрирующих устройств	142
Интегрирующий RC-контур постоянного тока. Передаточная функция и частотные характеристики контура (143). Определение параметров интегрирующего контура. Возможность повышения показателей качества САУ с помощью интегрирующего контура (145).	
5.4. Коррекция САУ с помощью последовательного интегро-дифференцирующего контура : :	147
Интегро-дифференцирующий RC-контур постоянного тока. Передаточная функция и частотные характеристики контура (147). Выбор параметров интегро-дифференцирующего контура. Возможности повышения показателей качества САУ с помощью контура (149).	
5.5. Коррекция САУ с помощью последовательных корректирующих устройств переменного тока	151
Типы корректирующих устройств переменного тока (151). Эквивалентная комплексная передаточная функция цепи переменного тока (контур несущей частоты) (157). Корректирующие RC-контуры несущей частоты (159).	
5.6. Коррекция САУ при помощи параллельных корректирующих устройств (коррекция обратными связями)	165
Возможность коррекции САУ с помощью параллельных корректирующих устройств (165). Охват обратной связью аperiodического звена (167). Охват обратной связью интегрирующего звена (170). Графический метод анализа САУ, скорректированных с помощью параллельных корректирующих устройств (174). Сравнительная оценка коррекции САУ с помощью последовательных и параллельных корректирующих устройств (180).	

Глава 6. Инвариантность комбинированных систем автоматического управления	182
6.1. Сравнение способов повышения точности систем автоматического управления : : : :	182

6.2. Условие абсолютной инвариантности ошибки относительно возмущающего воздействия и возможность его реализации в комбинированных САУ	184
6.3. Условие абсолютной инвариантности ошибки относительно задающего воздействия и возможность его реализации в комбинированных следящих системах	188
6.4. Повышение порядка астатизма комбинированной следящей системы с помощью связи по задающему воздействию Возможность повышения порядка астатизма следящей системы с помощью связи по задающему воздействию (190). Физический смысл введения производной от задающего воздействия в алгоритм управления системы (192).	190
6.5. Анализ качества комбинированных систем методом частотных характеристик	194
6.6. Следящие системы с принципом управления по отклонению и дифференциальными связями. Итерационные системы	196

Глава 7. Статистические методы исследования систем автоматического управления

7.1. Необходимость исследования САУ при случайных воздействиях с помощью статистических методов	197
7.2. Статистический метод анализа САУ Прокхождение стационарного случайного сигнала через линейную систему (199). Оценка точности системы по среднеквадратической ошибке (СКО) (201). Спектральная плотность и дисперсия ошибки системы при воздействии на систему одного полезного сигнала (203). Спектральная плотность и дисперсия ошибки системы при воздействии полезного сигнала и помехи (203). Вычисление среднеквадратической ошибки (206). Пример вычисления среднеквадратической ошибки системы (208).	199
7.3. Статистический метод синтеза оптимальных параметров САУ Задача статистического синтеза оптимальной системы (210). Статистический метод синтеза оптимальных параметров системы (211).	210

Глава 8. Импульсные системы автоматического управления

8.1. Понятие о дискретных системах, классификация дискретных систем	214
8.2. Определение импульсных систем Виды импульсной модуляции. Классификация импульсных элементов по виду модуляции. Типы импульсных систем (217). Параметры импульсного элемента (219). Система автоматического сопровождения цели по дальности импульсной радиолокационной станции (РЛС) (220). Понятие об импульсных системах с мгновенным и конечным временем съема данных (226).	217
8.3. Эквивалентная схема импульсной системы Представление импульсного элемента в виде соединения простейшего импульсного элемента и формирующего элемента (227). Передаточная функции формирующего элемента (228). Приведенная непрерывная часть системы (231).	227
8.4. Математический аппарат исследования импульсных систем Понятие о решетчатых функциях (233). Понятие о разностях решетчатых функций и разностных уравнениях (235). Дискретное преобразование Лапласа (D -преобразование) (236). Связь между дискретным и непрерывным преобразованиями Лапласа (Фурье). D -преобразование. Частотное представление решетчатой функции (237). z -Преобразование (243).	233
8.5. Уравнения и передаточные функции разомкнутых импульсных систем Реакция приведенной непрерывной части системы на последовательность мгновенных импульсов. Уравнение разомкнутой импульсной системы относительно оригиналов (244). Уравнения разомкнутой импульсной системы относительно изображений (248). Дискретная передаточная функция разомкнутой импульсной системы (248). Дискретная передаточная функция последовательно и параллельно соединенных цепей направленного действия (251).	244
8.6. Уравнения и передаточные функции замкнутых импульсных систем Уравнение замкнутой импульсной системы относительно оригиналов (252). Уравнения замкнутой импульсной системы относительно изображений. Передаточные функции замкнутой импульсной системы (254).	252
8.7. Анализ устойчивости импульсных САУ Условие устойчивости замкнутой импульсной системы (256). Критерии устойчивости импульсных САУ (257).	256
8.8. Анализ качества импульсных САУ Построение переходных процессов в замкнутой импульсной системе (260). Косвенные методы оценки качества импульсных систем (264).	260

8.9. Импульсные системы экстраполяции	266
Определение экстраполяции. Закон экстраполяции (266). Типы экстраполяторов в зависимости от закона экстраполяции (268).	
8.10. Полуавтоматические (эргатические) системы управления	270
Характеристика полуавтоматических систем управления. Математическая модель человека-оператора (270). Полуавтоматическая импульсная система экстраполяции (271).	

Глава 9. Цифровые системы автоматического управления 274

9.1. Определение цифровой САУ. Функциональные схемы цифровых систем	274
9.2. Преобразователи непрерывных величин в цифровой код и цифрового кода в непрерывную величину	276
Преобразователи непрерывных (аналоговых) величин в цифровой код (АЦП) A/D (276). Преобразователи цифрового кода в непрерывную величину D/A (283).	
9.3. Примеры цифровых автоматических систем (ЦАС)	283
Цифровые следящие системы (ЦСС) (283). САУ с микропроцессором для управления технологическим процессом (285).	
9.4. Структурные схемы ЦАС	286
Математическое описание элементов цифровых автоматических систем (286). Структурная схема ЦАС. Представление ЦАС в виде предельной импульсной системы (290).	
9.5. Передаточные функции ЦАС	291
Передаточные функции разомкнутой ЦАС (291). Передаточные функции замкнутой ЦАС (295).	
9.6. Анализ устойчивости и качества ЦАС	297
Анализ устойчивости ЦАС (297). Анализ качества переходных процессов ЦАС (300).	

Глава 10. Нелинейные системы автоматического управления 305

10.1. Понятие о нелинейных системах	305
10.2. Релейные системы :	305
10.3. Свойства и методы исследования нелинейных систем	308
Свойства нелинейных систем (308). Методы исследования нелинейных систем (309).	
10.4. Особенности устойчивости нелинейных систем	310
10.5. Частотный критерий абсолютной устойчивости равновесия В. М. Попова : : :	312
10.6. Метод гармонической линеаризации	315
Эквивалентный комплексный коэффициент усиления нелинейных элементов (315). Методика определения эквивалентного комплексного коэффициента усиления нелинейного элемента (318). Годограф вектора нормированного эквивалентного комплексного коэффициента усиления нелинейного элемента (322).	
10.7. Исследование устойчивости автоколебаний нелинейных систем методом гармонической линеаризации	324
Исследование автоколебаний методом логарифмических частотных характеристик (324).	
10.8. Способы устранения автоколебаний нелинейных САУ и уменьшения их амплитуды :	329
10.9. Нелинейные корректирующие устройства	331
Нелинейные корректирующие устройства с опережающими петлевыми характеристиками (333). Псевдolineйные корректирующие устройства (335).	
10.10. Методы оценки динамической точности и качества переходных процессов в нелинейных системах	338
10.11. Компенсация естественных нелинейных САУ	339
Компенсация зоны нечувствительности (340). Расширение линейной зоны статической характеристики нелинейности типа насыщения (341).	

Глава 11. Оптимальные системы автоматического управления 343

11.1. Постановка задачи оптимального управления	343
Определение и необходимость построения оптимальных систем автоматического управления (343). Понятия о фазовом состоянии и фазовой траектории объекта (344). Уравнения движения управляемого объекта (346). Критерии оптимальности (348). Ограничения управляющего воздействия и фазовых координат управляемого объекта (350).	
11.2. Методы решения задачи синтеза оптимального управления	352
Метод динамического программирования Беллмана (352). Принцип максимума Понтрягина (356).	

11.3. Оптимальные по быстродействию системы автоматического управления	360
Задача об оптимальном быстродействии и метод ее решения (360). Теорема об интервалах (363). Определение моментов переключения управляющего воздействия при оптимальном по быстродействию управлении линейными объектами (367). Построение оптимального переходного процесса (372). Оптимальные по быстродействию разомкнутые САУ (374). Оптимальные по быстродействию замкнутые САУ (376). Синтез управляющего устройства замкнутой системы с помощью фазовой плоскости (377). Оптимальные по быстродействию комбинированные САУ (382). Квазиоптимальные системы автоматического управления (384).	

Глава 12. Адаптивные системы автоматического управления 385

12.1. Определение адаптивных систем автоматического управления и их классификация : : : :	386
Необходимость построения адаптивных систем (385). Классификация адаптивных САУ (387).	
12.2. Самонастраивающиеся системы автоматического управления со стабилизацией качества управления	389
Самонастраивающаяся система с эталонной моделью (389). Самонастраивающаяся система стабилизации амплитудно-частотной характеристики с моделью (390). Самонастраивающаяся система с моделью и большим коэффициентом усиления (391).	
12.3. Самонастраивающиеся системы автоматической оптимизации качества управления (системы экстремального управления)	392
Системы экстремального управления с принципом управления по возмущению (394). Системы экстремального управления с принципом управления по отклонению (395).	
12.4. Поисковые системы экстремального управления	397
Методы определения градиента критерия оптимальности и поиска экстремума (397). Метод синхронного детектирования. Экстремальные системы управления с синхронным детектированием (399). Метод производной по времени. Экстремальные системы с управлением по производной (405). Метод запоминания экстремума. СЭУ с запоминанием экстремума (407).	
12.5. Беспонисковые дифференциальные системы экстремального управления	409
Дифференциальные СЭУ с моделями объекта управления (409).	
12.6. Корреляционные системы экстремального управления	411
Корреляционная СЭУ для выравнивания временных запаздываний сигналов (412). Корреляционная дифференциальная СЭУ для выравнивания временных запаздываний сигналов (413). Корреляционная СЭУ с синхронным детектированием для выравнивания временных запаздываний сигналов (415). Корреляционная СЭУ для измерения скорости движения (416). Корреляционная дифференциальная СЭУ для измерения скорости проката (417).	

Предметный указатель	421
--------------------------------	-----

Список рекомендуемой литературы	424
---	-----

Учебное пособие

Григорий Фролович Зайцев

ТЕОРИЯ

автоматического

управления и регулирования

Редакторы *И. В. Мисюренко, Л. Н. Чмиль*

Переплет художника *В. А. Гурлева*

Художественный редактор *С. П. Духленко*

Технический редактор *Л. Ф. Волкова*

Корректор *Л. М. Байбородина*

Информ. бланк. № 10445

Сдано в набор 31.03.87. Подп. в печ. 25.11.87.
БФ 29230. Формат 60×90/16. Бумага типогр. № 2.
Лит. гарн. Выс. печать. Печ. л. 27. Кр.-отт. 27.
Уч.-изд. л. 30,01. Тираж 4000 экз. Изд. № 7688.
Зак. № 7—1719. Цена 1 р. 30 к.

Главное издательство издательского объединения
«Выща школа», 252054, Киев-54, ул. Гоголевская, 7

Отпечатано с матриц Главного предприятия республиканского производственного объединения
«Полиграфкнига», 252057, Киев-57, ул. Довженко, 3, в Киевской книжной типографии научной
книги, 252004, Киев-4, ул. Репина, 4. Зак. 8-36.